

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

1. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ จำนวน 6 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 เรื่อง ลำดับ

เล่มที่ 2 เรื่อง ลำดับเลขคณิต

เล่มที่ 3 เรื่อง ลำดับเรขาคณิต

เล่มที่ 4 เรื่อง สัญลักษณ์แทนการบวก

เล่มที่ 5 เรื่อง อนุกรมเลขคณิต

เล่มที่ 6 เรื่อง อนุกรมเรขาคณิต

2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อการจัดกิจกรรมการเรียน
การสอนให้ผู้เรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจและสามารถฝึกฝนได้ด้วยตนเองและพัฒนาทักษะ
กระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
สูงขึ้น โดยมีครูผู้สอนเป็นผู้คอยแนะนำ

3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่มนี้ เป็นเล่มที่ 1 เรื่อง ลำดับ มีส่วนประกอบดังนี้

1. คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

2. คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครู

3. คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน

4. สารและมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด

5. จุดประสงค์การเรียนรู้

6. แบบทดสอบก่อนเรียน

7. ใบความรู้

8. แบบฝึกทักษะ

9. แบบทดสอบหลังเรียน

10. เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

11. เฉลยแบบฝึกทักษะ

12. เฉลยแบบทดสอบก่อนหลังเรียน

4. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ฉบับนี้ใช้เวลาเรียน 5 ชั่วโมง

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครู

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ครูผู้สอนเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ ครูผู้สอนจึงควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ตามขั้นตอนดังนี้

1. ครูต้องศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ และอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจเนื้อหาเพื่อนำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ไปใช้
2. ครูต้องเตรียมแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผลและประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบขั้นตอนการเรียนรู้ และวิธีการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์อย่างชัดเจนตั้งแต่ต้นจนจบ
5. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียนในการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ให้เข้าใจ และเน้นย้ำเรื่องความซื่อสัตย์ไม่คัดลอกคำตอบจากเพื่อนไม่เปิดดูเฉลยก่อนลงมือทำด้วยตนเอง
6. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อวัดความรู้พื้นฐานและดูผลการพัฒนาเมื่อเรียนเรื่องนี้จบ
7. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
8. จัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
9. สังเกตความสนใจในการเรียน ความตั้งใจในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์และการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มของนักเรียนอย่างใกล้ชิด เพื่อช่วยเหลือนักเรียนได้ทันทีเมื่อนักเรียนมีปัญหา
10. เวลาที่ใช้ในการทำกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคนหรือแต่ละกลุ่มนั้นอาจจะไม่เท่ากัน ครูควรยืดหยุ่นตามสถานการณ์อย่างเหมาะสม
11. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน



คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียน

ในการศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นักเรียนควรปฏิบัติตามคำแนะนำ ดังนี้

1. อ่านคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ให้เข้าใจ ก่อนลงมือปฏิบัติกิจกรรม หรือทำการศึกษาค้นคว้าทุกครั้ง
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน ซึ่งมีลักษณะเป็นปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ ลงในกระดาษคำตอบแบบทดสอบเพื่อวัดความรู้พื้นฐานของตนเอง
3. นักเรียนปฏิบัติตามกิจกรรมตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ในแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ โดยไม่ข้ามขั้นตอนและสรุปความรู้ที่ได้จากกิจกรรมที่ปฏิบัติ โดยมีครูเป็นที่ปรึกษาในการปฏิบัติตามกิจกรรม
4. นักเรียนตั้งใจศึกษาใบความรู้และตัวอย่าง แล้วทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ตามลำดับอย่างครบถ้วน
5. ในระหว่างการทำกิจกรรมนั้น นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ ไม่เปิดดูเฉลยก่อน ลงมือทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน
6. เปลี่ยนกันตรวจกระดาษคำตอบสำหรับแบบทดสอบและแบบฝึกทักษะแล้วบันทึกคะแนนที่ได้ลงในแบบบันทึกคะแนน
7. เมื่อทราบผลการตรวจแบบฝึกทักษะ หากพบว่ามิข้อที่ไม่ถูกต้องให้นักเรียนศึกษา ทบทวนเนื้อหาและตัวอย่าง แล้วทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ข้อที่ไม่ถูกต้องอีกรอบ หรือขอคำแนะนำจากครูผู้สอน
8. ทำแบบทดสอบหลังเรียนเพื่อประเมินความก้าวหน้าของตนเอง

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้/ตัวชี้วัด



สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 4 พืชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัด

ค 4.1 ม.4-6/4 เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด

ค 4.1 ม.4-6/5 เข้าใจความหมายของลำดับเลขคณิต และลำดับเรขาคณิต หาพจน์ต่างๆ ของลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต และนำไปใช้

ค 6.1 ม.4-6/1 ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา

ค 6.1 ม.4-6/2 ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.4-6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม

ค 6.1 ม.4-6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน

ค 6.1 ม.4-6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ในคณิตศาสตร์และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่นๆ

ค 6.1 ม.4-6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

จุดประสงค์การเรียนรู้



1. ด้านความรู้

- 1.1 นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง
- 1.2 นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง
- 1.3 นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแจกพจน์ได้อย่างถูกต้อง
- 1.4 นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

2. ด้านทักษะกระบวนการ

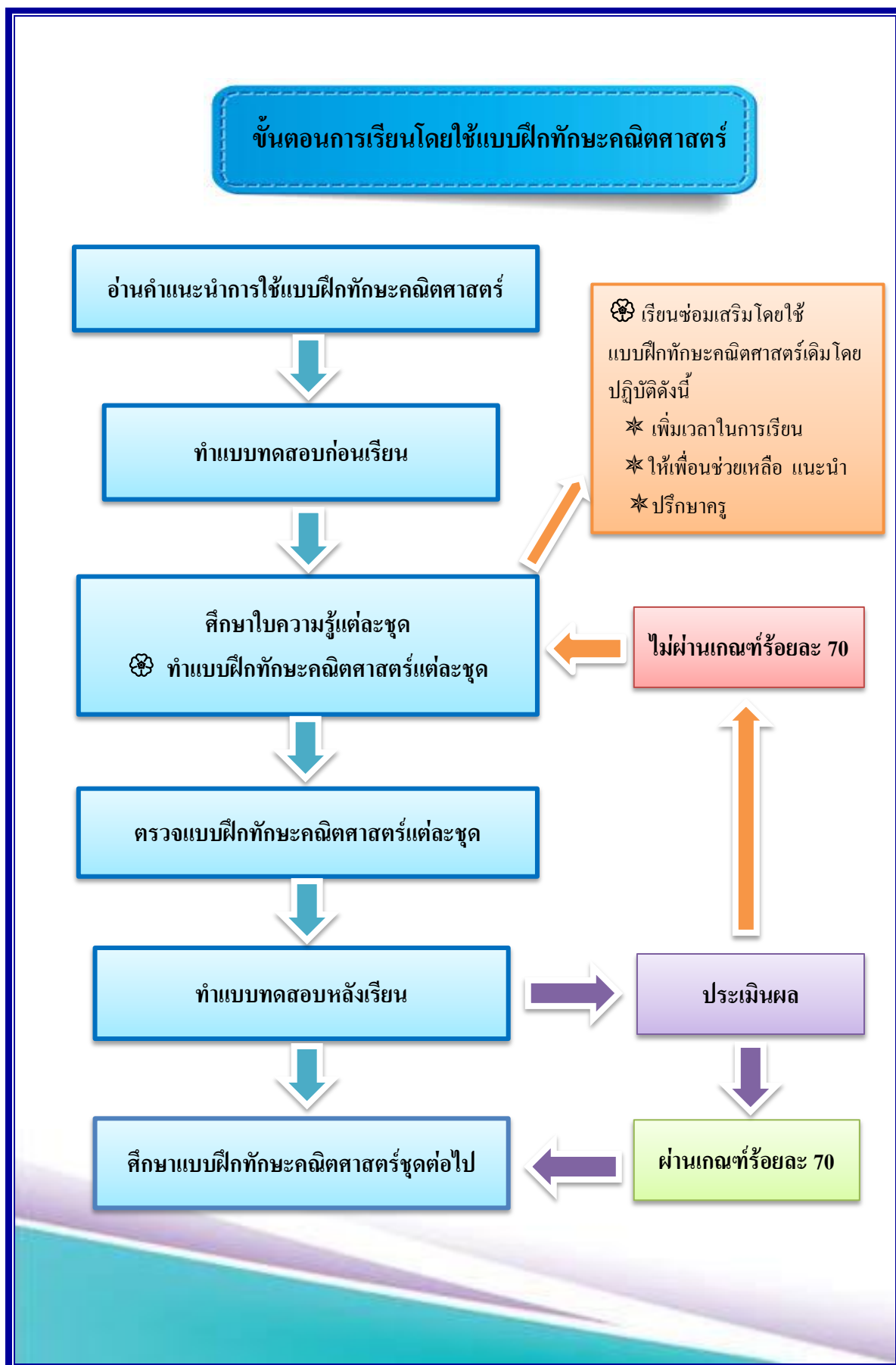
- 2.1 การแก้ปัญหา
- 2.2 การให้เหตุผล
- 2.3 การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 3.1 ซื่อสัตย์สุจริต
- 3.2 มีวินัย
- 3.3 ใฝ่เรียนรู้
- 3.4 มุ่งมั่นในการทำงาน

