

**การพัฒนาชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือ
โดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM**

เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32201)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชุดที่ 11

การหาระยะทางและความสูง

นางสาวจุฬารัตน์ ทองอร่าม

โรงเรียนมหานະชัยวิทยา

อำเภอมหานະชัย จังหวัดยโสธร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 28

$$x = \frac{\sqrt{5-1}}{2}$$



ชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง จัดทำขึ้นตามตัวชี้วัดและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 เพื่อให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะการคิด สามารถนำความรู้คณิตศาสตร์ เรื่อง การหาระยะทางและความสูง ไปใช้แก้ปัญหาโจทย์ในสถานการณ์ต่างๆและพัฒนาไปสู่ทักษะการคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียน จุดเด่นของชุดการเรียนรู้เล่มนี้คือมีการนำโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM เป็นเรื่องที่ใกล้ตัวของนักเรียน ผู้เรียนนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตจริง นักเรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการเรียนรู้มากกว่าการสอนแบบวิธีการบรรยาย นักเรียนสามารถแลกเปลี่ยนความรู้ช่วยเหลือกันระหว่างสมาชิกภายในกลุ่ม หรือคำแนะนำจากครู นักเรียนจะมีการตรวจผลการทำงานให้กันและกัน ทำให้นักเรียนเกิดความสนใจ ไม่เบื่อหน่ายในการศึกษาค้นคว้า ส่งผลให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ ทักษะทางคณิตศาสตร์ นำไปสู่การเสริมสร้างทักษะการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32201 หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ เพื่อประยุกต์ใช้ในการพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียนได้อย่างเหมาะสม ขอขอบคุณ ผู้อำนวยการโรงเรียน คณะครู นักเรียนโรงเรียนมหานະชัยวิทยา อําเภอมหาชนะชัย จังหวัดยโสธร ผู้เชี่ยวชาญที่ช่วยให้คำปรึกษา ให้ข้อชี้แนะ จนทำให้ชุดการเรียนรู้เล่มนี้สำเร็จและเป็นประโยชน์อย่างยิ่งสำหรับนักเรียน และครูผู้สอนนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 หากมีข้อบกพร่องประการใด ขอได้โปรดแจ้งให้ผู้จัดทำทราบด้วย เพื่อจะได้เป็นแนวทางในการแก้ไขปรับปรุงให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นต่อไป

จุฬารัตน์ ทองอร่าม
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ชำนาญการ



สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำชี้แจง	ค
ผลการเรียนรู้	ง
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
ใบความรู้	5
ใบงานที่ 11.1	17
ใบงานที่ 11.2	27
แบบทดสอบหลังเรียน	14
แบบทดสอบหลังเรียน	30
บรรณานุกรม	34
ภาคผนวก	
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	35
เฉลยใบงานที่ 11.1	36
เฉลยใบงานที่ 11.1	45
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	50

คำชี้แจง



ชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง ประกอบด้วยเนื้อหา ดังนี้

1. การหาระยะทางและความสูง

ชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM ชุดที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูงนี้ ใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอน จำนวน 4 คาบ ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ
2. ศึกษาเนื้อหา และตัวอย่าง เรื่อง การหาระยะทางและความสูง
3. นักเรียนแบ่งกลุ่มและครูใช้การถามตอบประกอบการอธิบายเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจเนื้อหา
4. เมื่อนักเรียนทำใบงานรายบุคคลด้วยตนเองเสร็จเรียบร้อยแล้ว สมาชิกในกลุ่ม ช่วยกันตรวจคำตอบ ถ้าตอบไม่ถูกสมาชิกในกลุ่มจะต้องร่วมมือกันแก้ไขข้อบกพร่อง โดยศึกษาใบงานนั้นใหม่ แล้วให้เพื่อน ในกลุ่มที่ตอบถูกเป็นผู้อธิบายหรือครูเป็นผู้ชี้แนะข้อบกพร่อง
5. นักเรียนและครูร่วมกันสรุปสิ่งที่เรียนในชั่วโมง
6. นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 10 ข้อ
7. สมาชิกในกลุ่มตรวจให้คะแนน
8. หลังจากเรียนจบในแต่ละชุดการเรียนรู้ นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้นี้จะบันทึกเป็นคะแนนรายบุคคล แล้วนำคะแนนรายบุคคลนี้มาเฉลี่ยเป็นคะแนนของกลุ่ม



ผลการเรียนรู้



ชุดการเรียนรู้ร่วมกับวิธีการเรียนแบบร่วมมือโดยใช้เทคนิค TAI ที่เน้นโจทย์ปัญหาตามแนวคิด STEM เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง มีผลการเรียนรู้ดังนี้

ด้านความรู้

นักเรียนสามารถ นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการประยุกต์ ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทาง ความสูง และการวัดได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

นักเรียนมีความสามารถในการ ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม เพื่อฝึกทักษะการคิดรวบยอด การให้เหตุผล การแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์

นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต วินัย สนใจใฝ่รู้ และมีความมุ่งมั่นในการทำงาน



แบบทดสอบก่อนเรียน
ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง

คำชี้แจง



1. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำ 15 นาที
2. ห้ามนักเรียนเขียนข้อความหรือทำเครื่องหมายใดๆ ลงบนแบบทดสอบ
3. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก
4. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวด้วยการทำเครื่องหมายกากบาท (X)

ในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

ข้อ	99	1	2	3	4
		(X)	()	()	()

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ ให้ทำดังนี้

ข้อ	99	1	2	3	4
		(X)	()	()	(X)

5. เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้ส่งกระดาษคำตอบที่ครูผู้สอน จากนั้นสลับกลุ่มกัน เพื่อทำการตรวจและบันทึกคะแนน

1) ปรกรณ์อยู่บนพื้นดินมองขึ้นไปบนหอนาฬิกาเป็นมุมเงย 28° กับแนวระดับสายตา ถ้าปรกรณ์ยืนอยู่ห่างจากหอนาฬิกา 30 เมตร แล้วหอนาฬิกามีความสูงเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 28^\circ \approx 0.496$, $\cos 28^\circ \approx 0.883$, $\tan 28^\circ \approx 0.532$)

1. 15.96 เมตร
2. 18.07 เมตร
3. 26.49 เมตร
4. 56.40 เมตร

2) ไบบัวยืนอยู่บนประภาคารแห่งหนึ่งสูง 90 เมตรจากระดับน้ำทะเล ถ้าไบบัวมองลงไปในทะเลมองเห็นเรือสองลำจอดอยู่ในแนวเดียวกัน ทำมุมก้ม 25° และ 38° ตามลำดับ แล้วเรือทั้งสองลำนี้อยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 25^\circ \approx 0.423$, $\cos 25^\circ \approx 0.906$, $\tan 25^\circ \approx 0.466$ และ $\sin 38^\circ \approx 0.616$, $\cos 38^\circ \approx 0.788$, $\tan 38^\circ \approx 0.781$)

