

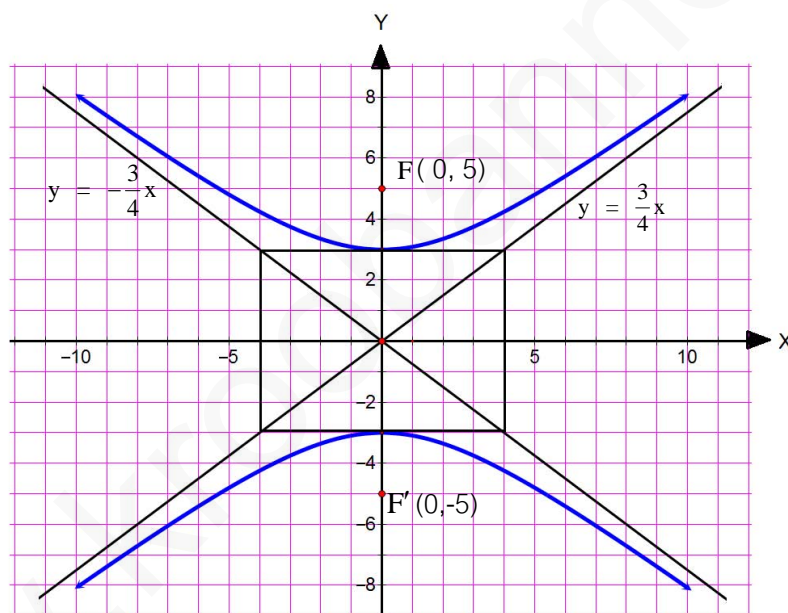
แบบฝึกหัดหาคะดณิตศาสตร์

# ภาคตัดกรวย

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

รายวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 รหัสวิชา ค31201



เล่ม 5

ไฮเพอร์โบลา

จัดทำโดย

นางธัญญารัตน์ ดำเบื้อง

โรงเรียนกบินทร์วิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 7



## คำนำ

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในการเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะเล่มนี้ประกอบด้วย ชื่อชุดฝึกในแต่ละชุดย่อย จุดประสงค์ คำสั่ง ตัวอย่าง ชุดฝึก ภาพประกอบ แบบทดสอบก่อน – หลังเรียน แบบประเมินบันทึกผลการใช้ พร้อมทั้งเฉลย รวม 4 แบบฝึก คือ

- 1) แบบฝึกทักษะชุดที่ 1 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X
- 2) แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y
- 3) แบบฝึกทักษะชุดที่ 3 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(h, k) แกนตามขวางขนานแกน X
- 4) แบบฝึกทักษะชุดที่ 4 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(h, k) แกนตามขวางขนานแกน Y

นักเรียนสามารถใช้แบบฝึกทักษะทั้งในชั้นเรียนและศึกษาเพิ่มเติมด้วยตนเองได้ ในการจัดทำแบบฝึกทักษะได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีนี้ ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากท่านผู้อำนวยการโรงเรียนกบินทร์วิทยา รองผู้อำนวยการ ผู้เชี่ยวชาญ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คณะครู และนักเรียน โรงเรียนกบินทร์วิทยาทุกท่านที่ให้คำแนะนำช่วยเหลือเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะไปทดลองใช้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะและคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำเร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน การสอนของครู และบุคคลที่สนใจเป็นอย่างมาก ซึ่งจะช่วยยกระดับคุณภาพการศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ธัญญารัตน์ คำเชื้อง

# สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	3
จุดประสงค์การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	4
แบบทดสอบก่อนเรียน	5
ใบความรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา	9
ใบความรู้ ชุดที่ 1 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน X	11
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1	15
ใบความรู้ ชุดที่ 2 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(0, 0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y	18
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2	22
ใบความรู้ ชุดที่ 3 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(h, k) แกนตามขวางขนานแกน X	25
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3	29
ใบความรู้ ชุดที่ 4 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่(h, k) แกนตามขวางขนานแกน Y	34
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 4	38
แบบทดสอบหลังเรียน	43
<b>ภาคผนวก</b>	47
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	48
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1	49
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2	52
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 3	55
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 4	60
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	65
ตารางบันทึกคะแนนการทำแบบฝึกทักษะ	66
แบบประเมินผลการทำแบบฝึกทักษะ	67
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	69
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	70
<b>บรรณานุกรม</b>	71

## คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ใช้ประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา ใช้เวลาในการศึกษา 6 ชั่วโมง

### หลักการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

นักเรียนควรปฏิบัติในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ศึกษาจุดประสงค์ในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
  2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ แล้วตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่มบันทึกลงในตารางบันทึกคะแนน
  3. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 1 เรื่อง ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางอยู่บนแกน X แล้วทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 1
  4. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
  5. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 2 เรื่อง ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางอยู่บนแกน Y แล้วทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 2
  6. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
  7. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 3 เรื่อง ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$  แกนตามขวางขนานแกน X ทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 3
  8. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
  9. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 4 เรื่อง ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(h, k)$  แกนตามขวางขนานแกน Y แล้วทำแบบฝึกทักษะชุดที่ 4
  10. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
  11. เมื่อบันทึกผลลงในตารางบันทึกคะแนนเสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ
  12. ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจแบบทดสอบหลังเรียนจากเฉลยท้ายเล่ม บันทึกผลที่ได้ลงในตารางบันทึกคะแนน เพื่อทราบผลการพัฒนาภายหลังการฝึกทักษะคณิตศาสตร์
- หมายเหตุ** หากนักเรียนทำแบบทดสอบไม่ผ่านเกณฑ์ ควรย้อนกลับไปศึกษาทำความเข้าใจกับเนื้อหาใหม่อีกครั้ง ก่อนที่จะทำแบบทดสอบ

## จุดประสงค์ในการทำแบบฝึกทักษะ

เมื่อนักเรียนได้ศึกษาแบบฝึกทักษะเล่มนี้จบแล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $x$  ได้
2. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $x$  ได้
3. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$  ได้
4. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$  ได้
5. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $x$  ได้
6. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $x$  ได้
7. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $y$  ได้
8. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $y$  ได้



ก่อนทำแบบฝึก  
เราลองทำแบบทดสอบ  
ก่อนเรียนกันก่อนนะจ๊ะ



แบบทดสอบก่อนเรียน  
วิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4  
เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย **x** ในกระดาษคำตอบ

1. ความสัมพันธ์  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา พิกัดของจุดยอดและโฟกัส คือ ข้อใด
  - ก. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-2\sqrt{5}, 0)$  และ  $(2\sqrt{5}, 0)$
  - ข. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-4\sqrt{5}, 0)$  และ  $(4\sqrt{5}, 0)$
  - ค. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-6, 0)$  และ  $(6, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-2\sqrt{3}, 0)$  และ  $(2\sqrt{3}, 0)$
  - ง. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-6, 0)$  และ  $(6, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-4\sqrt{3}, 0)$  และ  $(4\sqrt{3}, 0)$
  
2. ความสัมพันธ์  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1 \right\}$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดเป็นจริง
  - ก. แกนตามขวางยาว 2 หน่วย อยู่บนแกน y
  - ข. แกนตามขวางยาว 4 หน่วย อยู่บนแกน y
  - ค. แกนสังยุคยาว 3 หน่วย อยู่บนแกน x
  - ง. แกนสังยุคยาว 4 หน่วย อยู่บนแกน x
  
3. พิกัดของจุดยอดและโฟกัสของสมการของไฮเพอร์โบลา  $16x^2 - 25y^2 = 400$  คือข้อใด
  - ก. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-5, 0)$  และ  $(5, 0)$
  - ข. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-\sqrt{7}, 0)$  และ  $(\sqrt{7}, 0)$
  - ค. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(0, -\sqrt{7})$  และ  $(0, \sqrt{7})$
  - ง. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-5, 0)$  และ  $(5, 0)$

4. สมการของไฮเพอร์โบลาในข้อใดมีจุดยอดอยู่ที่  $(-2, 0)$  และ  $(2, 0)$  และโฟกัสอยู่ที่  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$

ก.  $3x^2 - y^2 - 1 = 0$

ข.  $3y^2 - x^2 - 12 = 0$

ค.  $3x^2 - y^2 - 12 = 0$

ง.  $3y^2 - x^2 - 1 = 0$

5. ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, -5)$  และ  $(0, 5)$  และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด  $(0, \sqrt{29})$  คือข้อใด

ก.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{54} = 1 \right\}$

ข.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1 \right\}$

ค.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{y^2}{29} - \frac{x^2}{4} = 1 \right\}$

ง.  $\left\{ (x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{54} = 1 \right\}$

6. สมการ  $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดเป็นจริง

ก. จุดยอดอยู่ที่  $(3, -5)$  และ  $(3, 3)$

ข. จุดยอดอยู่ที่  $(-1, 1)$  และ  $(7, 1)$

ค. โฟกัสอยู่ที่  $(-2, -1)$  และ  $(8, -1)$

ง. โฟกัสอยู่ที่  $(3, -1-\sqrt{7})$  และ  $(3, -1+\sqrt{7})$

7. สมการ  $9(x-1)^2 - 25(y+2)^2 = 225$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดถูกต้อง

ก. จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-5, 4)$

ข. จุดยอดอยู่ที่  $(3, 2)$

ค. โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(5+\sqrt{5}, -4)$

ง. แกนตามขวางยาว 3 หน่วย

8. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่  $(6, 3)$   $(-4, 3)$  มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่  $(5, 3)$  คือข้อใด