เวลาที่ใช้ในการศึกษา
จำนวน 5 ชั่วโมง







แบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง ลำดับ

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

เวลา 20 นาที

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค.4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ค.4.1 ม.4-6/4 เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแจกพจน์ได้อย่างถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 10 ข้อใช้เวลาทำแบบทดสอบทั้งหมด 20 นาที
2. ให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อใดเป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละหนึ่งคำตอบแล้วทำเครื่องหมาย (X) ที่ช่องว่าง ก, ข, ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบที่แจกให้ดังนี้

ตัวอย่าง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1	X			
2			X	

3. หากต้องการเปลี่ยนตัวเลือกใหม่ในแต่ละข้อให้ดำเนินการดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1	X			X
2			X	

4. เกณฑ์การให้คะแนน

ตอบถูก ได้คะแนน 1 คะแนน

ตอบผิด ได้คะแนน 0 คะแนน

5. ห้ามขีดเขียนเครื่องหมายหรือข้อความใดๆ ลงในแบบทดสอบ ก่อนได้รับอนุญาต

1. พิจารณาฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นลำดับ

ก. $f = \{(1,2), (2,5), (3,11), (4,14), \dots\}$

ข. $g = \{(1,-12), (3,-14), (5,-18)\}$

ค. $h = \{(0,10), (1,30), (2,90), (3,27)\}$

ง. $I = \{(2,0), (4, 1), (6, 2), (8, 3)\}$

2. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับจำกัด

ก. $a_n = 5n - 3$

ข. $a_n = 3n + 5$

ค. $a_n = 2^n, n \in \mathbb{I}^+, n < 8$

ง. $a_n = (1)^n (n^2 - 2), n \in \mathbb{N}$

3. ลำดับแรกของลำดับ $a_n = 3n - 2$ ตรงกับข้อใด

- ก. 1, 3, 5, 7
- ข. 1, 4, 7, 10
- ค. 1, 5, 8, 11
- ง. 1, 3, 7, 11

4. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. $-1, 1, -1, 1, \dots$ มี $a_9 + a_{11} = 0$
- ข. $100, 99, 97, 94, \dots$ มี $a_{10} = 90$
- ค. $2, 4, 8, 16, \dots$ มี $a_{20} = 2^{n-1}$
- ง. $2, 4, 6, 8, \dots$ มี $a_n = 2n$

5. กำหนดลำดับที่มี $a_n = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -4 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ข้อใดคือลำดับแรกของลำดับนี้

- ก. 2, 5, 10, 15
- ข. 4, 5, 4, 15
- ค. $-4, 5, -4, 17$
- ง. $-4, 5, -4, 16$

6. ถ้าลำดับมีพจน์ทั่วไปหรือ $a_n = \frac{7n^2}{2n+1}$ จงหาว่า $\frac{112}{9}$ ตรงกับพจน์ที่เท่าใด

- ก. 5
- ข. 4
- ค. 3
- ง. 2

7. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ $1, 6, 16, 31, \dots$ ตรงกับข้อใด

ก. $36, 46$

ข. $41, 56$

ค. $51, 66$

ง. $51, 76$

8. พจน์ทั่วไปของลำดับ $1, 5, 9, 13, \dots$ ตรงกับข้อใด

ก. $a_n = 4n - 3$

ข. $a_n = 5n - 4$

ค. $a_n = 3n + 4$

ง. $a_n = 4n + 3$

9. กำหนดพจน์ทั่วไป $a_n = (-1)^n (n + 1)$ ค่าของ $a_{10} + a_{20}$ ตรงกับข้อใด

ก. 22

ข. 32

ค. 231

ง. 232

10. ลำดับ $0, 1, 4, 9, 16$ พจน์ทั่วไปตรงกับข้อใด

ก. $a_n = n^2$

ข. $a_n = (n + 1)^2$

ค. $a_n = (n - 1)^2$

ง. $a_n = n^2 - 1$



ชื่อ – สกุล ชั้น...เลขที่.....คะแนนที่ได้.....คะแนน

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ก , ข , ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบให้ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว

แบบทดสอบก่อนเรียน				
ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				



ใช้เวลาศึกษา 10 นาที

เกมคณิตคิดสนุก 1
ตามหาฉันให้เจอ

ชุดที่ 1

95

85

...

65

...

ตัวเลขที่หายไป คือ.....

ชุดที่ 2

7

.....

21

28

.....

ตัวเลขที่หายไป คือ.....

ชุดที่ 3

...

18

36

...

144

ตัวเลขที่หายไป คือ.....

ชุดที่ 4

1

...

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$

...

ตัวเลขที่หายไป คือ.....

ใช้เวลาศึกษา 20 นาที

ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ความหมายของลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง

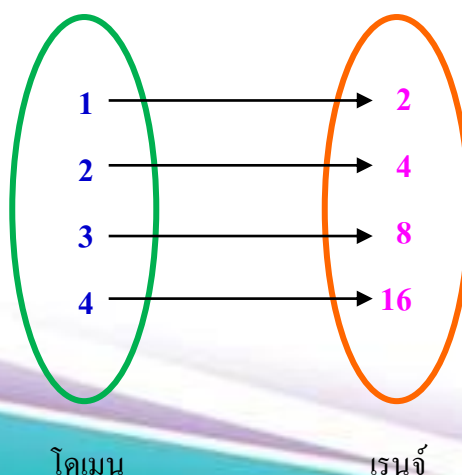
ความหมายของลำดับ

- 1) พิจารณาความสัมพันธ์ของ $r_1 = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ ความสัมพันธ์ของ r_1 เป็นฟังก์ชัน ที่มี $\{1, 2, 3, 4\}$ เป็นโดเมน และมี $\{1, 3, 5, 7\}$ เป็นเรนจ์
- 2) พิจารณาแบบรูปของจำนวน 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... จากแบบรูปข้างต้น เขียนความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนแต่ละจำนวนในแบบรูป ได้ดังนี้

ลำดับที่	1	2	3	4	5	6
จำนวน	5	10	15	20	25	30

จากตารางจะเห็นว่า ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นฟังก์ชัน มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

- 3) พิจารณาแผนภาพการจับคู่ของโดเมนกับเรนจ์ ดังนี้



จากแผนภาพการจับคู่ของโดเมนกับเรนจ์จะเห็นว่า ความสัมพันธ์ข้างต้นเป็นฟังก์ชัน
มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4\}$ และมีเรนจ์เป็น $\{2, 4, 6, 8\}$

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกหรือโดเมนเป็นเซต
ของจำนวนเต็มบวกที่เรียงจากน้อยไปหามากโดยเริ่มตั้งแต่ 1 เรียกว่า ลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับ

1. $f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$ เป็นลำดับ

เพราะมีโดเมนเป็น $\{1,2,3,4\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก 4 ตัวแรก

2. $g = \{(1,-1), (2,-2), (3,-3), (4,-4), \dots\}$ เป็นลำดับ

เพราะมีโดเมนเป็น $\{1,2,3,4,\dots\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่เรียงจากน้อยไป
หามากโดยเริ่มตั้งแต่ 1

ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า
ลำดับจำกัด และในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots\}$ จะเรียกลำดับดังกล่าวว่า
ลำดับอนันต์

ในการเขียนลำดับจะเขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกันไปกล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับ
จำกัดจะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ในกรณีที่ a เป็นลำดับอนันต์จะเขียนแทนด้วย
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนลำดับจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ พร้อมทั้งบอกลำดับที่ได้
เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์

1. $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7), (5,9)\}$ เขียนเป็นลำดับคือ 1, 3, 5, 7, 9
ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9$ มีจำนวน 5 พจน์ เป็นลำดับจำกัด

2. $f = \{(x,y) | y = 3x - 2, x \in \mathbb{I}^+\}$ เขียนเป็นลำดับคือ 1, 4, 7, 10, ...
ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10$ และมีจำนวนไปเรื่อยๆ เป็นลำดับอนันต์

ใช้เวลา 15 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง ความหมายของลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างพร้อมทั้งพิจารณาว่าข้อใดเป็นลำดับหรือไม่เป็นลำดับโดยเขียนเครื่องหมาย ✓ ให้ตรงคำตอบที่ถูกต้อง (ข้อละ 2 คะแนน)

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์	เป็นลำดับ	ไม่เป็นลำดับ
1. $\{(1,5), (2,10), (3,15)\}$				
2. $f(x) = x + 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$				
3. $\{(2,3), (4,6), (5,9), \dots\}$				
4. $\{(1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$				
5. $\{(1,1), (5,4), (7,9), \dots\}$				
6. $f(x) = 2x - 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$				
7. $f(x) = 2^x$, $x = 0, 1, 2$				
8. $f(x) = (-1)^x$, $x = 1, 2, 3, \dots, n$				
9. $f(x) = 3x + 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$				
10. $f(x) = 3x$, $x = -1, -2, -3, \dots$				

สรุป จากตารางข้าง

ลำดับ คือ.....