1. 52 เมตร
2. 78 เมตร
3. 115 เมตร
4. 193 เมตร

3) จากหน้าผาซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 100 เมตร มุมก้มของเรือ 2 ลำ ในทะเลเป็น 45° และ 30° ตามลำดับ จงหาระยะทางระหว่างเรือทั้งสอง

1. $50(\sqrt{3}-1)$ เมตร
2. $100(\sqrt{3}-1)$ เมตร
3. $50(\sqrt{3}+1)$ เมตร
4. $100(\sqrt{3}+1)$ เมตร

4) เรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเล ชายคนหนึ่งอยู่บนฝั่งห่างจากเรือทั้งสองลำ เป็นระยะทาง 100 เมตร และ 200 เมตร ตามลำดับ ถ้ามุมระหว่างเส้นตรงซึ่งเป็นแนวสังเกตที่เขาเฝ้าดูเรือทั้งสองลำเท่ากับ 30° จงหาระยะทางระหว่างเรือทั้งสองลำ

1. $50(5-2\sqrt{3})$ เมตร
2. $100(5\sqrt{3}-2)$ เมตร
3. $50(\sqrt{5-2\sqrt{3}})$ เมตร
4. $100(\sqrt{5-2\sqrt{3}})$ เมตร

5. มานะยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่ง 18 เมตร มองเห็นยอดตึกและเสาจานดาวเทียมรับโทรทัศน์ ซึ่งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาจานดาวเทียมรับโทรทัศน์

1. 30.23 เมตร
2. 20.78 เมตร
3. 14.78 เมตร
4. 10.56 เมตร

6. ชายคนหนึ่ง ยืนอยู่ห่างจากตึก 20 เมตร มองเห็นเสาธงซึ่งปักอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 45° และปลายเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเสาธง (ไม่คิดความสูงของผู้สังเกต)

1. 30.78 เมตร
2. 25.82 เมตร
3. 14.64 เมตร
4. 10.86 เมตร

7. อาทิตยต์ตั้งกล้องส่องทางไกลสูงจากพื้นดิน 2 เมตร ถากล้องอยู่ห่างจากผนังตึก 60 เมตร และเมื่อมองไปที่ยอดตึกเป็นมุม 45° แล้วตึกนี้มีความสูงเท่าใด

1. 32 เมตร
2. 60 เมตร
3. 62 เมตร
4. $30\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมตร

8. ไออุ่น มองเห็นว่าตัวหนึ่งลอยอยู่บนท้องฟ้าแนวเดียวกับพื้นดินทำมุมเงย 50° ถ้าสายป่านยาว 120 เมตร แล้วว่าวอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

1. 91.92 เมตร
2. 120.4 เมตร
3. 136.8 เมตร
4. 142.3 เมตร

9. อาวิเวียนอยู่บนดาดฟ้าตึกซึ่งสูง 45 เมตร มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งที่จอดอยู่บนลานจอดรถ ซึ่งอยู่แนวเดียวกับตึกทำมุมก้ม 60° แล้วรถยนต์คันนี้จอดอยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด

1. $45\sqrt{3}$ เมตร
2. $45\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมตร
3. $15\sqrt{3}$ เมตร
4. $15\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมตร

10. ยูกาซาดคนหนึ่งโยงเชือกจากเสาธงสูง 12 เมตร ถ้าดึงเชือกให้ตึงแล้วนำมาผูกกับหลักกลางสนาม ปรากฏว่าเชือกทำมุมเงย 50° กับเสาธง แล้วเชือกเชิฐงมีความยาวเท่ากับเท่าไร (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

1. 5.72 เมตร
2. 9.48 เมตร
3. 11.56 เมตร
4. 15.66 เมตร

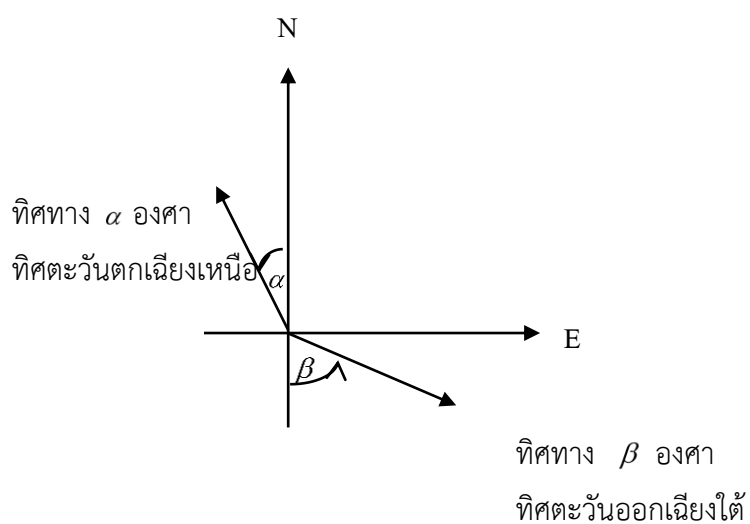


ตั้งใจทำข้อสอบนะคะ
ทุกคน 10 ข้อเอง

ใบความรู้ที่ 11

มุมยกขึ้นหรือมุมเงยและมุมกดลงหรือมุมก้ม เป็นการวัดมุมโดยมีด้านเริ่มต้น ของมุมอยู่ที่ระดับสายตา (แนวนอน) ไปยังเส้นที่เกิดจากสายตามองไปยังวัตถุ โดยที่

1. ถ้าวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับสายตา เรียกว่า มุมเงย (Angle of Elevation)
2. ถ้าวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา เรียกว่า มุมก้ม (Angle of Depression)





กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ตัวอย่าง กำหนด $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 40$ และ $c = 60$ จงหา a

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$= 40^2 + 60^2 - 2(40)(60)\cos 60^\circ$$

$$= 1,600 + 3,600 - 2(2,400)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2,800$$

ดังนั้น $a = 20\sqrt{7}$

$$= 52.915$$

สรุปการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

จาก $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

จะได้

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

หาขนาดของ A จากเครื่องคำนวณ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ จะได้ } a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$



$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2}bc \sin A \\
 \text{จากตัวอย่างข้างต้น} &= \frac{1}{2}(40)(60)\sin 60^\circ \\
 &= (20)(60)(0.866) \\
 &= 2,078.46
 \end{aligned}$$



กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ตัวอย่าง กำหนด $\hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ และ $b = 20$ จงหา c และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม A

ของไซน์ $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$45^\circ + \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 75^\circ$$

แทนค่าจะได้ $\frac{\sin 75^\circ}{20} = \frac{\sin 60^\circ}{c}$

$$c = \frac{20 \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$c = \frac{20 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{10\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= 10\sqrt{6}(\sqrt{3}-1) \quad \dots (\sqrt{6} = 2.449, \sqrt{3} = 1.732)$$

$$= 17.93$$

กลับบ้านไปเราจะ
ทบทวนอีกรอบ

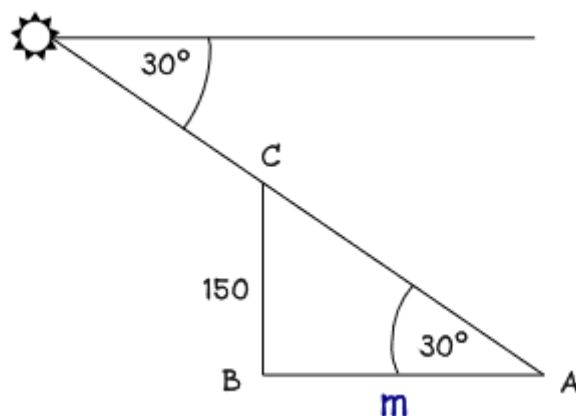


ตัวอย่างที่ 1

ตึกหลังหนึ่งสูง 100 เมตร ถ้าวางอาทิตยทำมุม 30° กับแนวระนาบ แล้วเงาของตึกจะทอดยาวเท่าใด

วิธีทำ

วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



เสาสูง 150 เมตร หรือ $BC = 150$ เมตร และดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบ

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



เงาของตึกทอดยาวเท่าใด หรือ $m = ?$ หรือ $AB = ?$

วิธีการแก้ปัญหา (D) กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ไต ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา



ให้ความยาวของเงาเป็น m เมตร BC เป็นความสูงของตึกเท่ากับ 150 เมตร

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{150} = \frac{\sin 60^\circ}{m}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{150} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{m}$$

$$m = 150\sqrt{3}$$

$$m \approx 150 \times 1.732$$

$$m \approx 259.80$$

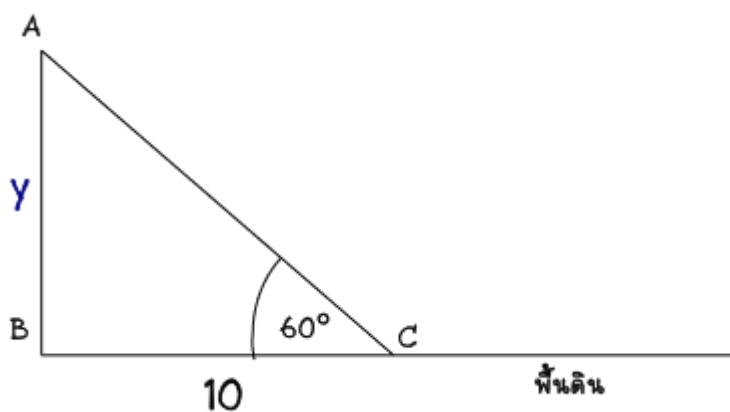
คำตอบที่ได้ → เงามงตีกทอดยาวประมาณ 259.80 เมตร



ตัวอย่างที่ 2

บันไดพาดกับกำแพงโดยให้ปลายบันไดจรดขอบกำแพงพอดี โดยบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 10 เมตร บันไดทำมุมกับพื้นดิน 60° จงหาว่ากำแพงสูงจากพื้นเท่าใด

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



บันไดอยู่ห่างจาก กำแพง 10 เมตร บันไดทำมุมกับพื้นดิน 60°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



กำแพงสูงจากพื้นเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) → กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ไต ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

ให้ความสูงของกำแพงเป็น y เมตร BC เป็นระยะทางระหว่างบันไดกับ
กำแพง เท่ากับ 10 เมตร จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{10} = \frac{\sin 60^\circ}{y}$$

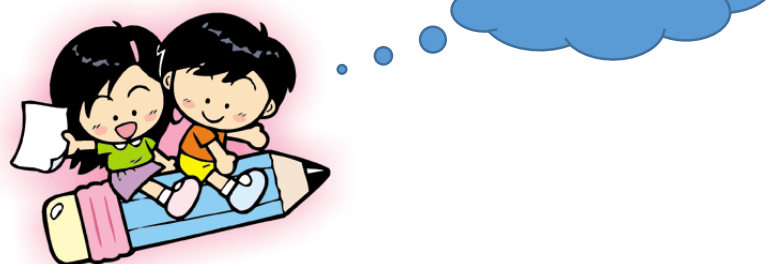
$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{y}$$

$$m = 10\sqrt{3}$$

$$m \approx 10 \times 1.732$$

$$m \approx 17.32$$

คำตอบที่ได้ $\rightarrow$ เงามงติกทอดยาวประมาณ 17.32 เมตร

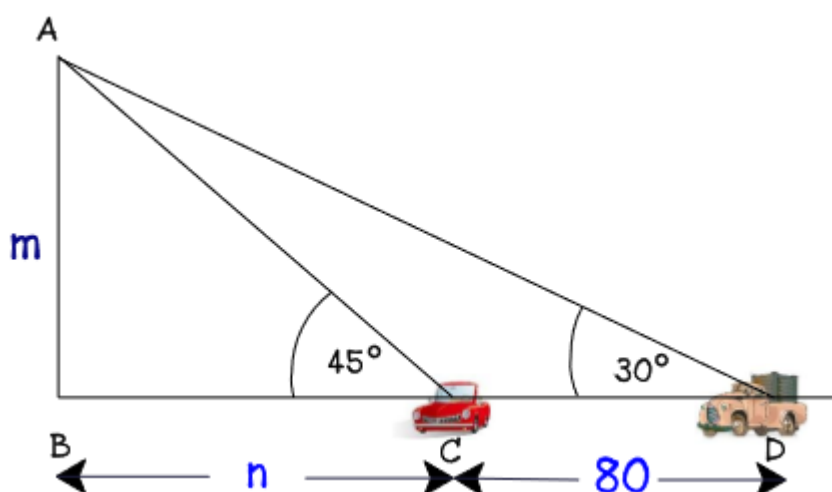


ตัวอย่างที่ 3 รถสองคันจอดอยู่ในแนวเส้นตรงกับตึกหลังหนึ่ง ถ้ารถทั้งสองคันจอดห่างกัน 80 เมตร และคนในรถแต่ละคันมองเห็นยอดตึกเป็นมุม 45° และ 30° ตามลำดับ