ก.  $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

ข.  $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

ค.  $\frac{(x+6)^2}{64} - \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

ง.  $\frac{(x-4)^2}{8} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$

9. สมการของไฮเพอร์โบลาในข้อใดมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(1, -2)$  และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่  $(1, 1)$  และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(1, 3)$

ก.  $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$

ข.  $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

ค.  $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

ง.  $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$

10. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด  $(-4, 3)$  และ  $(4, 3)$

ซึ่งเป็นโฟกัส เท่ากับ 6 หน่วย คือข้อใด

ก.  $25x^2 - 9(y-3)^2 = 225$

ข.  $7y^2 - 9(x-3)^2 = 63$

ค.  $7x^2 - 9(y-3)^2 = 63$

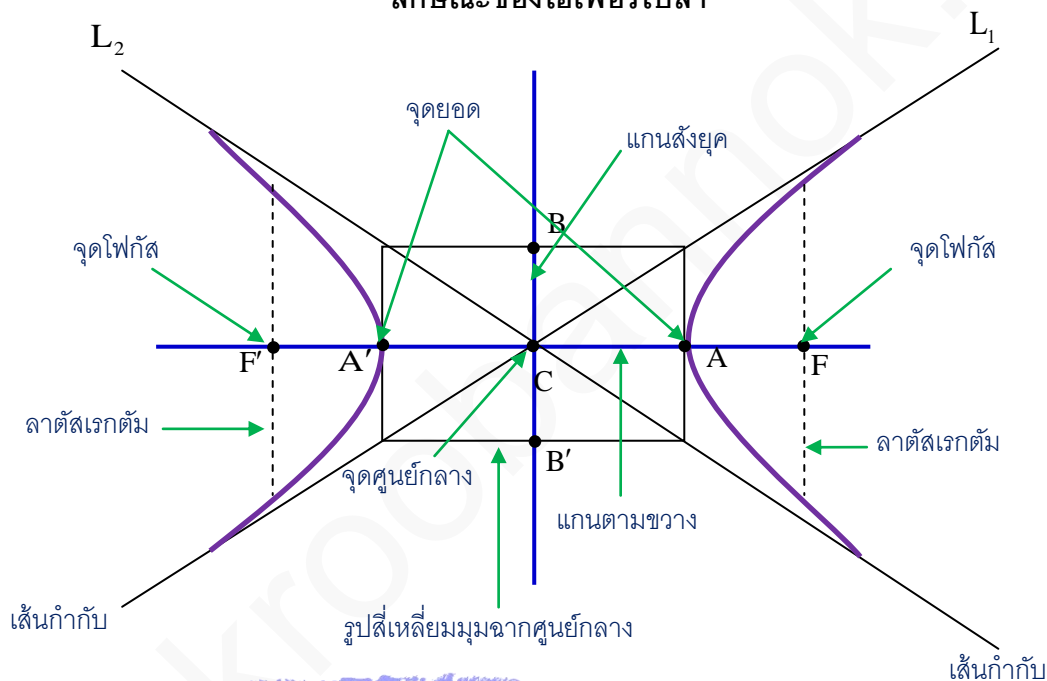
ง.  $25y^2 - 9(x-3)^2 = 225$

ใบความรู้

ไฮเพอร์โบลา

**บทนิยาม** ไฮเพอร์โบลา คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด  $F$  และ  $F'$  ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง

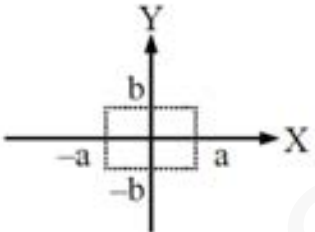
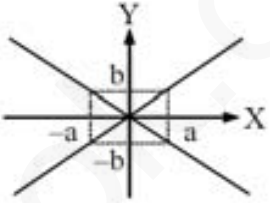
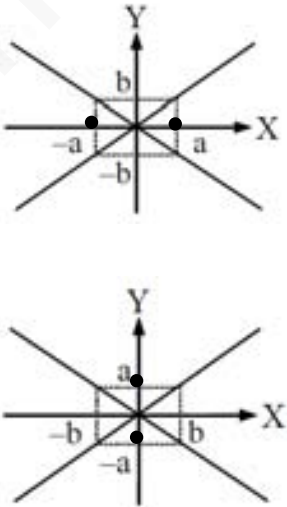
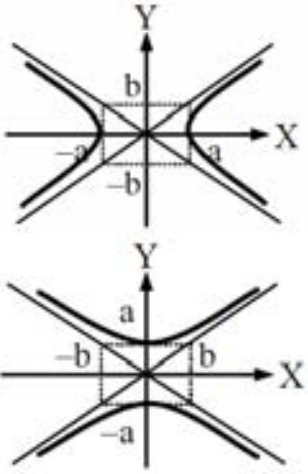
### ลักษณะของไฮเพอร์โบลา



### ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

1. จุดคงที่สองจุด คือ  $F$  และ  $F'$  เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา
2. จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง คือ จุด  $C$  เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา
3. จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับเส้นตรงที่ผ่านโฟกัสทั้งสอง คือ จุด  $A$  และ  $A'$  เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา
4. ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา คือ  $AA'$  เรียกว่า แกนตามขวาง (transverse axis) ของไฮเพอร์โบลา
5. ส่วนของเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางและตั้งฉากกับแกนตามขวาง คือ  $BB'$  เรียกว่า แกนสังยุค (conjugate axis) ของไฮเพอร์โบลา
6. เส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$  เป็นเส้นกำกับ (asymptotes) ของไฮเพอร์โบลา

## วิธีการเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา

<p>1. วาดรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากศูนย์กลาง ที่มีจุดกำเนิดเป็นจุดศูนย์กลางมีแต่ละด้านขนานกับแกนพิกัดและตัดแกนพิกัดที่ <math>\pm a</math> และ <math>\pm b</math></p>	
<p>2. ลากเส้นกำกับซึ่งเป็นเส้นตรงที่เกิดจากต่อเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจากศูนย์กลาง</p>	
<p>3. ลงจุดยอด คือจุดที่ระยะตัดแกน X ทั้งสอง (<math>x = \pm a</math>) ของไฮเพอร์โบลา <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math></p> <p>หรือ จุดที่ระยะตัดแกน Y ทั้งสอง (<math>y = \pm a</math>) ของไฮเพอร์โบลา <math>\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1</math></p>	
<p>4. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา เริ่มต้นจากจุดยอดที่ละจุด เขียนกราฟของแต่ละกิ่งของไฮเพอร์โบลาโดยลากเส้นโค้งลู่เข้าหาเส้นกำกับแต่ไม่ตัดเส้นกำกับ</p>	

ใบความรู้

# ชุดที่ 1

## ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$

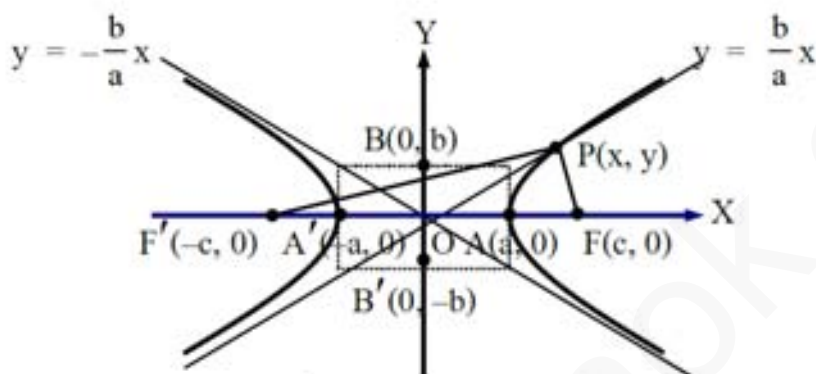
### แกนตามขวางอยู่บนแกน X

เมื่อเรียนแบบฝึกทักษะชุดนี้จบแล้ว เพื่อนๆจะต้อง

1. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา  
มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$   
และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $x$  ได้
2. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของ  
ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$   
และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $x$  ได้



ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางอยู่บนแกน X



สมการไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  เมื่อ  $c^2 = a^2 + b^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $C(0, 0)$
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน X
3. จุดโฟกัสอยู่ที่  $F(c, 0)$  และ  $F'(-c, 0)$
4. จุดยอดอยู่ที่  $A(a, 0)$  และ  $A'(-a, 0)$   
ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ  $AA' = 2a$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่  $B(0, b)$  และ  $B'(0, -b)$   
ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ  $BB' = 2b$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ  $y = \pm \frac{b}{a}x$
7. ลาดัสแรกตั้มียาวเท่ากับ  $\frac{2b^2}{a}$  หน่วย

**ตัวอย่างที่ 1** จากสมการ  $16x^2 - 9y^2 = 144$  จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส  
จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

**วิธีทำ** เขียนสมการไฮเพอร์โบลาให้อยู่ในรูมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

จะได้ว่า  $a^2 = 9$  และ  $b^2 = 16$  นั่นคือ  $a = 3, b = 4$

ดังนั้นไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่บนแกน X

จาก  $c^2 = a^2 + b^2$  ดังนั้น  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