.....

.....

ใช้เวลา 10 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อใดเป็นลำดับจำกัดและลำดับอนันต์โดยเขียนเครื่องหมาย ✓ ให้ตรงคำตอบที่ถูกต้อง (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อ	ลำดับที่กำหนดให้	ลำดับจำกัด	ลำดับอนันต์
1	4, 7, 10, 13, 16, ...		
2	2, 5, 8, 11, 14		
3	1, 4, 9, 16, 25, ...		
4	6, 10, 14, 18, 22, 26		
5	-1, -3, -5, -7, ...		
6	$a_n = 2n + 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$		
7	$a_n = 4n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$		
8	$a_n = n + 7$ เมื่อ $n \in I^+$		
9	$a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 9$		
10	$a_n = -4n - 1$		

สรุปได้ว่า

ลำดับจำกัด คือ

ลำดับอนันต์ คือ

ใช้เวลา 20 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 3

เรื่อง ความหมายของลำดับ ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

ให้นักเรียนเติมคำตอบให้ถูกต้อง

1. จงหาโดเมนและ เรนจ์ เขียนลำดับในรูปแจกพจน์ พร้อมทั้งตอบด้วยว่าเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ จาก a_n ที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน)

1). กำหนดให้ $a_n = 2n + 5, n = 1, 2, 3, \dots, 12$

โดเมน คือ

เรนจ์ คือ

ลำดับ คือ

เป็นลำดับ

2). กำหนดให้ $a_n = \frac{n}{n+1}$

โดเมน คือ

เรนจ์ คือ

ลำดับ คือ

เป็นลำดับ

2. ลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ พร้อมทั้งให้เหตุผล

(ข้อละ 1 คะแนน)

- | | |
|---|----------------------------|
| 1). 1, 2, 3, ..., 10 | เป็นลำดับเพราะ |
| 2). 5, 10, 15, ..., 5n,... | เป็นลำดับเพราะ |
| 3). -2, -1, 0, 1, 2 | เป็นลำดับเพราะ |
| 4). 1, 3, 5, ..., 2n - 1, ... | เป็นลำดับเพราะ |
| 5). $a_n = 2^n, n = 1, 2, 3, \dots, 100$ | เป็นลำดับเพราะ |
| 6). $a_n = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots, 25$ | เป็นลำดับเพราะ |

ใช้เวลา 30 นาที

ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง การเขียนลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแบบแจกแจงพจน์ได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

การเขียนลำดับ

ในการเขียนลำดับใดๆ โดยทั่วไปนิยมเขียนได้ 2 แบบ คือ

1. การเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์
2. การเขียนลำดับแบบพจน์ทั่วไป

1. การเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์ คือ เขียนเฉพาะค่าสมาชิกของเรนจ์หรือสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับเรียงกันไป

กล่าวคือ ถ้า a เป็นลำดับจำกัด จะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ในกรณีที่ a เป็นลำดับอนันต์จะเขียนแทนด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

เรียก	a_1	ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ
	a_2	ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ
	a_3	ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ
	\vdots	
	a_n	ว่า พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไป (General term) ของลำดับ

เช่น 1. ถ้า $f_1 = \{(1,5), (2,10), (3,15)\}$

เขียนแทนด้วย 5, 10, 15

2. ถ้า $f_2 = \{(1,3), (2,6), (3,9), \dots, (n,3n), \dots\}$

เขียนแทนด้วย 3, 6, 9, ...

3). 3, 8, 15, 24, 35 เป็นลำดับจำกัดที่มี $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 15$, $a_4 = 24$, $a_5 = 35$

4) 5, 7, 9, 11, 13, ... เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$, $a_5 = 13$

และ $a_n = 2n + 3$

2. การเขียนลำดับแบบพจน์ทั่วไป คือ การเขียนในรูปฟังก์ชันพร้อมทั้งระบุสมาชิกในโดเมน เช่น

1. ลำดับ 3, 8, 15, 24, 35 อาจเขียนแทนด้วย $a_n = n(n+2)$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. ลำดับ 5, 7, 9, 11, 13, ... อาจเขียนแทนด้วย $a_n = 2n + 3$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

หมายเหตุ

ในกรณีที่กำหนดลำดับโดยพจน์ทั่วไป ถ้าไม่ได้ระบุสมาชิกในโดเมนให้ถือว่าลำดับนั้นเป็นลำดับอนันต์

การหาพจน์ใดๆ จากพจน์ทั่วไป

การหาพจน์ใดๆ ของลำดับเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไป (a_n) มาให้ ทำได้โดยแทนค่า n ในพจน์ทั่วไปด้วยจำนวนที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 4n + 1$

วิธีทำ จาก $a_n = 4n + 1$

$$a_1 = 4(1) + 1 = 5$$

$$a_2 = 4(2) + 1 = 9$$

$$a_3 = 4(3) + 1 = 13$$

$$a_4 = 4(4) + 1 = 17$$

ตอบ ดังนั้นสี่พจน์แรกคือ 5, 9, 13, 17

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

วิธีทำ จาก $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$a_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$$

$$a_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$$

$$a_4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

ตอบ ดังนั้นสี่พจน์แรกคือ 1, 3, 6, 10

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดลำดับ $a_n = 3n - 4$ จงหาค่าของ $2a_5 - 3a_2$

วิธีทำ จากพจน์ทั่วไป $a_n = 3n - 4$

จะได้ $a_5 = 3(5) - 4$

$$= 15 - 4$$

$$= 11$$

และ $a_2 = 3(2) - 4$

$$= 6 - 4$$

$$= 2$$

นั่นคือ $2a_5 - 3a_2 = 2(11) - 3(2)$

$$= 22 - 6$$

$$= 16$$

ตอบ ดังนั้น $2a_5 - 3a_2 = 16$

การหาพจน์ถัดไปของลำดับแบบแฉงพจน์

หลักการ จากลำดับแบบแฉงพจน์ที่กำหนดให้ ต้องทำการหารูปแบบการเปลี่ยนแปลงของพจน์ในลำดับ

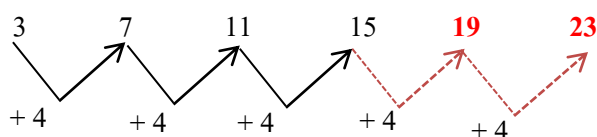
1. จากพจน์ที่ 1 มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะได้พจน์ที่ 2
2. จากพจน์ที่ 2 มีการเปลี่ยนแปลงอย่างไรจึงจะได้พจน์ที่ 3 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ

จนครบทุกพจน์ในลำดับ

3. พจน์ถัดไปในลำดับก็จะเปลี่ยนแปลงค่าในลักษณะเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ถัดไปอีกสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 3, 7, 11, 15

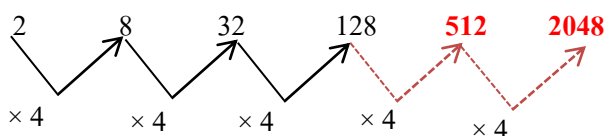
วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ



จะเห็นว่าพจน์ที่อยู่ถัดไปจะเพิ่มขึ้นทีละ 4 ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับคือ 19 และ 23

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ถัดไปอีกสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 2, 8, 32, 128

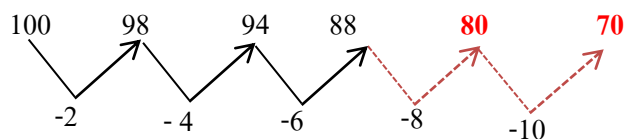
วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ



จะเห็นว่าพจน์ที่อยู่ถัดไปจะเป็น 4 เท่าของพจน์ที่อยู่ข้างหน้า ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับคือ 512 และ 2048

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ถัดไปอีกสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 100, 98, 94, 88

วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ



จะเห็นว่าพจน์ที่อยู่ถัดไปของลำดับนี้จะลดลง 2, 4, 6 ตามลำดับ ดังนั้น สองพจน์ถัดไปของลำดับจะลดลง 8 และ 10 ตามลำดับ จะได้ 80 และ 70

ใช้เวลา 15 นาที

เกมคณิตคิดสนุก 2

สนุกกับเกมสร้างรูปแบบของจำนวน

วิธีเล่น ตารางจำนวนด้านล่างนี้ แต่ละแถวจะเป็นไปตามกฎที่อยู่ในรูปหกเหลี่ยมสีฟ้า ด้านซ้ายสุดของแถว ที่หัวของแต่ละคอลัมน์เป็นค่าของจำนวน (n) ที่จะใช้ ให้เติมคำตอบที่มีความสอดคล้องกับกฎทางซ้ายและค่า n ที่หัวของแต่ละคอลัมน์