จงหาว่า 1) รถคันที่จอดอยู่ไกลกว่า อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่าใด

2) ตึกสูงเท่าใด

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



รถทั้งสองคันจอดห่างกัน 80 เมตร และคนในรถแต่ละคันมองเห็นยอดตึกเป็นมุม 45° และ 30°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



- 1) รถคันที่จอดอยู่ไกลกว่า อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่าใด
- 2) ตึกสูงเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D)  1) หาความยาวของด้านที่ต้องการโดยแยกคิดเป็น สามเหลี่ยมมุมฉากสอง รูป คือ $\triangle ABC$ และ $\triangle ABD$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

พิจารณา $\triangle ABC$

จาก $AB = m$ และ $BC = n$

$$\frac{\sin A}{n} = \frac{\sin C}{m}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{n} = \frac{\sin 45^\circ}{m}$$

$$n = m \quad \dots\dots\dots (1)$$

พิจารณา

$\triangle ABD$

จาก $AB = m$ และ $BD = n + 80$

$$\frac{\sin 60^\circ}{n + 80} = \frac{\sin 30^\circ}{m}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{n + 80} = \frac{\sin 30^\circ}{m}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{n + 80} = \frac{\frac{1}{2}}{m}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} m = \frac{1}{2} (n + 80)$$

$$m = \frac{n + 80}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

(1) = (2) ,

$$n = \frac{n + 80}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}n = n + 80$$

$$\sqrt{3}n - n = 80$$

$$(\sqrt{3} - 1)n = 80$$

$$n = \frac{80}{(\sqrt{3} - 1)}$$

แทนค่า

$n = \frac{80}{(\sqrt{3} - 1)}$ ในสมการที่ (1) จะได้

$$m = \frac{80}{(\sqrt{3} - 1)}$$

จาก $BD = n + 80$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 BD &= \frac{80}{(\sqrt{3}-1)} + 80 \\
 &= 80 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right) \\
 &= 80 \left(\frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt{3}-1} \right) \\
 &= 80 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right) \\
 &= \left(\frac{80\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right) \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \right) \\
 &= \frac{(80)3 + 80\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1} \\
 &= \frac{240 + 80\sqrt{3}}{2} \\
 &= 120 + 40\sqrt{3} \\
 &= 40(3 + \sqrt{3})
 \end{aligned}$$

คำตอบที่ได้ → รถคันที่จอดอยู่ไกลกว่า อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทาง $40(3 + \sqrt{3})$ เมตร
 และตึกสูง $\frac{80}{(\sqrt{3}-1)}$ เมตร

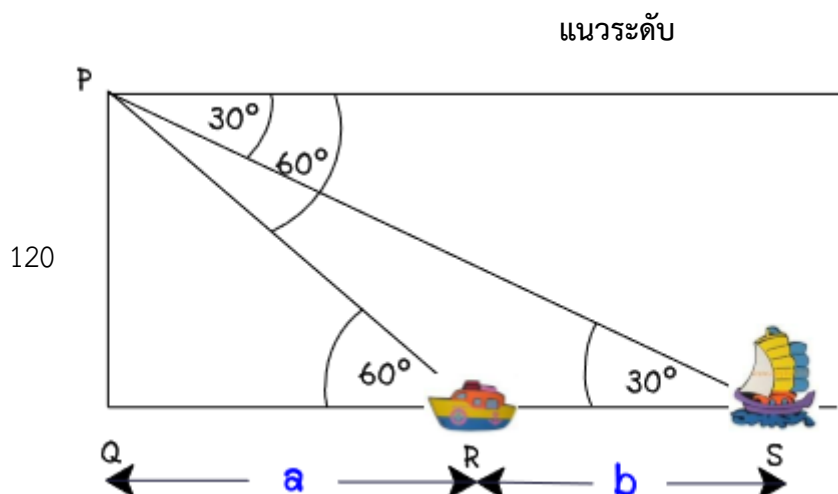




ตัวอย่างที่ 4 ไออุ่นยืนอยู่บนยอดประภาคารสูง 120 เมตร จากระดับน้ำทะเล ถ้าออกไปที่เรือ 2 ลำ ในทะเลที่อยู่ในแนวเดียวกันกับประภาคาร พบว่าเป็นมุมก้ม 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาว่าเรือทั้ง 2 ลำอยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่าใด

วิธีทำ

วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



ประภาคารสูง 120 เมตร จากระดับน้ำทะเล และมองเห็นเรือสองลำ เป็นมุม 30° และ 60° ตามลำดับ

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



เรือสองลำอยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่าไร

วิธีการแก้ปัญหา (D)



- 1) หาความยาวของด้านที่ต้องการโดยแยกคิดเป็น สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป คือ $\triangle PQR$ และ $\triangle PQS$
- 2) กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

พิจารณา $\triangle PQR$

จาก $PQ = 120$ และ $QR = a$

$$\text{จะได้ } \frac{\sin(R)}{r} = \frac{\sin(P)}{a}$$

$$\frac{\sin(60^\circ)}{120} = \frac{\sin(30^\circ)}{a}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{120} = \frac{\frac{1}{2}}{a}$$

$$a = \frac{120}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots (1)$$

พิจารณา $\triangle PQS$ และจาก $PS = a + b$

$$\tan(30^\circ) = \frac{PQ}{PS}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{120}{a+b}$$

$$a+b = 120\sqrt{3}$$

แทนค่า $a = \frac{120}{\sqrt{3}}$ จะได้ว่า

$$\frac{120}{\sqrt{3}} + b = 120\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= 120\sqrt{3} - \frac{120}{\sqrt{3}} \\ &= 120\sqrt{3} - \left(\frac{120}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= 120\sqrt{3} - \left(\frac{120\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(120\sqrt{3} \times \frac{3}{3} \right) - \left(\frac{120\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

$$= 120 \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 120 \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 120 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= 80\sqrt{3}$$

คำตอบที่ได้ → เรือสองลำห่างกัน $80\sqrt{3}$ เมตร

นักเรียนศึกษาไปความรู้
แล้ว ทำใบงานต่อกันเลย
นะค่ะ....