จะได้ จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0, 0)$

จุดยอดอยู่ที่  $(-3, 0)$  และ  $(3, 0)$

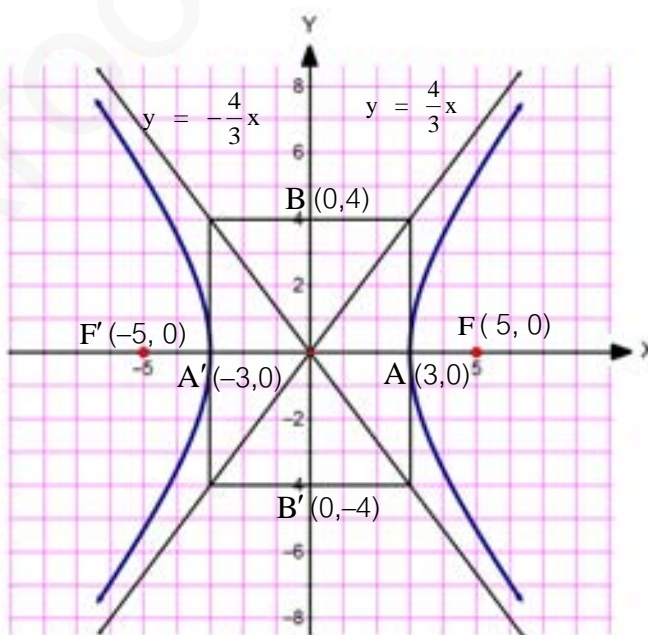
โฟกัสอยู่ที่  $(-5, 0)$  และ  $(5, 0)$

จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่  $(0, 4)$  และ  $(0, -4)$

เส้นกำกับคือ  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{3}x$

ความยาวลาตัสเรกตัม  $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4^2)}{3} = \frac{32}{3}$  หน่วย

เขียนกราฟได้ดังนี้



**ตัวอย่างที่ 2** จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด  $(-2, 0)$  และ  $(2, 0)$  เป็นจุดยอด และโฟกัสอยู่ที่  $(-3, 0)$  และ  $(3, 0)$  แล้วเขียนกราฟ

**วิธีทำ** จากที่กำหนดให้  $a = 2$  และ  $c = 3$  และ จุดยอดอยู่บนแกน X

$$\text{สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาเป็น} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

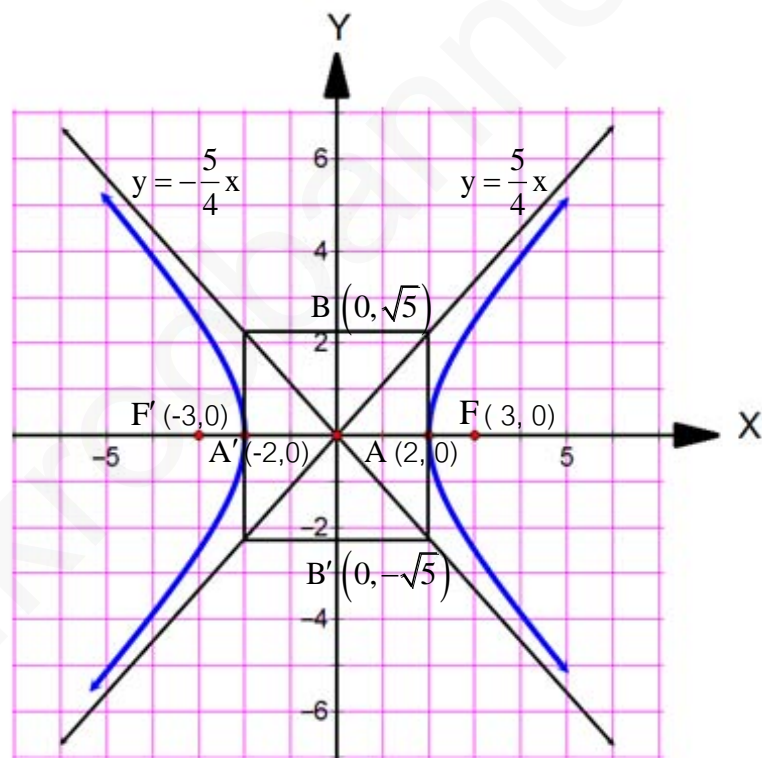
$$\text{จาก} \quad a^2 + b^2 = c^2 \text{ แทน } a = 2 \text{ และ } c = 3$$

$$\text{จะได้} \quad 2^2 + b^2 = 3^2$$

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$\text{ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลา คือ } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



## แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1



1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

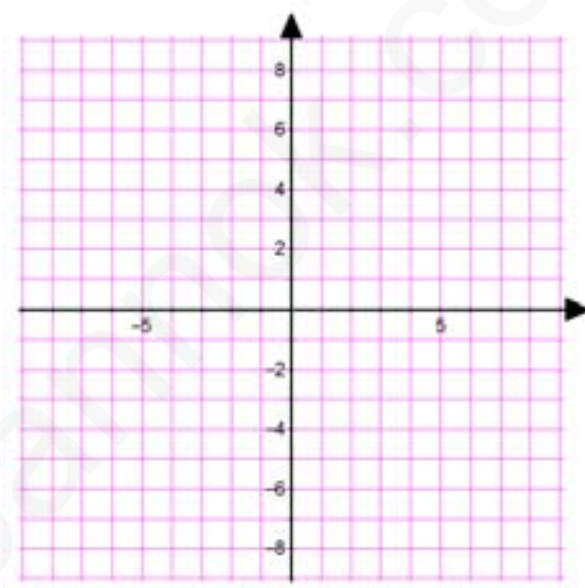
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



1.2  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

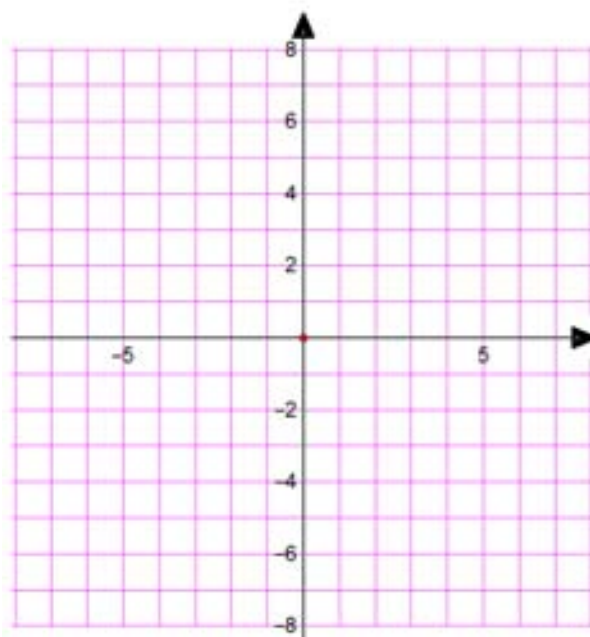
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

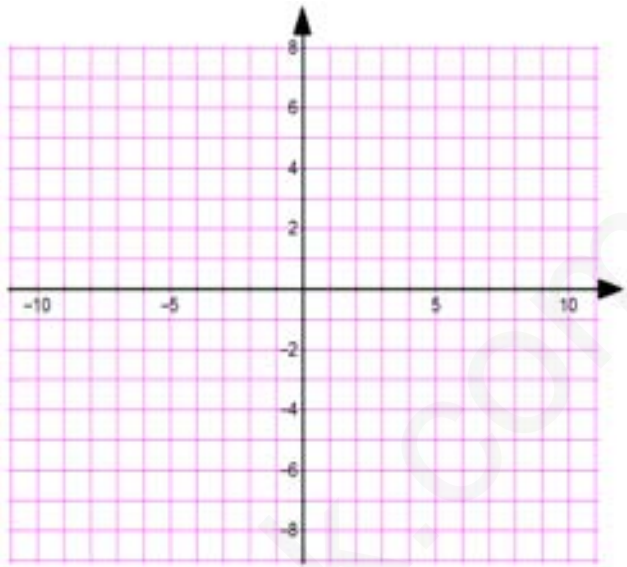
จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



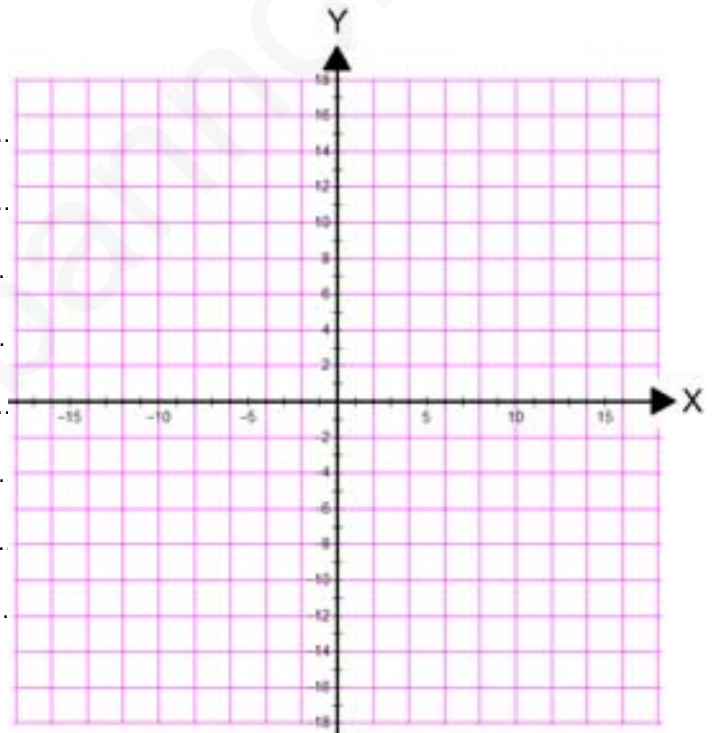
1.3  $9x^2 - 16y^2 = 144$

.....  
 .....  
 แกนตามขวาง คือ.....  
 จุดศูนย์กลาง .....  
 จุดยอด.....  
 โฟกัส.....  
 จุดปลายแกนสังยุค.....  
 สมการเส้นกำกับ.....