หมายเหตุ จำไว้ว่าให้คำนวณค่าที่อยู่ในวงเล็บก่อน

Rule (กฎ)	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$n+5$					
$n-1$					
$2-3n$					
$n(n-1)$					
2^n					

ใช้เวลา 20 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 4 เรื่อง การเขียนลำดับแบบแจกพจน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแบบแจกพจน์ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาการเขียนลำดับแบบแจกพจน์ในข้อ 1 – 2 แล้วพิจารณาข้อ 3 – 12 พร้อมทั้งเติมคำตอบให้ถูกต้อง (ข้อละ 2 คะแนน)

ข้อที่	a_n (พจน์ทั่วไป)	a_1 (พจน์ที่ 1)	a_2 (พจน์ที่ 2)	a_3 (พจน์ที่ 3)	สามพจน์แรก ของลำดับ
1	$3n + 1$	$3(1) + 1 = 4$	$3(2) + 1 = 7$	$3(3) + 1 = 10$	4, 7, 10
2	$8n - 3$	$8(1) - 3 = 5$	$8(2) - 3 = 13$	$8(3) - 3 = 21$	5, 13, 21
3	$2n^2 - 1$				
4	$n^2 + 2$				
5	$(n + 1)^2$				
6	$2 - 3n$				
7	$n(n + 1)$				
8	$5n - 3$				
9	$\frac{n(n + 1)}{2}$				
10	$-4n + 1$				
11	$-5n - 2$				
12	$3n - 5$				

ใช้เวลา 20 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 5

เรื่อง การเขียนลำดับตามโจทย์ที่กำหนดให้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแบบแจกแจงพจน์ได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถหาพจน์ถัดไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนลำดับตามที่โจทย์กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้ $a_n = (-1)^n n(n+1)$

.....

2. กำหนดลำดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ และ $b_n = \frac{1}{2n}$ จงหาค่าของ $a_2 + b_2$

.....

.....

3. จงหาพจน์ถัดไปสามพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $1, 4, 7, 10, \dots$

3.2 $2, 3, 5, 8, \dots$

3.3 $-5, 0, 5, 10, \dots$

3.4 $1, 2, 6, 24, \dots$

4. กำหนดลำดับ $a_n = (-1)^{n+1} n^2$ จงเขียน 4 พจน์แรก

.....

5. กำหนดลำดับที่มี $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n - 3$ จงเขียน 4 พจน์แรก

.....

ใช้เวลา 30 นาที

ใบความรู้ที่ 3

เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ การเขียนแสดงพจน์ทั่วไป a_n ในรูปที่มี n เป็นตัวแปร และเมื่อแทน n ด้วยสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วได้พจน์ที่ $1, 2, 3, \dots, m$ ของลำดับตรงตามที่กำหนด วิธีการหาพจน์ทั่วไปเช่นนี้ โดยทั่วไปใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่างพจน์กับลำดับที่ของพจน์

ตัวอย่างการหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

- 1) 2, 3, 4, 5
- 2) 1, -2, 3, -4, 5

- 1). พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ต่างๆ และความสัมพันธ์ระหว่างพจน์กับลำดับที่ของพจน์ ดังนี้

พจน์ที่ 1	2	=	1 + 1
พจน์ที่ 2	3	=	2 + 1
พจน์ที่ 3	4	=	3 + 1
พจน์ที่ 4	5	=	4 + 1
\vdots			\vdots
พจน์ที่ n	n	=	$n + 1$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = n + 1$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

2). พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์และลำดับที่ของแต่ละพจน์ ดังนี้

พจน์ที่ 1	1	=	$(-1)^2 \times 1$
พจน์ที่ 2	-2	=	$(-1)^3 \times 2$
พจน์ที่ 3	3	=	$(-1)^4 \times 3$
พจน์ที่ 4	-4	=	$(-1)^5 \times 4$
พจน์ที่ 5	5	=	$(-1)^6 \times 5$
\vdots	\vdots		\vdots
พจน์ที่ n	n	=	$(-1)^{n+1} \times n$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = (-1)^{n+1} n$

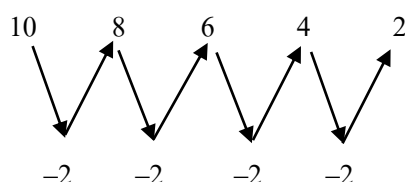
เขียนลำดับของ $a_n = (-1)^{n+1} n$ ได้ดังนี้ $1, -2, 3, -4, 5, \dots, (-1)^{n+1} n, \dots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1) $10, 8, 6, 4, 2, \dots$

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$

วิธีทำ 1) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $10, 8, 6, 4, 2, \dots$



พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะน้อยกว่าพจน์ที่มาก่อนอยู่ -2

พิจารณาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้

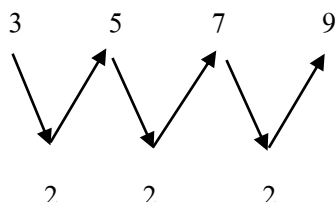
พจน์ (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
10	8	6	4	2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$12 - 2$	$12 - 4$	$12 - 6$	$12 - 8$	$12 - 10$

หรือ $12 - (2 \times 1), 12 - (2 \times 2), 12 - (2 \times 3), 12 - (2 \times 4), 12 - (2 \times 5)$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = 12 - 2n$

2) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$

พิจารณาค่าจำนวนที่เป็นตัวส่วนพบว่า



พิจารณาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับลำดับ 3, 5, 7, 9

พจน์ที่	(1)	(2)	(3)	(4)
	3	5	5	9
	⋮	⋮	⋮	⋮
	$2(1)+1$	$2(1)+1$	$2(1)+1$	$2(1)+1$

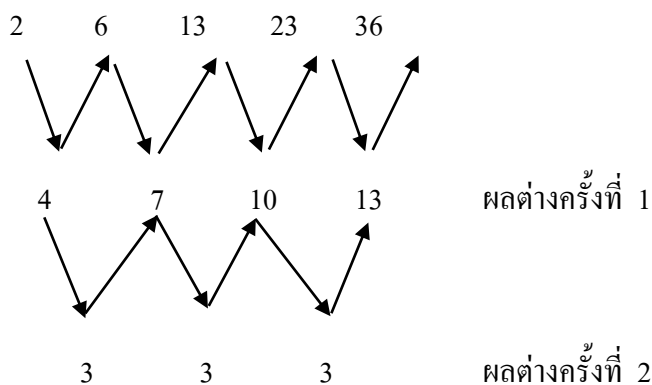
จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = \frac{1}{2n+1}$

หมายเหตุ การหาพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการหาโดยใช้การสังเกตความสัมพันธ์ของแต่ละพจน์กับลำดับของพจน์ ซึ่งในบางครั้งอาจจะไม่สะดวกที่จะใช้วิธีการดังกล่าวอีกวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันคือ การใช้ฟังก์ชันพหุนามหาพจน์ทั่วไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 6, 13, 23

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่และมีค่าเท่ากับ 3

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป

$$a_n = an^2 + bn + c$$

แทน n ในพจน์ทั่วไปด้วย 1, 2, 3 และ 4

จะได้

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = a + b + c && \text{.....(1)} \\ a_2 &= 6 = 4a + 2b + c && \text{.....(2)} \\ a_3 &= 13 = 9a + 3b + c && \text{.....(3)} \\ a_4 &= 23 = 16a + 4b + c && \text{.....(4)} \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหา a, b และ c ได้ดังนี้

$$(2) - (1) ; \quad 4 = 3a + b \quad \text{.....(5)}$$

$$(3) - (2) ; \quad 7 = 5a + b \quad \text{.....(6)}$$

$$(6) - (5) ; \quad 3 = 2a$$

$$\text{หรือ } a = \frac{3}{2}$$

แทน $a = \frac{3}{2}$ ใน (5) จะได้ $3a + b = 4$

$$3\left(\frac{3}{2}\right) + b = 4$$

$$b = 4 - \frac{9}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

แทน $a = \frac{3}{2}$ และ $b = -\frac{1}{2}$ ใน (1) จะได้

$$a + b + c = 2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + c = 2$$

$$c = 2 - 1$$

$$c = 1$$

เมื่อแทน ด้วย 1, 2, 3 และ 4

จะได้ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เท่ากับค่าที่กำหนดให้และ $a_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

แสดงว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

ใช้เวลา 30 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 6

เรื่อง การเขียนลำดับในรูปแจกพจน์และพจน์ทั่วไป

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนลำดับจากโจทย์ที่กำหนดให้

1. จงเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$1.1 \quad f = \{(x, y) \mid y = 3x - 1\} \text{ เมื่อ } x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$1.2 \quad g = \left\{ (x, y) \mid y = \frac{1}{3^x} \right\} \text{ เมื่อ } x = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$1.3 \quad h = \{(x, y) \mid y = 4\} \text{ เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

$$1.4 \quad t = \{(x, y) \mid y = \sin x\pi\} \text{ เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