ใบงานที่ 11.1 การหาระยะทางและความสูง



คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำการหาคำตอบตามขั้นตอนกระบวนการ

1. อารีต้องการวัดส่วนกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด P แล้วมองข้ามไปที่จุด Q ซึ่งอยู่ตรงข้าม ซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุด เมื่อเขาเดินเลียบฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 120 เมตร ก็หยุดที่จุด R วัดมุม PRQ ได้ 50° จงหาความกว้างของแม่น้ำ (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)

.....

.....

.....

วิธีการแก้ปัญหา (D)

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้นตอนการแก้ปัญหา ➡

[illegible]

คำตอบที่ได้ ➡

ทำข้อต่อไป
เลยดีกว่า



ทำต่อไป
เลยดีกว่า

2. ทิวลิปนำบันไดยาว 50 ฟุต พาดเข้ากับกำแพงให้ปลายบนของบันไดอยู่ชิดกับขอบบน ของกำแพงพอดี เขาสังเกตเห็นว่าบันไดทำมุม 60° กับพื้นราบ จงหาว่ากำแพงสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) 

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) 

.....

.....

.....

วิธีการแก้ปัญหา (D) 

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้นตอนการแก้ปัญหา 

.....

.....

.....

3. ออมสินยืนอยู่บนยอดตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 10 เมตร มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งเป็นมุมก้ม 30°

จงหา

1) รถยนต์อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่าใด

2) ออมสินอยู่ห่างจากรถยนต์เป็นระยะทางเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ

วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) 

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) 

.....

.....

.....

วิธีการแก้ปัญหา (D) 

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

[illegible]

คำตอบที่ได้



ทำข้อต่อไป
เลยดีกว่า



ทำต่อไป
เลยดีกว่า

4. เสาธงปักตั้งฉากอยู่บนอาคารเรียนหลังหนึ่ง ฟ้าใสนั่งอยู่บนสนามห่างจากอาคารเรียน ออกไป 30 เมตร มองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30° และยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาว่าเสาธงสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) 

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) 

.....

.....

.....

วิธีการแก้ปัญหา (D) 

.....

.....

.....

.....

.....



ฉันทำได้

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

[illegible]

คำตอบที่ได้



.....

.....

.....

5. เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 60 เมตร จุหลินยืนอยู่ที่จุด ๆ หนึ่งระหว่างเสาไฟฟ้าทั้งสอง และอยู่บนแนวเส้นตรงที่ลากผ่านโคนเสา สังเกตเห็นยอดเสาไฟฟ้า ทั้งสองเป็นมุมเงย 30° และ 60° จงหาว่าเสาไฟฟ้าทั้งสองสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) 

.....

.....

.....

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) 

.....

.....

.....

วิธีการแก้ปัญหา (D) 

.....

.....

.....

.....

.....



ฉันทำได้

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, resembling notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

คำตอบที่ได้



ฉันทำได้

[illegible]

แบบทดสอบหลังเรียน
ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 11 เรื่อง การหาระยะทางและความสูง

คำชี้แจง



1. แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำ 15 นาที
2. ห้ามนักเรียนเขียนข้อความหรือทำเครื่องหมายใดๆ ลงบนแบบทดสอบ
3. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก
4. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวด้วยการทำเครื่องหมายกากบาท (X)

ในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

ข้อ	99	1	2	3	4
		(X)	()	()	()

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบ ให้ทำดังนี้

ข้อ	99	1	2	3	4
		(X)	()	()	(X)

5. เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้ส่งกระดาษคำตอบที่ครูผู้สอน จากนั้นสลับกลุ่มกัน เพื่อทำการตรวจและบันทึกคะแนน

1) ออมสินอยู่บนพื้นดินมองขึ้นไปบนหอนาฬิกาเป็นมุมเงย 28° กับแนวระดับสายตา ถ้าอมสินยืนอยู่ห่างจากหอนาฬิกา 30 เมตร แล้วหอนาฬิกามีความสูงเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 28^\circ \approx 0.496$, $\cos 28^\circ \approx 0.883$, $\tan 28^\circ \approx 0.532$)

1. 15.96 เมตร
2. 18.07 เมตร
3. 26.49 เมตร
4. 56.40 เมตร

2) อารีย์อยู่บนอาคารแห่งหนึ่งสูง 90 เมตรจากระดับน้ำทะเล ถ้าไบบัวมองลงไปในทะเลมองเห็นเรือสองลำจอดอยู่ในแนวเดียวกัน ทำมุมก้ม 25° และ 38° ตามลำดับ แล้วเรือทั้งสองลำนี้อยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 25^\circ \approx 0.423$, $\cos 25^\circ \approx 0.906$, $\tan 25^\circ \approx 0.466$ และ $\sin 38^\circ \approx 0.616$, $\cos 38^\circ \approx 0.788$, $\tan 38^\circ \approx 0.781$)

1. 52 เมตร
2. 78 เมตร
3. 115 เมตร
4. 193 เมตร

3) จากหน้าผาซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 100 เมตร มุมก้มของเรือ 2 ลำ ในทะเลเป็น 45° และ 30° ตามลำดับ จงหาระยะทางระหว่างเรือทั้งสอง

1. $50(\sqrt{3}-1)$ เมตร
2. $100(\sqrt{3}-1)$ เมตร
3. $50(\sqrt{3}+1)$ เมตร
4. $100(\sqrt{3}+1)$ เมตร

4) เรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเล ชายคนหนึ่งอยู่บนฝั่งห่างจากเรือทั้งสองลำ เป็นระยะทาง 100 เมตร และ 200 เมตร ตามลำดับ ถ้ามุมระหว่างเส้นตรงซึ่งเป็นแนวสังเกตที่เขาเฝ้าดูเรือทั้งสองลำเท่ากับ 30° จงหาระยะทางระหว่างเรือทั้งสองลำ

1. $50(5-2\sqrt{3})$ เมตร
2. $100(5\sqrt{3}-2)$ เมตร
3. $50(\sqrt{5-2\sqrt{3}})$ เมตร
4. $100(\sqrt{5-2\sqrt{3}})$ เมตร

5. ไออุ่นยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่ง 18 เมตร มองเห็นยอดตึกและเสาจานดาวเทียมรับโทรทัศน์ ซึ่งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาจานดาวเทียมรับโทรทัศน์

1. 30.23 เมตร
2. 20.78 เมตร
3. 14.78 เมตร
4. 10.56 เมตร

6. อาวิยืนอยู่ห่างจากตึก 20 เมตร มองเห็นเสาธงซึ่งปักอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 45° และปลายเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเสาธง (ไม่คิดความสูงของผู้สังเกต)