1.4  $64x^2 - 36y^2 = 2304$

.....  
 .....  
 แกนตามขวาง คือ.....  
 จุดศูนย์กลาง .....  
 จุดยอด.....  
 โฟกัส.....  
 จุดปลายแกนสังยุค.....  
 สมการเส้นกำกับ.....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดศูนย์กลาง คือ จุดกำเนิด แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 14 หน่วย

จุดปลายแกนสังยุค คือจุด  $(0,-5)$

.....

2.2 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 12 หน่วย

แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

.....

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 12 หน่วย

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(-10,0)$

.....

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน X แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(-15, 0)$  และ  $(15,0)$

.....

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(-13, 0)$  และ  $(13,0)$

.....

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 10 หน่วย

แกนสังยุคยาว 4 หน่วย

.....



ใบความรู้

## ชุดที่ 2

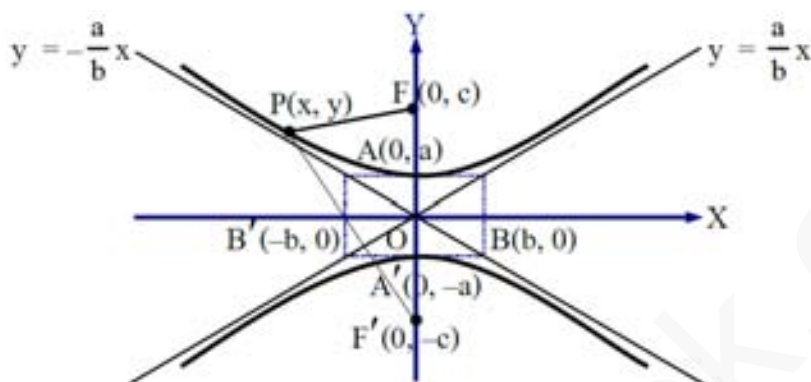
ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0,0)$ แกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$ 

เมื่อเรียนแบบฝึกทักษะชุดนี้จบแล้ว เพื่อนๆจะต้อง

1. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา  
มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$   
และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$  ได้
2. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของ  
ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$   
และแกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$  ได้



ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$



สมการไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  เมื่อ  $c^2 = a^2 + b^2$

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $C(0, 0)$
2. แกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่  $F(0, c)$  และ  $F'(0, -c)$
4. จุดยอดอยู่ที่  $A(0, a)$  และ  $A'(0, -a)$  ซึ่งความยาวแกนตามขวาง คือ  $AA' = 2a$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่  $B(b, 0)$  และ  $B'(-b, 0)$  ซึ่งความยาวแกนสังยุค คือ  $BB' = 2b$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ  $y = \pm \frac{a}{b} x$
7. ลาดัสเรกตัมยาวเท่ากับ  $\frac{2b^2}{a}$  หน่วย

**ตัวอย่างที่ 1** จากสมการ  $16y^2 - 9x^2 = 144$  จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส

จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

**วิธีทำ** เขียนสมการไฮเพอร์โบลาให้อยู่ในรูมาตรฐาน ได้ดังนี้

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

จะได้ว่า  $a^2 = 9$  และ  $b^2 = 16$  นั่นคือ  $a = 3, b = 4$

ดังนั้นไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางอยู่บนแกน  $y$

จาก  $c^2 = a^2 + b^2$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

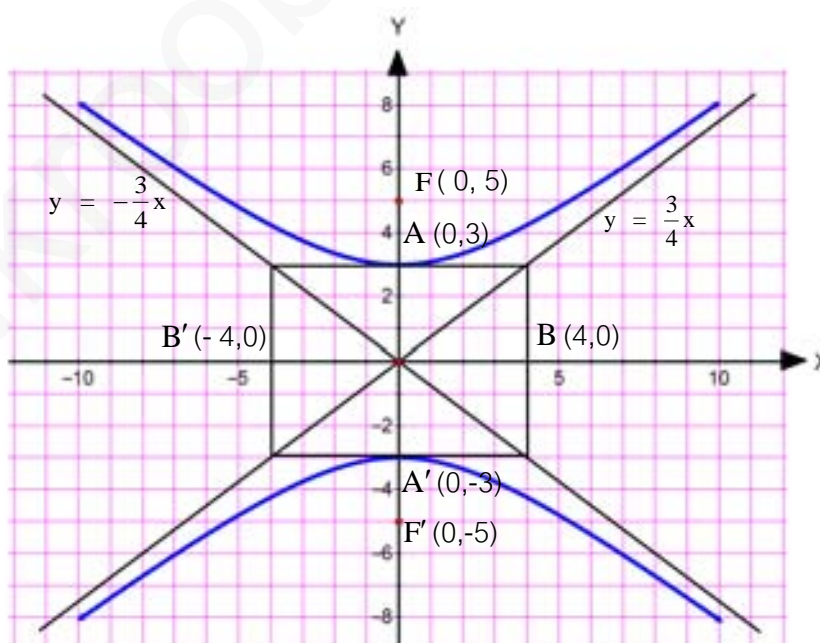
จะได้ จุดยอดอยู่ที่  $(0, -3)$  และ  $(0, 3)$

โฟกัสอยู่ที่  $(0, -5)$  และ  $(0, 5)$

เส้นกำกับคือ  $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{3}{4}x$

ความยาวลาตัสเรกตัม  $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4^2)}{3} = \frac{32}{3}$  หน่วย

เขียนกราฟได้ดังนี้



**ตัวอย่างที่ 2** จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด  $(0, -2)$  และ  $(0, 2)$  เป็นจุดยอด และเส้นกำกับ  $y = \pm x$  แล้วเขียนกราฟ

**วิธีทำ** จากที่กำหนดให้ จะได้ว่า จุดยอดอยู่บนแกน  $y$  และ  $a = 2$

แทนค่า  $a$  ในสมการเส้นกำกับ คือ  $y = \pm \frac{a}{b}x$  เพื่อหา  $b$

$$\text{จะได้ } \frac{2}{b} = 1$$

$$b = 2$$

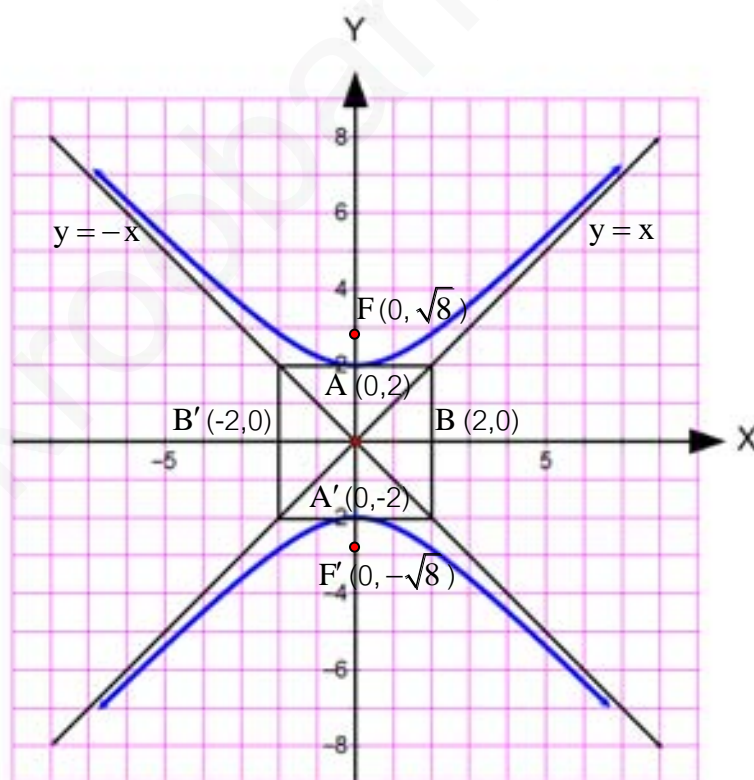
สมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาคือ  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

หาค่า  $c$  จาก  $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

จะได้  $c = \sqrt{8}$  ดังโฟกัสอยู่ที่จุด  $(0, -\sqrt{8})$  และ  $(0, \sqrt{8})$

เขียนกราฟได้ดังนี้



**ข้อสังเกต** ไฮเพอร์โบลา  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$  มีเส้นกำกับ  $y = \pm x$  ตั้งฉากกัน

เรียกไฮเพอร์โบลาใดๆ ที่มีเส้นกำกับตั้งฉากกันว่า ไฮเพอร์โบลามุมฉาก (rectangular hyperbola)

## แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2



1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

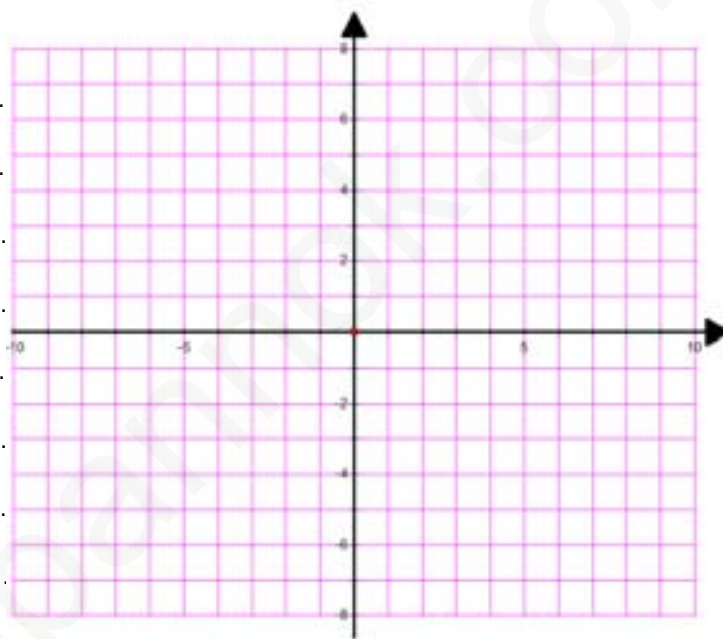
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



1.2  $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{36} = 1$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

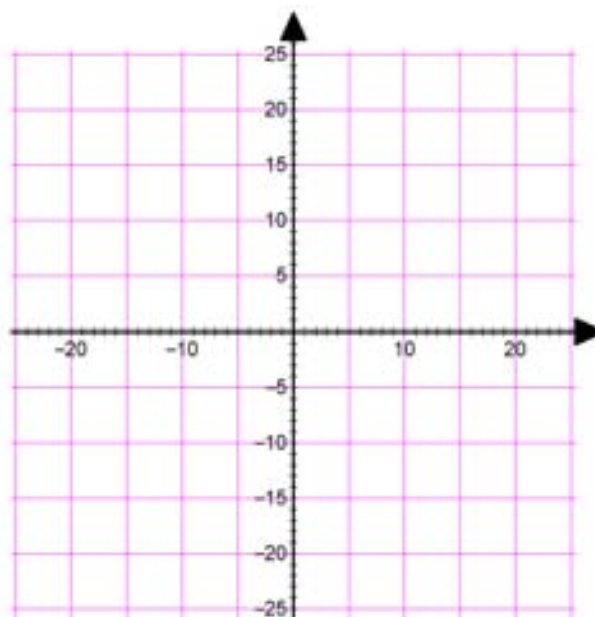
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



1.3  $25y^2 - 9x^2 = 225$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

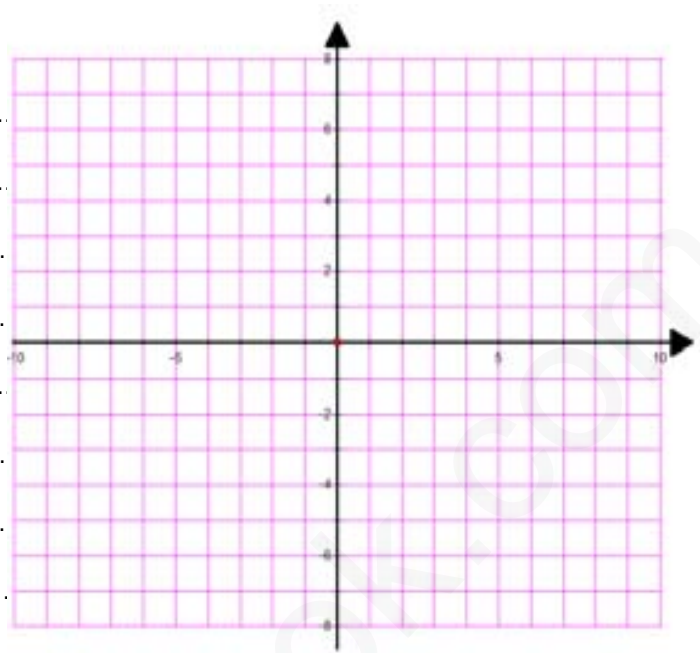
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



1.4  $36y^2 - 49x^2 = 1764$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

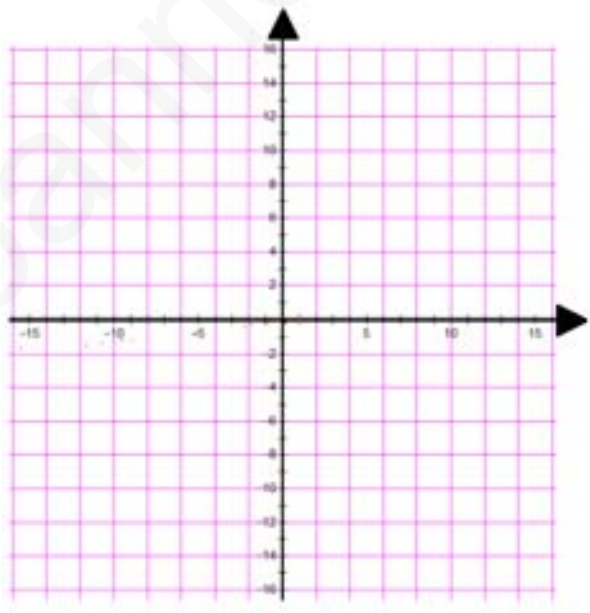
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดยอดคือ จุด  $(0,5)$  ,  $(0,-5)$  แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

.....

2.2 โฟกัสคือ  $(0,8)$  ,  $(0,-8)$  จุดปลายแกนสังยุค คือจุด  $(5,0)$  ,  $(-5,0)$

.....

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน Y ยาว 16 หน่วย

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(0,10)$

.....

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน Y แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(0, 15)$  และ  $(0,-15)$

.....

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน Y ยาว 16 หน่วย

แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

.....

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ  $(0,0)$  แกนตามขวางคือ แกน Y แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(0, 13)$  และ  $(0,-13)$

.....



ใบความรู้

## ชุดที่ 3

# ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(h,k)$

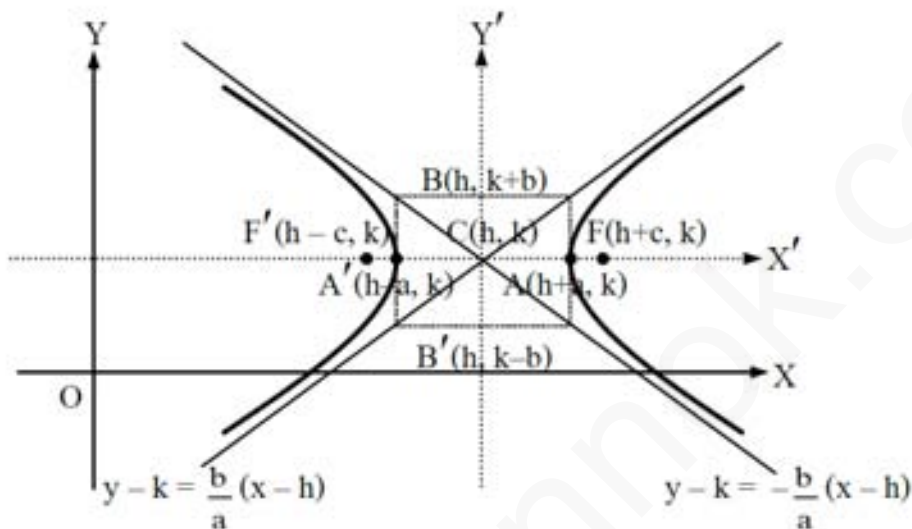
## แกนตามขวางขนานแกน $x$

เมื่อเรียนแบบฝึกทักษะชุดนี้จบแล้ว เพื่อนๆจะต้อง

1. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $x$  ได้
2. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $x$  ได้



ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางขนานแกน  $X$  ( $y = k$ )



สมการไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$  เมื่อ  $c^2 = a^2 + b^2$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน  $X$  อยู่บนเส้นตรง  $y = k$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด  $C(h, k)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $F(h+c, k)$  และ  $F'(h-c, k)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด  $A(h+a, k)$  และ  $A'(h-a, k)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด  $B(h, k+b)$  และ  $B'(h, k-b)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ  $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$
7. ลาดัสเรกต์มายาวเท่ากับ  $\frac{2b^2}{a}$  หน่วย

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาสมการและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-1, -1)$

แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 8 หน่วย และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

**วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดให้แกนตามขวางยาว 8 หน่วย จะได้ว่า  $a = 4$

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย จะได้ว่า  $b = 3$  ดังนั้น  $c = \sqrt{16+9} = 5$

ดังนั้นสมการของไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{(x+1)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$9(x+1)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