2. จงเขียน 4 พจน์แรกของลำดับอนันต์เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปต่อไปนี้

$$2.1 \quad a_n = n^2 + 1$$

$$2.2 \quad a_n = (-1)^n \cdot (3)^n$$

$$2.3 \quad a_n = \frac{1}{2^n}$$

3. จงหาพจน์ทั่วไป หรือพจน์ที่ n ของลำดับจำกัดต่อไปนี้

$$3.1 \quad 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$3.2 \quad 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$3.3 \quad 1, 8, 27, 64, \dots$$

$$3.4 \quad 3, 7, 13, 21, 31, \dots$$

$$3.5 \quad -1, 2, -3, 4, -5, \dots$$

$$3.6 \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

ใช้เวลา 20 นาที



จุดประสงค์การเรียนรู้

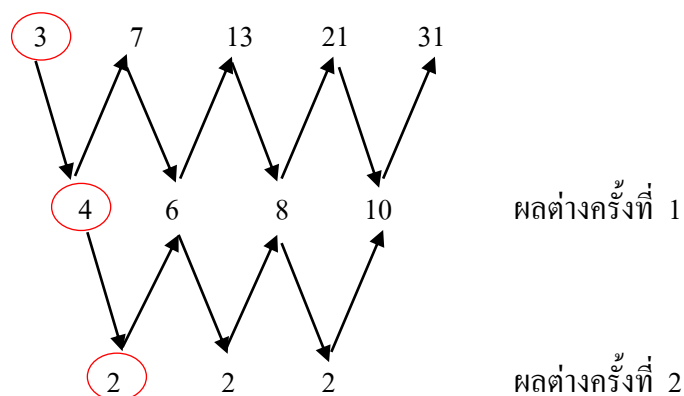
1. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับกรณีผลต่างสองชั้น (วิธีการเดิม)

พจน์ทั่วไปอยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 3, 7, 13, 21, 31, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป

$$a_n = an^2 + bn + c$$

แทน n ในพจน์ทั่วไปด้วย 1, 2, 3 และ 4

จะได้	a_1	=	3	=	$a + b + c$(1)
	a_2	=	7	=	$4a + 2b + c$(2)
	a_3	=	13	=	$9a + 3b + c$(3)
	a_4	=	21	=	$16a + 4b + c$(4)

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหา a, b และ c ได้ดังนี้

$$(2) - (1) ; \quad 4 = 3a + b \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(3) - (2) ; \quad 6 = 5a + b \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$(6) - (5) ; \quad 2 = 2a$$

$$\text{หรือ } a = 1$$

$$\text{แทน } a = 1 \text{ ใน (5) จะได้ } 3(1) + b = 4$$

$$b = 4 - 3$$

$$b = 1$$

แทน $a = 1$ และ $b = 1$ ใน (1) จะได้

$$1 + 1 + c = 3$$

$$c = 3 - 2$$

$$c = 1$$

เมื่อแทน ด้วย 1, 2, 3 และ 4

จะได้ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เท่ากับค่าที่กำหนดให้และ $a_n = n^2 + n + 1$

แสดงว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

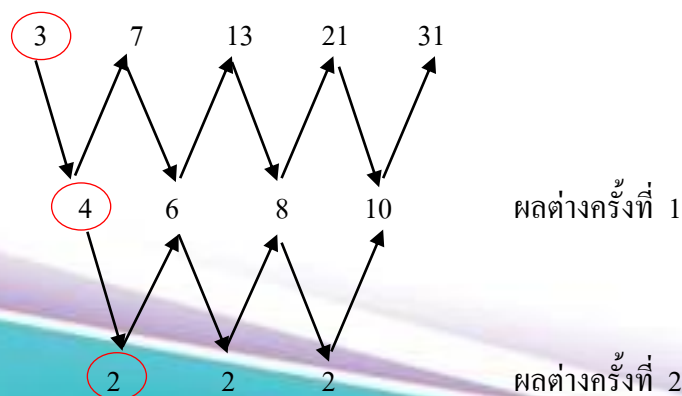
การหาพจน์ทั่วไปของลำดับกรณีผลต่างสองชั้น (วิธีการใหม่)

ใช้สูตรดังนี้

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1) d_1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2) d_2}{2!}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 3, 7, 13, 21, 31, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 2

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1) d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2) d_2}{2}$$

$$a_n = 3 + \frac{(n-1) 4}{1} + \frac{(n-1)(n-2) 2}{2}$$

$$a_n = 3 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2$$

$$a_n = n^2 + n + 1$$

ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับ $a_n = n^2 + n + 1$



ใช้เวลา 20 นาที

แบบฝึกทักษะที่ 7 (เพิ่มเติม)
เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับกรณีผลต่างสองชั้น

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้



คำชี้แจง ให้นักเรียนหาพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

1. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $2, 8, 18, 32, 50, \dots$

.....
.....
.....

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $2, 9, 22, 41, 66, \dots$

.....
.....
.....

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $5, 10, 17, 26, 37, \dots$

.....
.....
.....

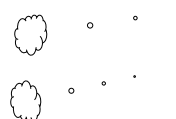
4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $2, 4, 8, 14, 22, \dots$

.....
.....
.....
.....

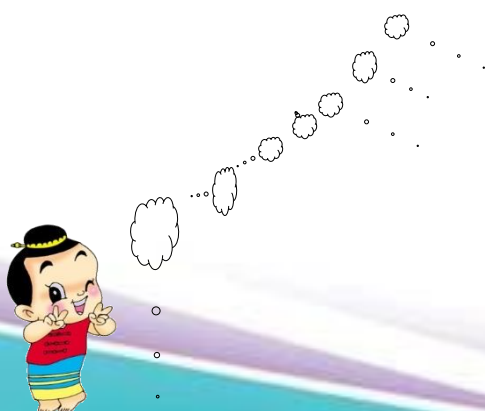
บทสรุปเกี่ยวกับลำดับ



ลำดับ คือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกโดยเริ่มตั้งแต่ 1 และเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงหรือฟังก์ชันจากเซต N หรือ I^+ ไปยัง R



ในกรณีที่มีโดเมนเป็นเซตจำกัดที่เป็น สับเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก เรียกลำดับนี้ว่า ลำดับจำกัดในกรณีที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับอนันต์





แบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง ลำดับ

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
เวลา 20 นาที
คะแนนเต็ม 10 คะแนน

มาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด

มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
ค 4.1 ม.4-6/4 เข้าใจความหมายของลำดับและหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าลำดับใดเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนสามารถเขียนลำดับในรูปแฉ่งพจน์ได้อย่างถูกต้อง
4. นักเรียนสามารถหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้อย่างถูกต้อง

คำชี้แจง

- 1.แบบทดสอบฉบับนี้เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำแบบทดสอบทั้งหมด 20 นาที
- 2.ให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อใดเป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุด ข้อละหนึ่งคำตอบแล้วทำเครื่องหมาย (X) ที่ช่องว่าง ก, ข, ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบที่แจกให้ดังนี้

ตัวอย่าง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1	X			
2			X	

3. หากต้องการเปลี่ยนตัวเลือกใหม่ในแต่ละข้อให้ดำเนินการดังนี้

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1	X			X
2			X	

4. เสนอการให้คะแนน

ตอบถูก ได้คะแนน 1 คะแนน

ตอบผิด ได้คะแนน 0 คะแนน

5. ห้ามขีดเขียนเครื่องหมายหรือข้อความใดๆ ลงในแบบทดสอบ ก่อนได้รับอนุญาต

1. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับจำกัด

ก. $a_n = 5n - 3$

ข. $a_n = 3n + 5$

ค. $a_n = 2^n, n \in \mathbb{I}^+, n < 8$

ง. $a_n = (1)^n (n^2 - 2), n \in \mathbb{N}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $-1, 1, -1, 1, \dots$

มี $a_9 + a_{11} = 0$

ข. $100, 99, 97, 94, \dots$

มี $a_{10} = 90$

ค. $2, 4, 8, 16, \dots$

มี $a_{20} = 2^{n-1}$

ง. $2, 4, 6, 8, \dots$

มี $a_n = 2n$

3.พิจารณาฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้ข้อใดเป็นลำดับ

ก. $f = \{(1,2), (2,5), (3,11), (4,14), \dots\}$

ข. $g = \{(1,-12), (3,-14), (5,-18)\}$

ค. $h = \{(0,10), (1,30), (2,90), (3,27)\}$

ง. $I = \{(2,0), (4, 1), (6, 2), (8, 3)\}$

4.ถ้าลำดับมีพจน์ทั่วไปหรือ $a_n = \frac{7n^2}{2n+1}$ จงหาว่า $\frac{112}{9}$ ตรงกับพจน์ที่เท่าใด