1. 30.78 เมตร
2. 25.82 เมตร
3. 14.64 เมตร
4. 10.86 เมตร

7. ทิวลิปตั้งกล้องส่องทางไกลสูงจากพื้นดิน 2 เมตร ถ้ากล้องอยู่ห่างจากผนังตึก 60 เมตร และเมื่อมองไปที่ยอดตึกเป็นมุม 45° แล้วตึกนี้มีความสูงเท่าใด

1. 32 เมตร
2. 60 เมตร
3. 62 เมตร
4. $30\frac{\sqrt{2}}{2}$ เมตร

8. มานะมองเห็นว่าตัวหนึ่งลอยอยู่บนท้องฟ้าแนวเดียวกับพื้นดินทำมุมเงย 50° ถ้าสายป่านยาว 120 เมตร แล้วว่าอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

1. 91.92 เมตร
2. 120.4 เมตร
3. 136.8 เมตร
4. 142.3 เมตร



ง่ายจังเลย

9. ธนายนอยู่บนดาดฟ้าตึกซึ่งสูง 45 เมตร มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งที่จอดอยู่บนลานจอดรถ ซึ่งอยู่แนวเดียวกับตึกทำมุมก้ม 60° แล้วรถยนต์คันนี้จอดอยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่ากับข้อใด

1. $45\sqrt{3}$ เมตร
2. $45\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมตร
3. $15\sqrt{3}$ เมตร
4. $15\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมตร

10. เนตรนารีคนหนึ่งโยนเชือกจากเสาธงสูง 12 เมตร ถ้าดึงเชือกให้ตึงแล้วนำมาผูกกับหลักกลางสนาม ปรากฏว่าเชือกทำมุมเงย 50° กับเสาธง แล้วเชือกเชือกนี้มีความยาวเท่ากับเท่าไร (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

1. 5.72 เมตร
2. 9.48 เมตร
3. 11.56 เมตร
4. 15.66 เมตร



ทำด้วยความรอบ
นะคะนักเรียน



เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. **คณิตศาสตร์พื้นฐานเพิ่มเติม ม.5 เล่ม 2**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER, มปป.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. **หนังสือเรียนเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด, 2555.

นงนุช สุขวารี และ พิชรี หิรัญมาศสุวรรณ. **คณิตศาสตร์**. (คู่มืออบรมครูวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ โลก ดาราศาสตร์ และอวกาศ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย). กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, มปป.

ปกรณ์ พลาหาญ. **รวมสูตร กฎ ทฤษฎี คณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น, 2556.

ศุภกิจ เฉลิมวิสุตม์กุล. **หนังสือเรียนคณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.5 ภาคเรียนที่ 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด, 2555.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค.ลาดพร้าว, 2552.

อัมพร ม้าคะนอง. **ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554.



ข้อ 1 ตอบ 1.

ข้อ 2 ตอบ 3.

ข้อ 3 ตอบ 2.

ข้อ 4 ตอบ 4.

ข้อ 5 ตอบ 2.

ข้อ 6 ตอบ 4.

ข้อ 7 ตอบ 3.

ข้อ 8 ตอบ 1.

ข้อ 9 ตอบ 1.

ข้อ 10 ตอบ 4.

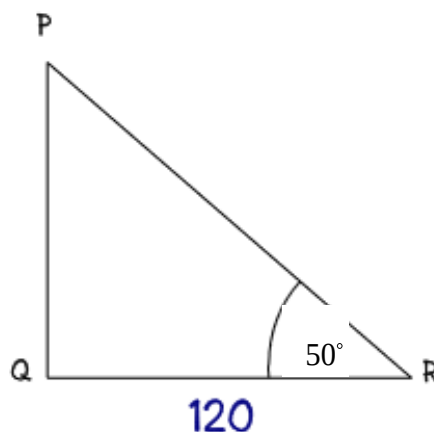


เฉลยใบงานที่ 11.1

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำการหาคำตอบตามขั้นตอนกระบวนการ

1. อารีต้องการวัดส่วนกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด P แล้วมองข้ามไปที่จุด Q ซึ่งอยู่ตรงข้าม ซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุด เมื่อเขาเดินเลียบฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 120 เมตร ก็หยุดที่จุด R วัดมุม PRQ ได้ 50° จงหาความกว้างของแม่น้ำ (กำหนด $\sin 50^\circ \approx 0.766$, $\cos 50^\circ \approx 0.643$, $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



เลียบฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 120 เมตร
วัดมุม PRQ ได้ 50°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



ความกว้างของแม่น้ำ

วิธีการแก้ปัญหา (D)



1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา →

$$\frac{\sin R}{PQ} = \frac{\sin P}{120}$$

$$\frac{\sin 50^\circ}{PQ} = \frac{\sin 40^\circ}{120}$$

$$\frac{0.766}{PQ} = \frac{0.643}{120}$$

$$\frac{0.766}{PQ} = \frac{0.643}{120}$$

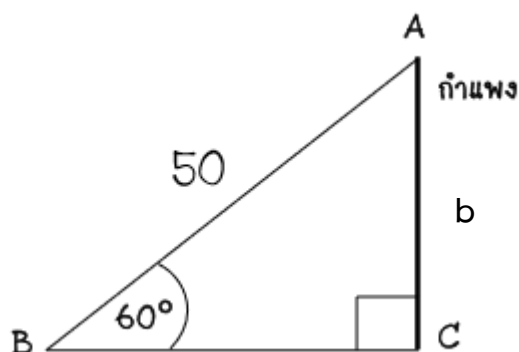
$$PQ \approx 142.95$$

คำตอบที่ได้ →

ความกว้างของแม่น้ำ ประมาณ 142.95 เมตร

2. ทิวลิปนำบันไดยาว 50 ฟุต พาดเข้ากับกำแพงให้ปลายบนของบันไดอยู่ชิดกับขอบบน ของกำแพงพอดี เขาสังเกตเห็นว่าบันไดทำมุม 60° กับพื้นราบ จงหว่ากำแพงสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) →

บันไดยาว 50 ฟุต และบันไดทำมุม 60° กับพื้นราบ

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) →

กำแพงสูงเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) →

1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นตอนการแก้ปัญหา →

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{b} = \frac{\sin 90^\circ}{50}$$