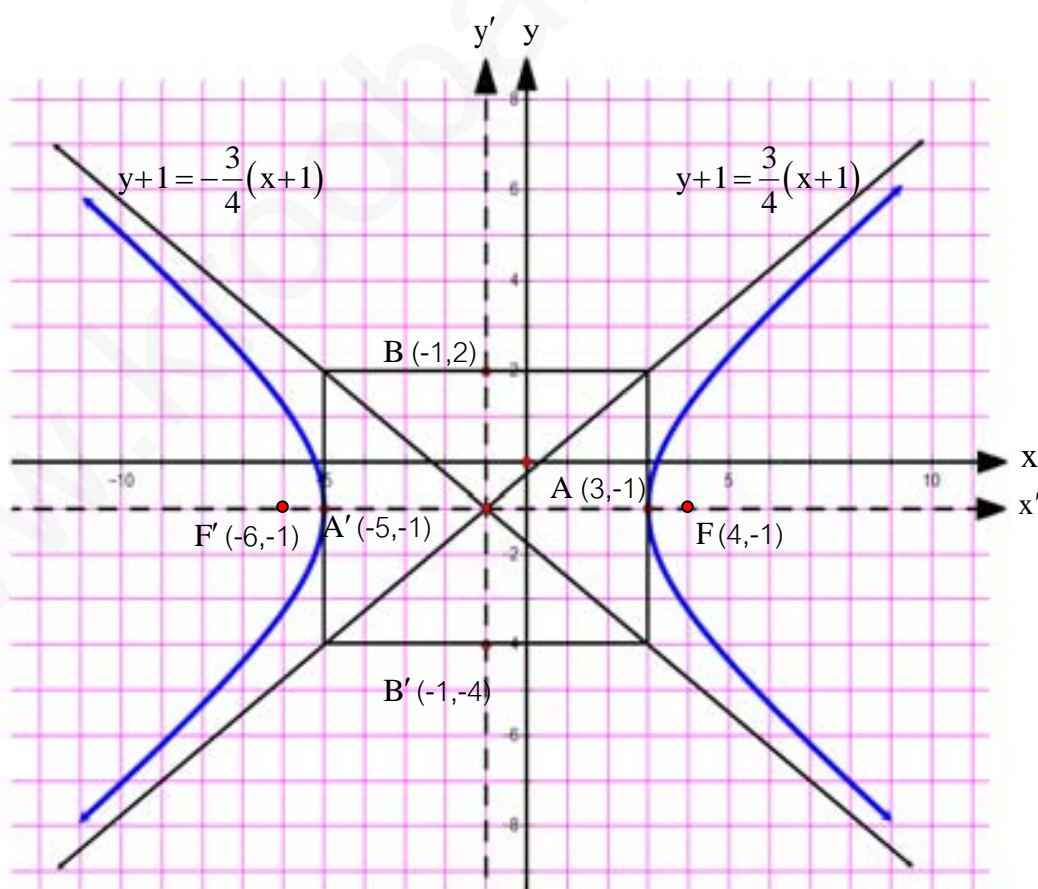
$$9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 + 2y + 1) = 144$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 16y^2 - 32y - 16 = 144$$

$$9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y + 9 - 16 - 144 = 0$$

$$9x^2 - 16y^2 + 18x - 32y - 151 = 0$$

เขียนกราฟได้ดังนี้



## ตัวอย่างที่ 2

จากสมการไฮเพอร์โบลา  $16x^2 - 9y^2 + 128x + 90y - 113 = 0$

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ

ความยาวลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ เขียนสมการไฮเพอร์โบลาให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$16x^2 + 128x - 9y^2 + 90y = 113$$

$$16(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 10y) = 113$$

$$16(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 10y + 25) = 113 + 256 - 225$$

$$16(x + 4)^2 - 9(y - 5)^2 = 144$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางขนานแกน x จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k) = (-4, 5)$

จะได้ว่า  $a^2 = 9$  และ  $b^2 = 16$  นั่นคือ  $a = 3$ ,  $b = 4$

หาค่า c จาก  $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$  จะได้  $c = 5$

จุดยอดอยู่ที่จุด  $A(h + a, k) = (-4 + 3, 5) = (-1, 5)$

และ  $A'(h - a, k) = (-4 - 3, 5) = (-7, 5)$

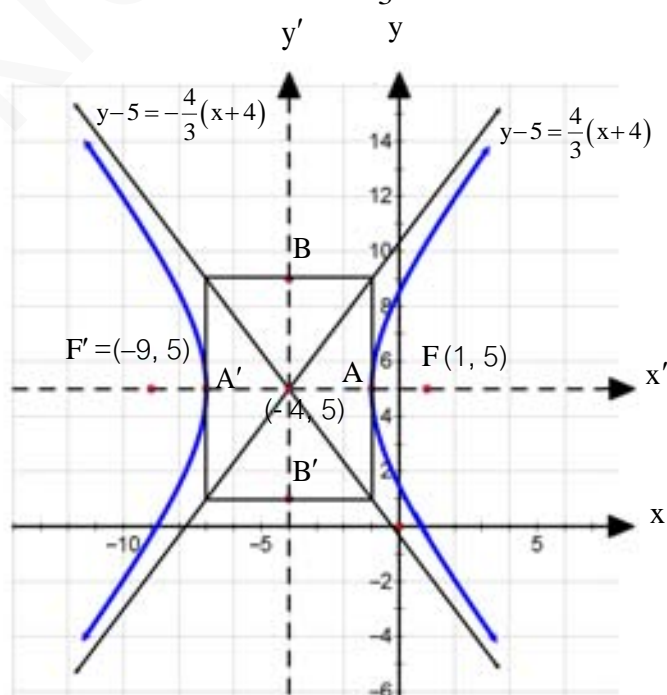
จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด  $B(h, k + b) = (-4, 5 + 4) = (-4, 9)$

และ  $B'(h, k - b) = (-4, 5 - 4) = (-4, 1)$

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $F(h + c, k) = (-4 + 5, 5) = (1, 5)$

และ  $F'(h - c, k) = (-4 - 5, 5) = (-9, 5)$

สมการเส้นกำกับ  $y - 5 = \pm \frac{4}{3}(x + 4)$



### แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3



1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{(x+3)^2}{100} - \frac{(y+6)^2}{144} = 1$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

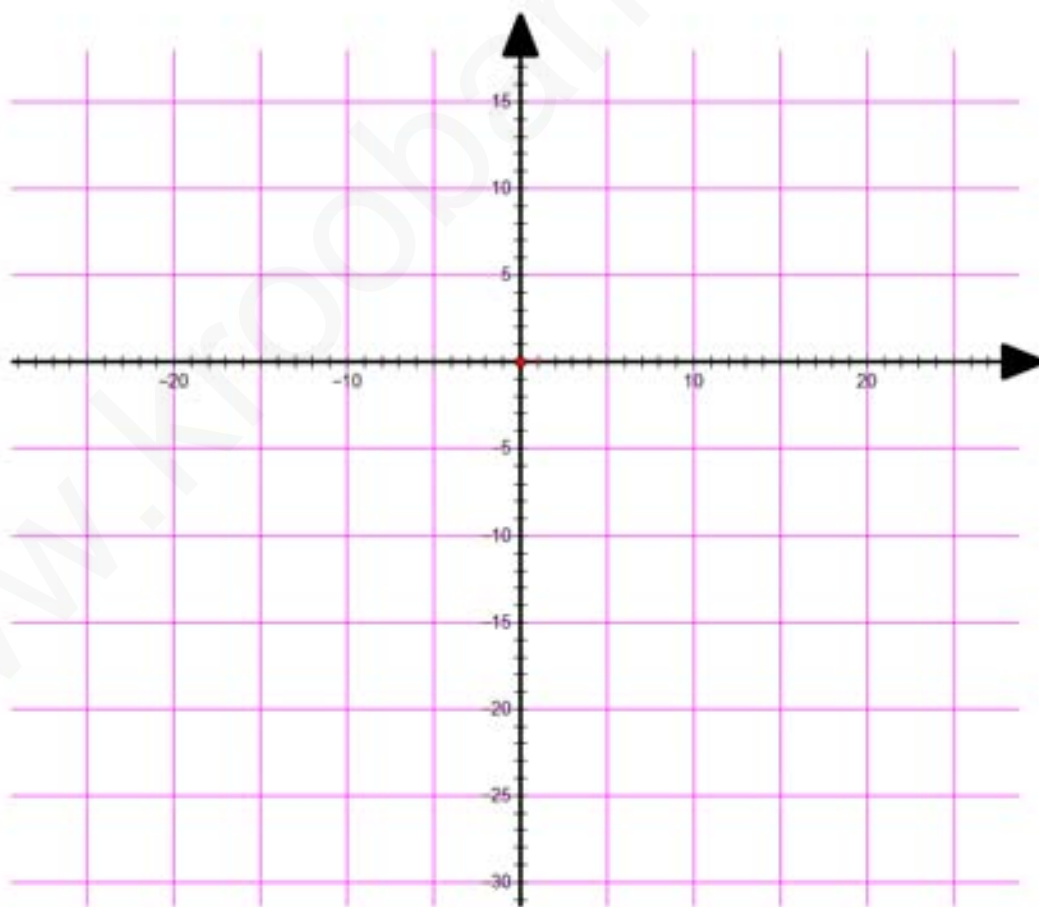
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.2 \quad \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