ก. 5

ข. 4

ค. 3

ง. 2

5.สี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3n - 2$ ตรงกับข้อใด

ก. 1, 3, 5, 7

ข. 1, 3, 7, 11

ค. 1, 5, 8, 11

ง. 1, 4, 7, 10

6. พจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 5, 9, 13, ... ตรงกับข้อใด

ก. $a_n = 4n - 3$

ข. $a_n = 5n - 4$

ค. $a_n = 3n + 4$

ง. $a_n = 4n + 3$

7.กำหนดพจน์ทั่วไป $a_n = (-1)^n (n + 1)$ ค่าของ $a_{10} + a_{20}$ ตรงกับข้อใด

ก. 22

ข. 32

ค. 231

ง. 232

8. ลำดับ 0, 1, 4, 9, 16 พจน์ทั่วไปตรงกับข้อใด

ก. $a_n = n^2$

ข. $a_n = (n+1)^2$

ค. $a_n = (n-1)^2$

ง. $a_n = n^2 - 1$

9. กำหนดลำดับที่มี $a_n = \begin{cases} n^2 + 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -4 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

ข้อใดคือสี่พจน์แรกของลำดับนี้

ก. 2, 5, 10, 15

ข. 4, 5, 4, 15

ค. -4, 5, -4, 17

ง. -4, 5, -4, 16

10. พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับ 1, 6, 16, 31, ... ตรงกับข้อใด

ก. 36, 46

ข. 41, 56

ค. 51, 66

ง. 51, 76

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง ลำดับ

ชื่อ – สกุล ชั้น...เลขที่.....คะแนนที่ได้.....คะแนน

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ก , ข , ค หรือ ง ในกระดาษคำตอบ
ให้ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว

แบบทดสอบหลังเรียน				
ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

คะแนนที่ได้



เกณฑ์การวัดผล

ตั้งแต่ 7 คะแนนขึ้นไป
ผ่านเกณฑ์



บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุลและรณชัย มาเจริญทรัพย์.(2548).คณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม เรื่องลำดับและอนุกรม ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6). กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- กระทรวงศึกษาธิการ.(2553).หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา.
- วิทย์ สุวรรณชาติ.(2552). New สรุปเข้มคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม ม.5. กรุงเทพฯ : แม็ค.
- ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล.(2554). หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม. 5 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : แม็ค.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.(2546).คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ คุรุสภา.
- _____. (2554).หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่มที่ 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ คุรุสภา.
- _____. (2554).หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ คุรุสภา.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน.(2551).หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.
- อเนก หิรัญ และกวีนา เนาวประทีป.(2547).คณิตศาสตร์พื้นฐาน 5 ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-ม.6) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง..ลำดับ

1. ก
2. ค
3. ข
4. ง
5. ค
6. ข
7. ง
8. ก
9. ข
10. ค



เฉลยเกมคณิตศาสตร์คิดสนุก 1
ตามหาฉันให้เจอ

ชุดที่ 1

95

85

...

65

...

ตัวเลขที่หายไป คือ.....75.....

ชุดที่ 2

7

...

21

28

...

ตัวเลขที่หายไป คือ.....14 และ 35.....

ชุดที่ 3

...

18

36

...

14

ตัวเลขที่หายไป คือ.....9 และ 72....

ชุดที่ 4

1

...

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$

...

ตัวเลขที่หายไป คือ..... $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{16}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง ความหมายของลำดับ

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้พร้อมทั้งเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์	เป็นลำดับ	ไม่เป็นลำดับ
1. $\{(1,5), (2,10), (3,15)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{5, 10, 15\}$	✓	
2. $f(x) = x + 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$\{2, 3, 4\}$	✓	
3. $\{(2,3), (4,6), (5,9), \dots\}$	$\{2, 4, 5, \dots\}$	$\{3, 6, 9, \dots\}$		✗
4. $\{(1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{-1, -2, -3\}$	✓	
5. $\{(1,1), (5,4), (7,9), \dots\}$	$\{1, 5, 7, \dots\}$	$\{1, 4, 9, \dots\}$		✗
6. $f(x) = 2x - 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$\{1, 3, 5, \dots\}$	✓	
7. $f(x) = 2^x$, $x = 0, 1, 2$	$\{0, 1, 2\}$	$\{1, 2, 4\}$		✗
8. $f(x) = (-1)^x$, $x = 1, 2, 3, \dots$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$\{-1, 2, -3, \dots\}$	✓	
9. $f(x) = 3x + 1$, $x = 1, 2, 3, \dots$	$\{1, 2, 3, \dots\}$	$\{4, 7, 10, \dots\}$	✓	
10. $f(x) = 3x$, $x = -1, -2, -3, \dots$	$\{-1, -2, -3, \dots\}$	$\{-3, -6, -9, \dots\}$		✗

สรุป จากตารางข้างต้น

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวกที่เรียงจากน้อยไปมาก โดยเริ่มตั้งแต่ 1

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์



คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาว่าข้อใดเป็นลำดับจำกัดและลำดับอนันต์โดยเขียนเครื่องหมาย ✓ ให้ตรงคำตอบที่ถูกต้อง (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อ	ลำดับที่กำหนดให้	ลำดับจำกัด	ลำดับอนันต์
1	4, 7, 10, 13, 16, ...		✓
2	2, 5, 8, 11, 14	✓	
3	1, 4, 9, 16, 25, ...		✓
4	6, 10, 14, 18, 22, 26	✓	
5	-1, -3, -5, -7, ...		✓
6	$a_n = 2n + 1$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$		✓
7	$a_n = 4n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4$	✓	
8	$a_n = n + 7$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$		✓
9	$a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots, 9$	✓	
10	$a_n = -4n - 1$		✓

สรุป จากตารางข้างต้น

ลำดับจำกัด คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

ลำดับอนันต์ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, \dots\}$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3

เรื่อง ความหมายของลำดับ ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

1. จงหาโดเมน เรนจ์ เขียนลำดับในรูปแจ้งพจน์ พร้อมทั้งตอบด้วยว่าเป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ จาก a_n ที่กำหนดให้แต่ละข้อต่อไปนี้

1) กำหนดให้ $a_n = 2n + 5, n = 1, 2, 3, \dots, 12$

โดเมน คือ $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$

เรนจ์ คือ $\{7, 9, 11, \dots, 29\}$

ลำดับ คือ $7, 9, 11, \dots, 29$

เป็นลำดับ **จำกัด**

2) กำหนดให้ $a_n = \frac{n}{n+1}$

โดเมน คือ $\{1, 2, 3, \dots\}$

เรนจ์ คือ $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

ลำดับ คือ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

เป็นลำดับ **อนันต์**

2. ลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัดหรือลำดับอนันต์ พร้อมทั้งให้เหตุผล

1) $1, 2, 3, \dots, 10$

เป็นลำดับ **จำกัด** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก 10 ตัวแรก

2) $5, 10, 15, \dots, 5n, \dots$

เป็นลำดับ **อนันต์** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก

3) $-2, -1, 0, 1, 2$

เป็นลำดับ **จำกัด** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก 5 ตัวแรก

4) $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$

เป็นลำดับ **อนันต์** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก

5) $a_n = 2^n, n = 1, 2, 3, \dots, 100$

เป็นลำดับ **จำกัด** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก 100 ตัวแรก

6) $a_n = \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, 3, \dots, 25$

เป็นลำดับ **จำกัด** เพราะ โดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก 25 ตัวแรก

เฉลยเกมคณิตคิดสนุก 2 สนุกกับเกมสร้างรูปแบบของจำนวน

วิธีเล่น ตารางจำนวนด้านล่างนี้ แต่ละแถวจะเป็นไปตามกฎที่อยู่ในรูปหกเหลี่ยมสีฟ้า ด้านซ้ายสุดของแถว ที่หัวของแต่ละคอลัมน์เป็นค่าของจำนวน (n) ที่จะใช้ ให้เติมคำตอบที่มีความสอดคล้องกับกฎทางซ้ายและค่า n ที่หัวของแต่ละคอลัมน์

หมายเหตุ จำไว้ว่าให้คำนวณค่าที่อยู่ในวงเล็บก่อน)

Rule (กฎ)	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
$n + 5$	6	7	8	9	10
$n - 1$	0	1	2	3	4
$2 - 3n$	-1	-4	-7	-10	-13
$n(n - 1)$	0	2	6	12	20
2^n	2	4	8	16	32

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4 เรื่องการเขียนลำดับแบบแจกพจน์

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาการเขียนลำดับแบบแจกพจน์ในข้อ 1 – 2 แล้วพิจารณา
ข้อ 3 – 12 พร้อมทั้งเติมคำตอบให้ถูกต้อง