$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{b} = \frac{1}{50}$$

$$b = 25\sqrt{3}$$

$$b \approx 43.3$$

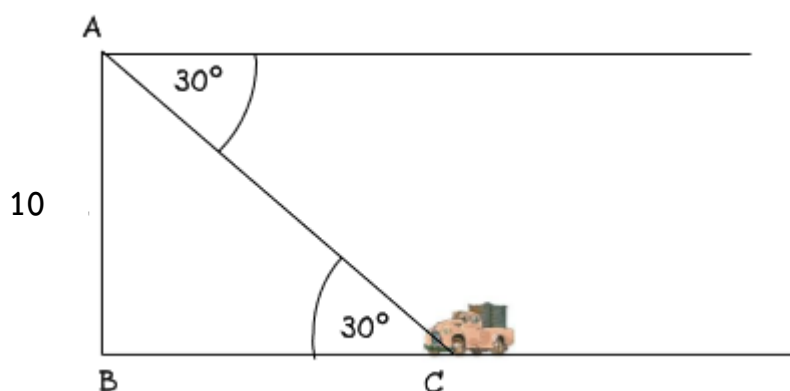
คำตอบที่ได้ →

กำแพงสูงประมาณ 43.3 เมตร

3. ออมสินยืนอยู่บนยอดตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 10 เมตร มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งเป็นมุมก้ม 30° จงหา

- 1) รถยนต์อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่าใด
- 2) ออมสินอยู่ห่างจากรถยนต์เป็นระยะทางเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) →

ตึกหลังหนึ่งซึ่งสูง 10 เมตร มองเห็นรถยนต์คันหนึ่งเป็นมุมก้ม 30°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) →

- 1) รถยนต์อยู่ห่างจากตึกเป็นระยะทางเท่าใด
- 2) แดนอยู่ห่างจากรถยนต์เป็นระยะทางเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) →

1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A , B , C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

2. มุมแย้ง

ขั้นตอนการแก้ปัญหา



หาระยะทางที่รถยนต์อยู่ห่างจากตึก

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{10}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{1}{10}$$

$$a = 10\sqrt{3}$$

ออมสินอยู่ห่างจากรถยนต์เป็นระยะทางเท่าใด จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\sin 60^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{AC}$$

$$AC = \frac{2(10)\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$AC = 20$$

คำตอบที่ได้



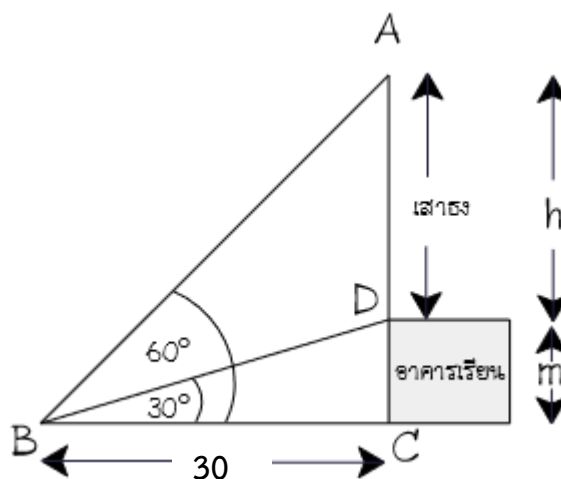
ระยะทางที่รถยนต์อยู่ห่างจากตึก $10\sqrt{3}$ เมตร

ออมสินอยู่ห่างจากรถยนต์เป็นระยะทาง 20 เมตร



4. เสาธงปักตั้งฉากอยู่บนอาคารเรียนหลังหนึ่ง ฟาโสนั่งอยู่บนสนามห่างจากอาคารเรียน ออกไป 30 เมตร มองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30° และยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาว่าเสาธงสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



ฟาโสนั่งอยู่บนสนามห่างจากอาคารเรียน ออกไป 30 เมตร
มองเห็นยอดอาคารเป็นมุมเงย 30° และยอดเสาธงเป็นมุมเงย 60°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



ความสูงของเสาธง

วิธีการแก้ปัญหา (D)



1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

2. มุมแย้ง

ขั้นตอนการแก้ปัญหา



พิจารณา $\triangle BCD$ ในการหาความสูงของอาคารเรียน

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin D}{d}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{30}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{b} = \frac{\sin 60^\circ}{30}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{30}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{30}$$

$$b = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

พิจารณา $\triangle ABC$ ในการหาความสูงด้าน AC

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{AC} = \frac{\sin 30^\circ}{30}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{AC} = \frac{2}{30}$$

$$AC = 30\sqrt{3}$$

$$\text{เสาธงสูง} = AC - CD$$

$$= 30\sqrt{3} - \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \left(30\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{30}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \left(30\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{30}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{90}{\sqrt{3}} - \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{3}}$$

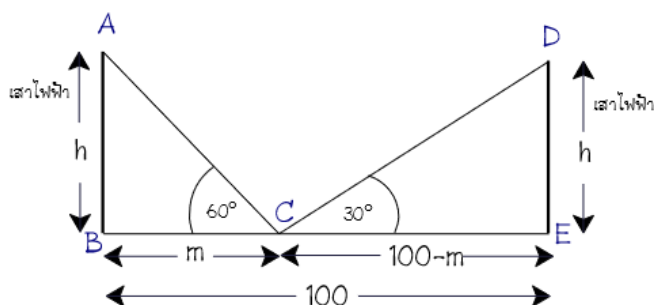
$$\approx 34.64$$

คำตอบที่ได้ →

เสาสูงประมาณ 34.64 เมตร

5. เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 60 เมตร จุหลินยืนอยู่ที่จุด ๆ หนึ่งระหว่างเสาไฟฟ้าทั้งสอง และอยู่บนแนวเส้นตรงที่ลากผ่านโคนเสา สังเกตเห็นยอดเสาไฟฟ้า ทั้งสองเป็นมุมเงย 30° และ 60° จงหาว่าเสาไฟฟ้าทั้งสองสูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) →

เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 60 เมตร

สังเกตเห็นยอดเสาไฟฟ้า ทั้งสองเป็นมุมเงย 30° และ 60°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) →

เสาไฟฟ้าทั้งสองสูงเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) →

1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

2. มุมแย้ง

ขั้นตอนการแก้ปัญหา



พิจารณา $\triangle CDE$ ในการหาความสูงของเสาไฟฟ้า

$$\frac{\sin C}{DE} = \frac{\sin D}{CE}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{DE} = \frac{\sin 60^\circ}{30}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{DE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{30}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{30} DE$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) 30 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) DE$$

$$DE = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$DE \approx 17.32$$

คำตอบที่ได้



เสาไฟทั้งสองสูงประมาณ 17.32 เมตร

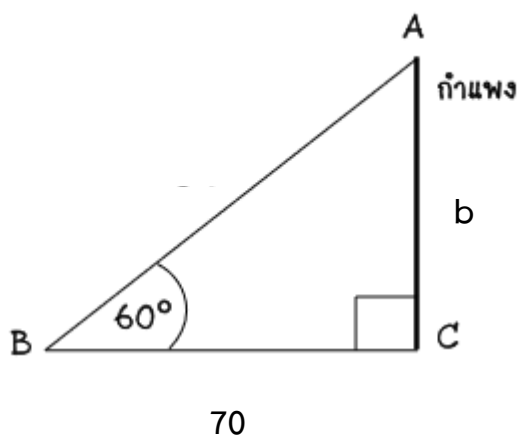


เฉลยใบงานที่ 11.2

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำการหาคำตอบตามขั้นตอนกระบวนการ