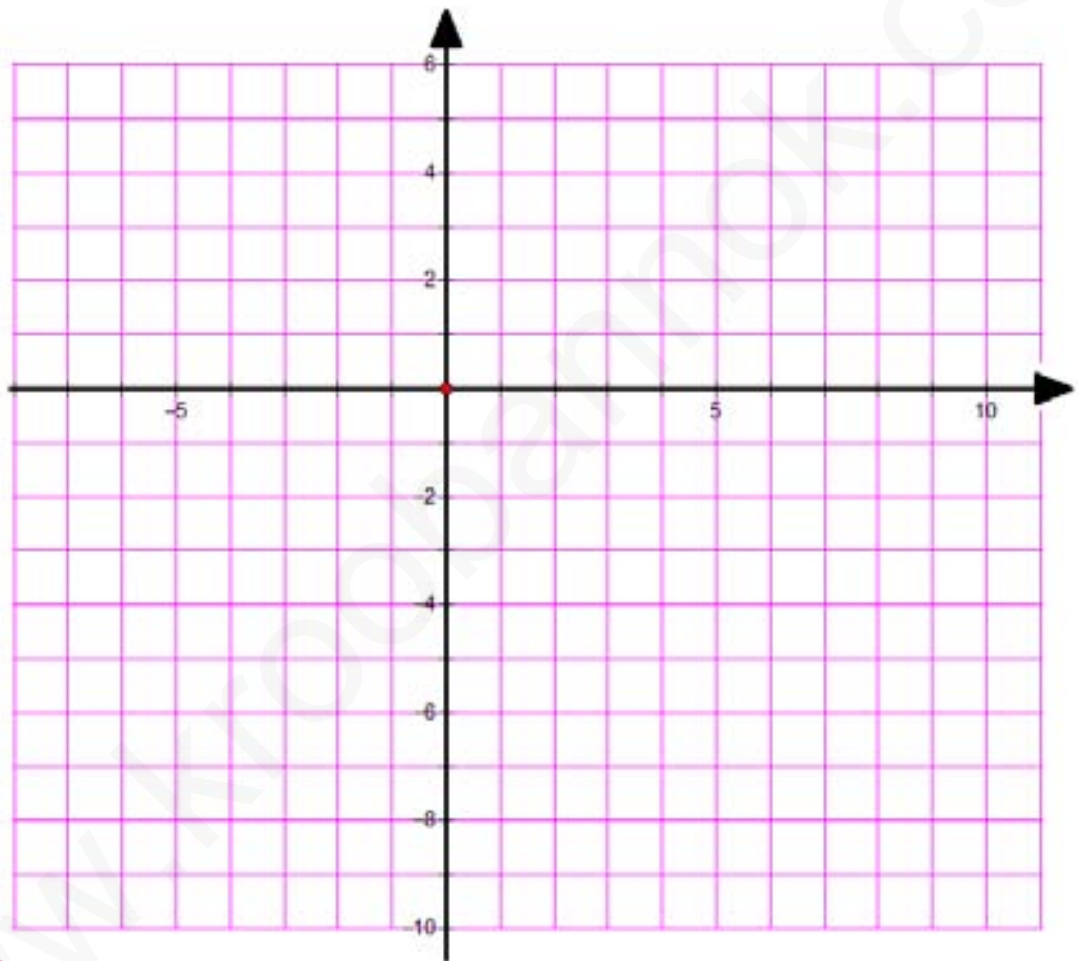
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.3 \quad 9(x-8)^2 - 25(y+1)^2 = 225$$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

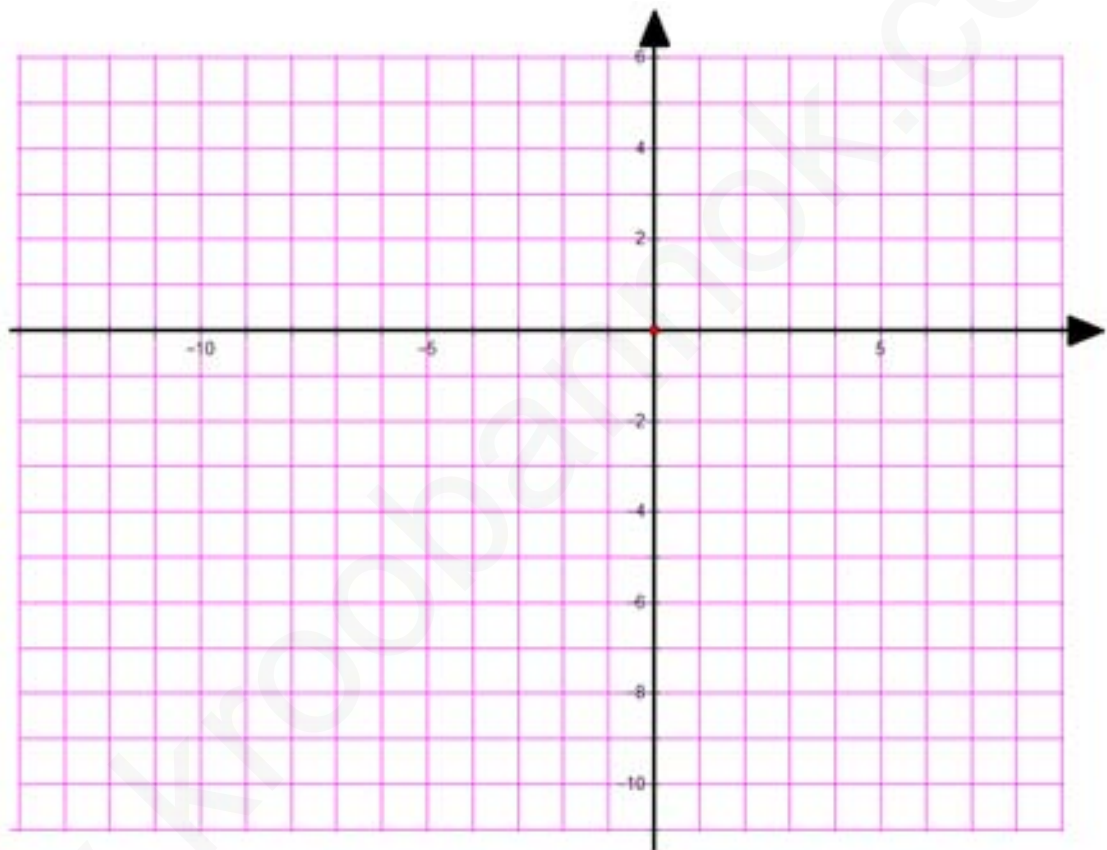
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.4 \quad 9(x-8)^2 - 25(y+1)^2 = 225$$

.....

.....

แกนตามขวาง คือ.....

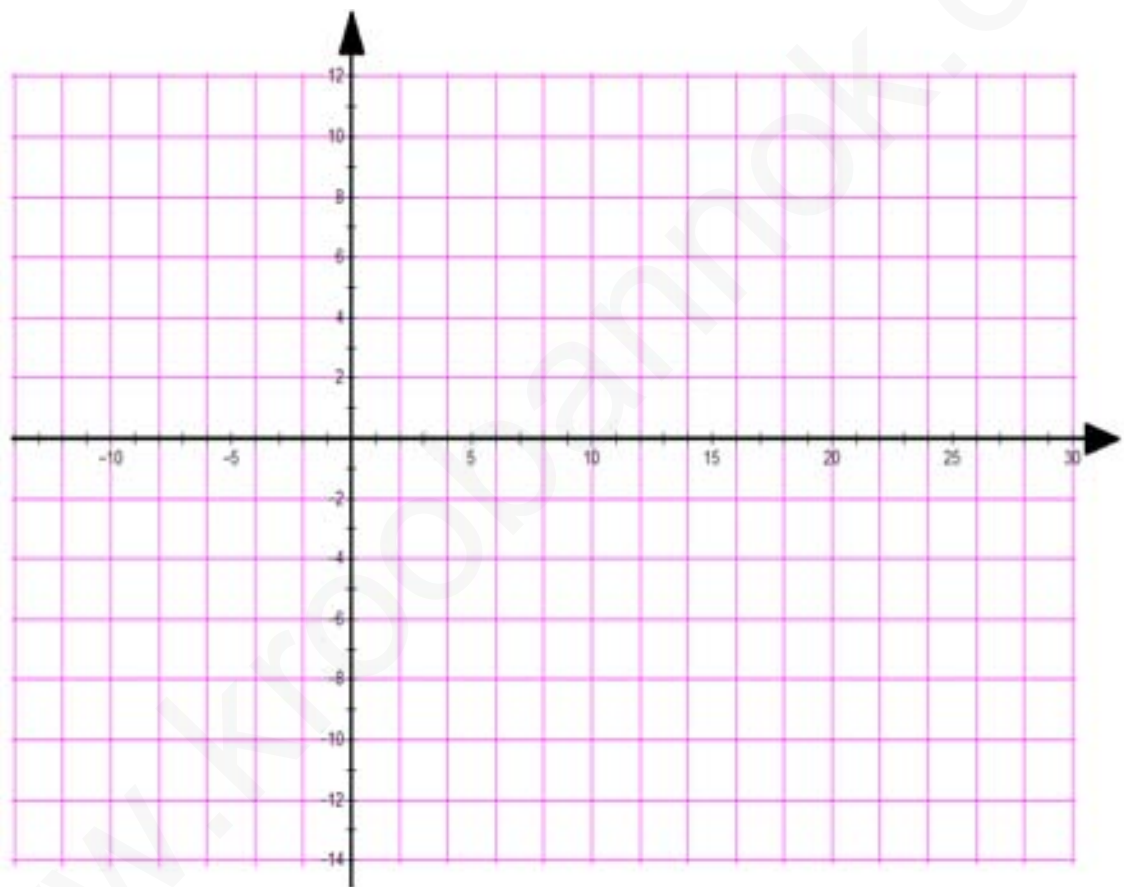
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดโฟกัส  $(-8,14)$  และ  $(-8,4)$  และมีแกนตามขวางยาว 8 หน่วย

.....