ข้อที่	a_n (พจน์ ทั่วไป)	a_1 (พจน์ที่ 1)	a_2 (พจน์ที่ 2)	a_3 (พจน์ที่ 3)	สามพจน์ แรกของ ลำดับ
1	$3n + 1$	$3(1) + 1 = 4$	$3(2) + 1 = 7$	$3(3) + 1 = 10$	4, 7, 10
2	$8n - 3$	$8(1) - 3 = 5$	$8(2) - 3 = 13$	$8(3) - 3 = 21$	5, 13, 21
3	$2n^2 - 1$	$2(1)^2 - 1 = 1$	$2(2)^2 - 1 = 7$	$2(3)^2 - 1 = 17$	1, 7, 17
4	$n^2 + 2$	$1^2 + 2 = 3$	$2^2 + 2 = 6$	$3^2 + 2 = 11$	3, 6, 11
5	$(n + 1)^2$	$(1 + 1)^2 = 4$	$(2 + 1)^2 = 9$	$(3 + 1)^2 = 16$	4, 9, 16
6	$2 - 3n$	$2 - 3(1) = -1$	$2 - 3(2) = -4$	$2 - 3(3) = -7$	-1, -4, -7
7	$n(n + 1)$	$1(1 + 1) = 2$	$2(2 + 1) = 6$	$3(3 + 1) = 12$	2, 6, 12
8	$5n - 3$	$5(1) - 3 = 2$	$5(2) - 3 = 7$	$5(3) - 3 = 12$	2, 7, 12
9	$\frac{n(n + 1)}{2}$	$\frac{1(1 + 1)}{2} = 1$	$\frac{2(2 + 1)}{2} = 3$	$\frac{2(3 + 1)}{2} = 4$	1, 3, 4
10	$-4n + 1$	$-4(1) + 1 = -3$	$-4(2) + 1 = -7$	$-4(3) + 1 = -11$	-3, -7, -11
11	$-5n - 2$	$-5(1) - 2 = -7$	$-5(2) - 2 = -12$	$-5(3) - 2 = -17$	-7, -12, -17
12	$3n - 5$	$3(1) - 5 = -2$	$3(2) - 5 = 1$	$3(3) - 5 = 4$	-2, 1, 4

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5

เรื่อง การเขียนลำดับตามที่โจทย์กำหนด

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนลำดับตามที่โจทย์กำหนดให้ต่อไปนี้

1. จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้ $a_n = (-1)^n n(n+1)$

วิธีทำ จาก $a_n = (-1)^n n(n+1)$

$$\text{จะได้ } a_1 = (-1)^1 1(1+1) = -2$$

$$a_2 = (-1)^2 2(2+1) = 6$$

$$a_3 = (-1)^3 3(3+1) = -12$$

$$a_4 = (-1)^4 4(4+1) = 20$$

ดังนั้น 4 พจน์แรกคือ $-2, 6, -12, 20, -30$

2. กำหนดลำดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ และ $b_n = \frac{1}{2n}$ จงหาค่าของ $a_2 + b_2$

วิธีทำ กำหนดลำดับ $a_n = \frac{n}{n+1}$ และ $b_n = \frac{1}{2n}$

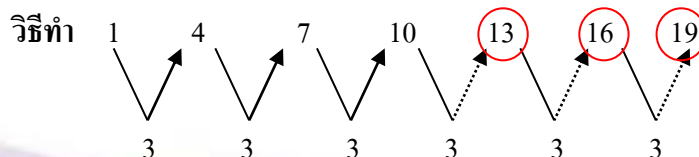
$$\text{แทนค่า } n = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{แทนค่า } n = 2, \quad b_2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } a_2 + b_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$$

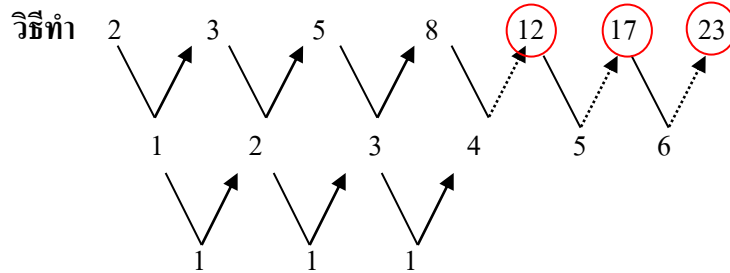
3. จงหาพจน์ถัดไปสามพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

3.1 $1, 4, 7, 10, \dots$



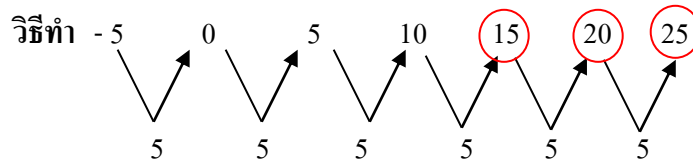
ผลต่างเป็น 3 ดังนั้น พจน์ถัดไป 3 พจน์คือ 13, 16, 19

3.2 2, 3, 5, 8, ...



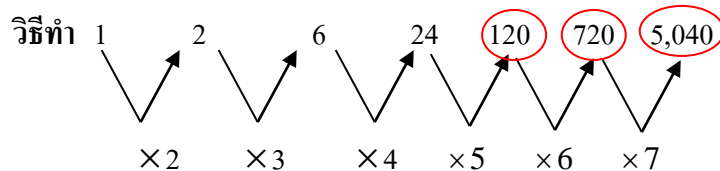
ผลต่างเพิ่มขึ้น ดังนั้น พจน์ถัดไป 3 พจน์คือ 12, 17, 23

3.3 - 5, 0, 5, 10, ...



ผลต่างเป็น 5 ดังนั้น พจน์ถัดไป 3 พจน์คือ 15, 20, 25

3.4 1, 2, 6, 24, ...



ดังนั้น พจน์ถัดไป 3 พจน์คือ 120, 720, 5,040

4. กำหนดลำดับ $a_n = (-1)^{n+1} n^2$ จงเขียน 4 พจน์แรก

วิธีทำ กำหนดลำดับ $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2$

$$a_1 = (-1)^2 \cdot 1 = 1$$

$$a_2 = (-1)^3 \cdot 4 = -4$$

$$a_3 = (-1)^4 \cdot 9 = 9$$

$$a_4 = (-1)^5 \cdot 16 = -16$$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ $1, -4, 9, -16$

5. กำหนดลำดับที่มี $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - 3$ จงเขียน 4 พจน์แรก

วิธีทำ กำหนดลำดับที่มี $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n - 3$

จะได้ $a_2 = 3 - 3 = 0$

$$a_3 = 0 - 3 = -3$$

$$a_4 = -3 - 3 = -6$$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ $3, 0, -3, -6$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6
เรื่อง การเขียนลำดับในรูปแจนจน์และพจน์ทั่วไป

1.

1.1) 2, 5, 8, ...

วิธีทำ $y = 3x - 1, x \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$x = 1, y = 3(1) - 1 = 2$$

$$x = 2, y = 3(2) - 1 = 5$$

$$x = 3, y = 3(3) - 1 = 8$$

ดังนั้นลำดับคือ 2, 5, 8, ...

1.2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

วิธีทำ $y = \frac{1}{3^x}, x \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$x = 1, y = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$x = 2, y = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$x = 3, y = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$x = 4, y = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

ดังนั้นลำดับคือ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

1.3) 4, 4, 4, ...

1.4) $\sin \pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi, \dots$

2.

2.1) $2, 5, 10, 17$

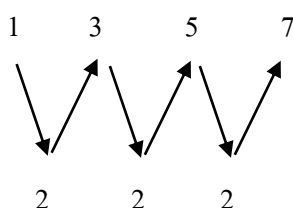
2.2) $-3, 9, -27, 81$

2.3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

3.

3.1) $1, 3, 5, 7, \dots$

วิธีทำ 1) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ $1, 3, 5, 7, \dots$



พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะมากกว่าพจน์ที่มาก่อนอยู่ 2

พิจารณาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้

พจน์ที่ (1)	(2)	(3)	(4)
1	3	5	7
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$2-1$	$4-1$	$6-1$	$8-1$

หรือ $(2 \times 1) - 1$ $(2 \times 2) - 1$ $(2 \times 3) - 1$ $(2 \times 4) - 1$

จะได้พจน์ทั่วไปหรือ $a_n = 2n - 1$

3.2) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์และลำดับที่ของแต่ละพจน์

$1, 4, 9, 16, 25$ ดังนี้

พจน์ที่ 1	1	=	1^2
พจน์ที่ 2	4	=	2^2
พจน์ที่ 3	9	=	3^2
พจน์ที่ 4	16	=	4^2
\vdots			\vdots
พจน์ที่ n หรือ a_n		=	n^2

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = n^2$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

3.3) 1, 8, 27, 64, ...

วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์และลำดับที่ของแต่ละพจน์

1, 8, 27, 64, 125 ดังนี้

$$\text{พจน์ที่ } 1 \quad 1 = 1^3$$

$$\text{พจน์ที่ } 2 \quad 8 = 2^3$$

$$\text{พจน์ที่ } 3 \quad 27 = 3^3$$

$$\text{พจน์ที่ } 4 \quad 64 = 4^3$$

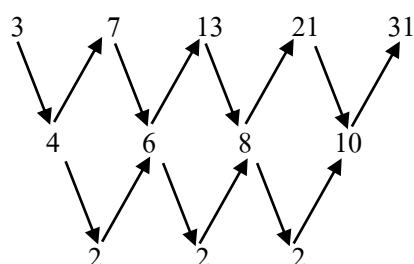
$$\vdots \quad \vdots$$

$$\text{พจน์ที่ } n \text{ หรือ } a_n = n^3$$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = n^3$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

3.4) 3, 7, 13, 21, 31, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



ผลต่างครั้งที่ 1

ผลต่างครั้งที่ 2

จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

แทน n ในพจน์ทั่วไปด้วย 1, 2, 3 และ 4

$$\text{จะได้ } a_1 = 3 = a + b + c \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$a_2 = 7 = 4a + 2b + c \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$a_3 = 13 = 9a + 3b + c \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$a_4 = 21 = 16a + 4b + c \quad \dots\dots\dots(4)$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหา a, b และ c ได้ดังนี้

$$(2) - (1) \quad 4 = 3a + b \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$(3) - (2) \quad 6 = 5a + b \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$(6) - (5) \quad 2 = 2a \quad \text{หรือ} \quad a = 1$$

แทน $a = 1$ ใน (5) จะได้ $b = 1$

แทน $a = 1$ และ $b = 1$ ใน (1) จะได้ $c = 1$

เมื่อแทน n ด้วย 1, 2, 3 และ 4 จะได้ a_1, a_2, a_3 และ a_4 เท่ากับค่าที่

กำหนดให้และ $a_n = n^2 + n + 1$

แสดงว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

3.5) $-1, 2, -3, 4, -5$

วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์และลำดับที่ของแต่ละพจน์

$-1, 2, -3, 4, -5$ ดังนี้

$$\text{พจน์ที่ } 1 \quad -1 = (-1)^1 \times 1$$

$$\text{พจน์ที่ } 2 \quad 2 = (-1)^2 \times 2$$

$$\text{พจน์ที่ } 3 \quad -3 = (-1)^3 \times 3$$

$$\text{พจน์ที่ } 4 \quad 4 = (-1)^4 \times 4$$

$$\text{พจน์ที่ } 5 \quad -5 = (-1)^5 \times 5$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\text{พจน์ที่ } n \text{ หรือ } a_n = (-1)^n \times n$$

$$3.6) a_n = \frac{n}{n+1}$$

วิธีทำ พิจารณาจาก ลำดับจำกัด $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$

พจน์ที่ 1 เศษเท่ากับ 1 ส่วนเท่ากับ 2

พจน์ที่ 2 เศษเท่ากับ 2 ส่วนเท่ากับ 3

พจน์ที่ 3 เศษเท่ากับ 3 ส่วนเท่ากับ 4

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

พจน์ที่ n เศษเท่ากับ n ส่วนเท่ากับ $n+1$

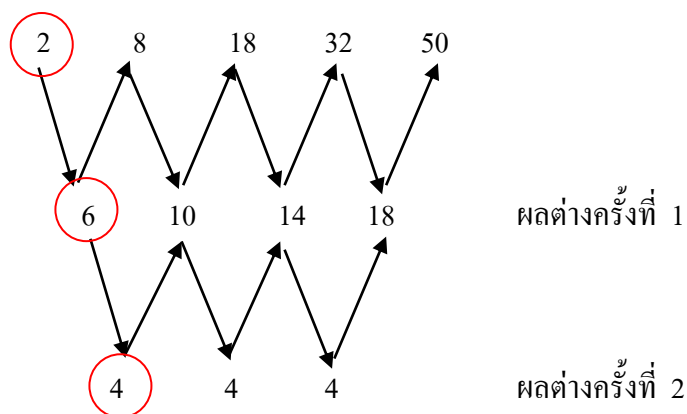
$$\text{ดังนั้น พจน์ที่ } n \text{ หรือ } a_n = \frac{n}{n+1}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 7

เรื่อง การหาพจน์ทั่วไปของลำดับกรณีผลต่างสองชั้น

1. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 8, 18, 32, 50,...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



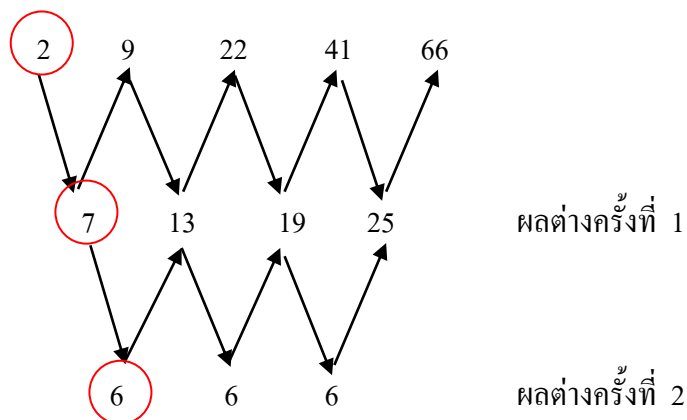
จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 4

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + \frac{(n-1) d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2) d_2}{2} \\
 a_n &= 2 + \frac{(n-1) 6}{1} + \frac{(n-1)(n-2) 4}{2} \\
 a_n &= 2 + 6n - 6 + 2n^2 - 6n + 4 \\
 a_n &= 2n^2
 \end{aligned}$$

ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับ $a_n = 2n^2$

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 9, 22, 41, 66,...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 6

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

$$a_n = 2 + \frac{(n-1)7}{1} + \frac{(n-1)(n-2)6}{2}$$

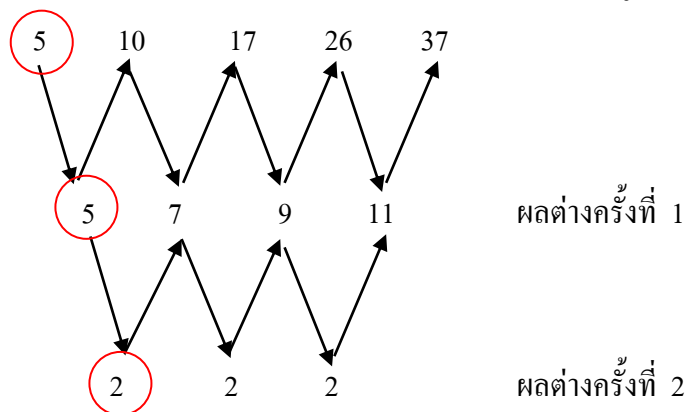
$$a_n = 2 + 7n - 7 + 3n^2 - 9n + 6$$

$$a_n = 3n^2 - 2n + 1$$

ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับ $a_n = 3n^2 - 2n + 1$

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 5, 10, 17, 26, 37,...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 2

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

$$a_n = 5 + \frac{(n-1)5}{1} + \frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$

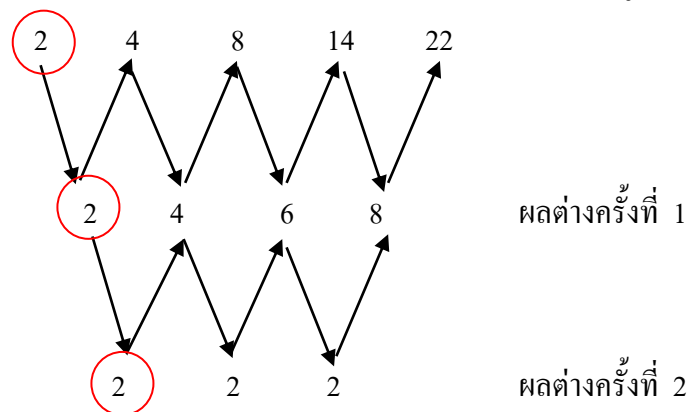
$$a_n = 5 + 5n - 5 + n^2 - 3n + 2$$

$$a_n = n^2 + 2n + 2$$

ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับ $a_n = n^2 + 2n + 2$

4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 2, 4, 8, 14, 22,...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ หาผลต่างระหว่างสองพจน์ที่อยู่ติดกัน ได้ดังนี้



จะเห็นว่า ผลต่างครั้งที่สองคงที่ และมีค่าเท่ากับ 2

$$a_n = a_1 + \frac{(n-1)d_1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)d_2}{2}$$

$$a_n = 2 + \frac{(n-1)2}{1} + \frac{(n-1)(n-2)2}{2}$$

$$a_n = 2 + 2n - 2 + n^2 - 3n + 2$$

$$a_n = n^2 - n + 2$$

ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับ $a_n = n^2 - n + 2$



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 ลำดับ



1. ค

2. ง

3. ก

4. ข

5. ข

6. ก

7. ข

8. ค

9. ค

10. ง