1. ข้าวกล้องยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุด ๆ หนึ่ง มองดูยอดอาคารเรียนเป็นมุมเงย 60° ถ้าข้าวกล้องยืนอยู่ห่างจากอาคารเรียน 70 เมตร จงหาว่าอาคารเรียนนี้สูงเท่าใด (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) →

ข้าวกล้องยืนอยู่ห่างจากอาคารเรียน 70 เมตร
มองดูยอดอาคารเรียนเป็นมุมเงย 60°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) →

อาคารเรียนสูงเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) →

1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา →

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 60^\circ}{70} = \frac{\sin 30^\circ}{b}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{70} = \frac{\frac{1}{2}}{b}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b = \left(\frac{1}{2}\right)70$$

$$b = \frac{70}{\sqrt{3}}$$

$$b \approx 40.42$$

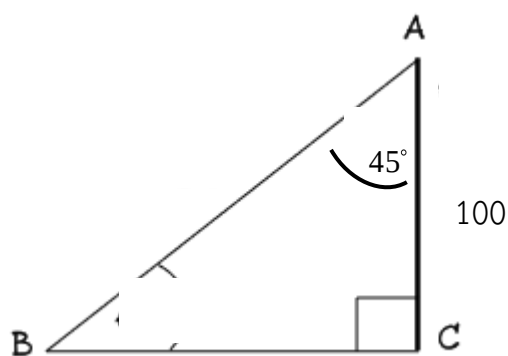
คำตอบที่ได้ →

อาคารเรียนสูงประมาณ 40.42 เมตร



2. ยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นกองหินบนพื้นดินเบื้องล่างแนวเดียวกับเชิงผาเป็นมุมก้ม 45° จงหาว่ากองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผาเป็นระยะทางเท่าใด

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K) →

ยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร
มองดูกองหินเป็นมุมก้ม 45°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W) →

กองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผาเป็นระยะทางเท่าใด

วิธีการแก้ปัญหา (D) →

1. กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา →

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 45^\circ}{100}$$

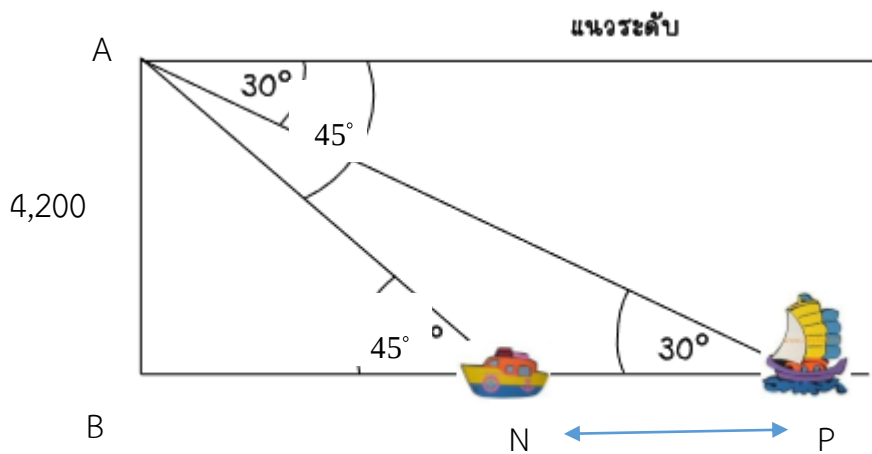
$$a = 100$$

คำตอบที่ได้ →

กองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผาเป็นระยะทาง 100 เมตร

3. เครื่องบินลำหนึ่งบินอยู่เหนือน้ำระดับทะเล 4,200 เมตร นักบินมองเห็นเรือสองลำที่ตำแหน่ง N และ P เป็นมุมก้ม 30° และ 45° ตามลำดับ จงหาว่าเรือทั้งสองลำอยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่าใด

วิธีทำ วาดรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มา (K)



เครื่องบินลำหนึ่งบินอยู่เหนือน้ำระดับทะเล 4,200 เมตร นักบินมองเห็นเรือสองลำที่ตำแหน่ง N และ P เป็นมุมก้ม 30° และ 45°

สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ (W)



เรือสองลำอยู่ห่างกันเป็นระยะทางเท่าไร

วิธีการแก้ปัญหา (D)  1) หาความยาวของด้านที่ต้องการโดยแยกคิดเป็น สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป คือ $\triangle ABP$ และ $\triangle ABN$

2) กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b, c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ขั้นตอนการแก้ปัญหา

พิจารณา $\triangle ABP$

จาก $AB = 4,200$ และ จะหาความยาวด้าน BP

จะได้
$$\frac{\sin(A)}{BP} = \frac{\sin(P)}{AB}$$

$$\frac{\sin(45^\circ)}{BP} = \frac{\sin(30^\circ)}{4,200}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{BP} = \frac{\frac{1}{2}}{4,200}$$

$$BP = 4,200\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

พิจารณา $\triangle ABN$

$$\tan(45^\circ) = \frac{AB}{BN}$$

$$1 = \frac{4,200}{BN}$$

$$BN = 4,200 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned} \text{เรือสองลำห่างกัน} \quad BP - BN &= 4,200\sqrt{2} - 4,200 \\ &= 4,200(\sqrt{2} - 1) \\ &\approx 1,738.8 \end{aligned}$$

คำตอบที่ได้ $\rightarrow$ เรือสองลำห่างกันประมาณ 1,738.8 เมตร



พวกเรา
ช่วยกันทำ

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน



- ข้อ 1 ตอบ 1.
 ข้อ 2 ตอบ 3.
 ข้อ 3 ตอบ 2.
 ข้อ 4 ตอบ 4.
 ข้อ 5 ตอบ 2.
 ข้อ 6 ตอบ 4.
 ข้อ 7 ตอบ 3.
 ข้อ 8 ตอบ 1.
 ข้อ 9 ตอบ 1.
 ข้อ 10 ตอบ 4.



ได้คะแนนเต็มทุกคนเลย
 ใจไหมล่ะ