2.2 จุดศูนย์กลาง  $(8,3)$  และแกนตามขวางขนานแกน X ยาว 6 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย

.....

2.3 จุดศูนย์กลาง  $(3,3)$  และแกนตามขวางขนานแกน X ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

.....

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ  $(1,-5)$  แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 10 หน่วย

แกนสังยุคยาว 6 หน่วย

.....

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(5,-1)$  แกนตามขวางขนานแกน X แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

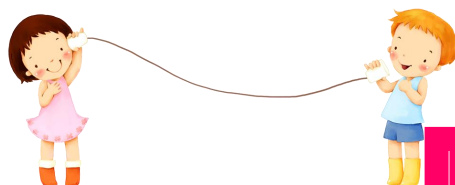
โฟกัสอยู่ที่  $(-5, -1)$  และ  $(15,-1)$

.....

2.6 แกนตามขวางขนานแกน X แกนสังยุคยาว 8 หน่วย โฟกัสอยู่ที่  $(-1, -2)$

และ  $(-9,-2)$

.....



ใบความรู้

## ชุดที่ 4

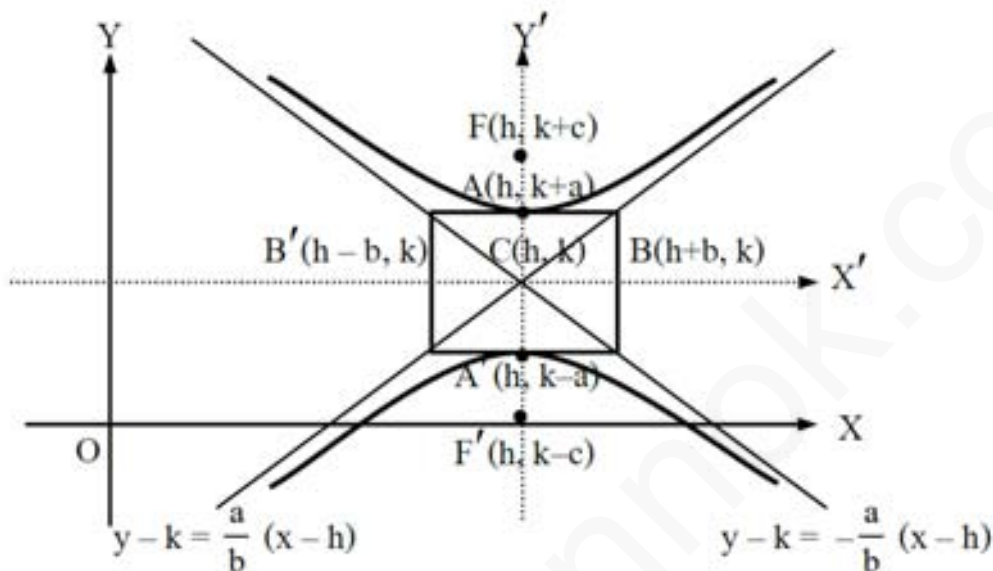
# ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(h,k)$ แกนตามขวางขนานแกน $y$

เมื่อเรียนแบบฝึกทักษะชุดนี้จบแล้ว เพื่อนๆจะต้อง

1. บอกความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $y$  ได้
2. เขียนกราฟและบอกส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(h,k)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $y$  ได้



ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่  $(0, 0)$  แกนตามขวางขนานแกน  $y$  ( $x = h$ )



สมการไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$  เมื่อ  $c^2 = a^2 + b^2$

1. แกนตามขวางขนานกับแกน  $X$  อยู่บนเส้นตรง  $x = h$
2. จุดศูนย์กลางที่จุด  $C(h, k)$
3. จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $F(h, k+c)$  และ  $F'(h, k-c)$
4. จุดยอดอยู่ที่จุด  $A(h, k+a)$  และ  $A'(h, k-a)$
5. จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด  $B(h+b, k)$  และ  $B'(h-b, k)$
6. สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ  $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$
7. ลาดัสเรกตัมยาวเท่ากับ  $\frac{2b^2}{a}$  หน่วย

**ตัวอย่างที่ 1** จงหาสมการมาตรฐานและเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ ( 2, 3)

แกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 6 หน่วย และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย

**วิธีทำ** จากโจทย์กำหนดให้แกนตามขวางยาว 6 หน่วย จะได้ว่า  $a = 3$

และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย จะได้ว่า  $b = 4$  ดังนั้น  $c = \sqrt{9+16} = 5$

ดังนั้นสมการของไฮเพอร์โบลา คือ  $\frac{(y-2)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^2}{4^2} = 1$

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $F(h, k+c) = (2, 3+5) = (2, 8)$

และ  $F'(h, k-c) = (2, 3-5) = (2, -2)$

จุดยอดอยู่ที่จุด  $A(h, k+a) = (2, 3+3) = (2, 6)$

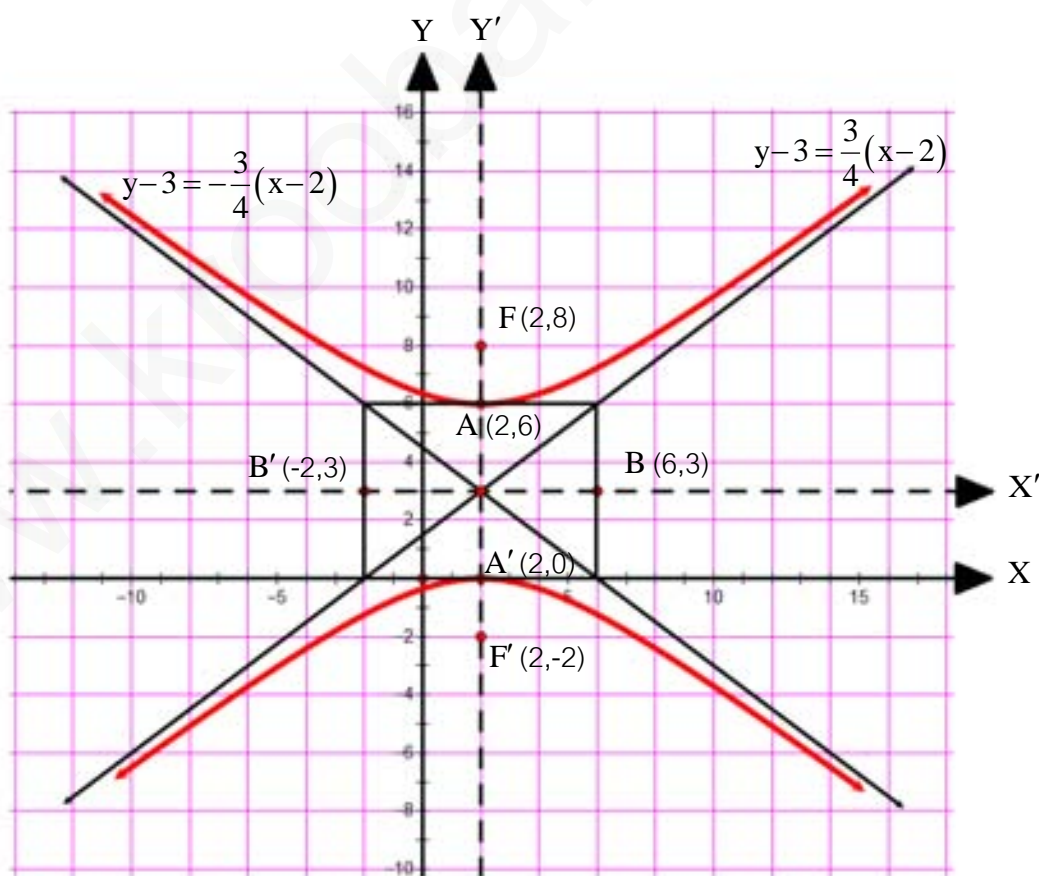
และ  $A'(h, k-a) = (2, 3-3) = (2, 0)$

จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด  $B(h+b, k) = (2+4, 3) = (6, 3)$

และ  $B'(h-b, k) = (2-4, 3) = (-2, 3)$

สมการเส้นกำกับ(asymptotes) คือ  $y-3 = \pm \frac{3}{4}(x-2)$

เขียนกราฟได้ดังนี้



**ตัวอย่างที่ 2** จากสมการไฮเพอร์โบลา  $9y^2 - 25x^2 - 72y - 100x = 181$  จงหาจุดศูนย์กลาง  
จุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายแกนสังยุค สมการเส้นกำกับ ความยาวลาตัสเรกตัม  
พร้อมทั้งเขียนกราฟ

**วิธีทำ** เขียนสมการไฮเพอร์โบลาให้อยู่ในรูมาตรฐาน ดังนี้

$$9y^2 - 25x^2 - 72y - 100x = 181$$

$$9(y^2 - 8y) - 25(x^2 + 4x) = 181$$

$$9(y^2 - 8y + 16) - 25(x^2 + 4x + 4) = 181 + 144 - 144$$

$$9(y - 4)^2 - 25(x + 2)^2 = 144$$

$$\frac{(y-4)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$$

ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางขนานแกน  $y$  จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(h, k) = (-2, 4)$

จะได้ว่า  $a^2 = 16$  และ  $b^2 = 9$  นั่นคือ  $a = 4$ ,  $b = 3$

หาค่า  $c$  จาก  $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$  จะได้  $c = 5$

จุดยอดอยู่ที่จุด  $A(h, k + a) = (-2, 4+4) = (-2, 8)$

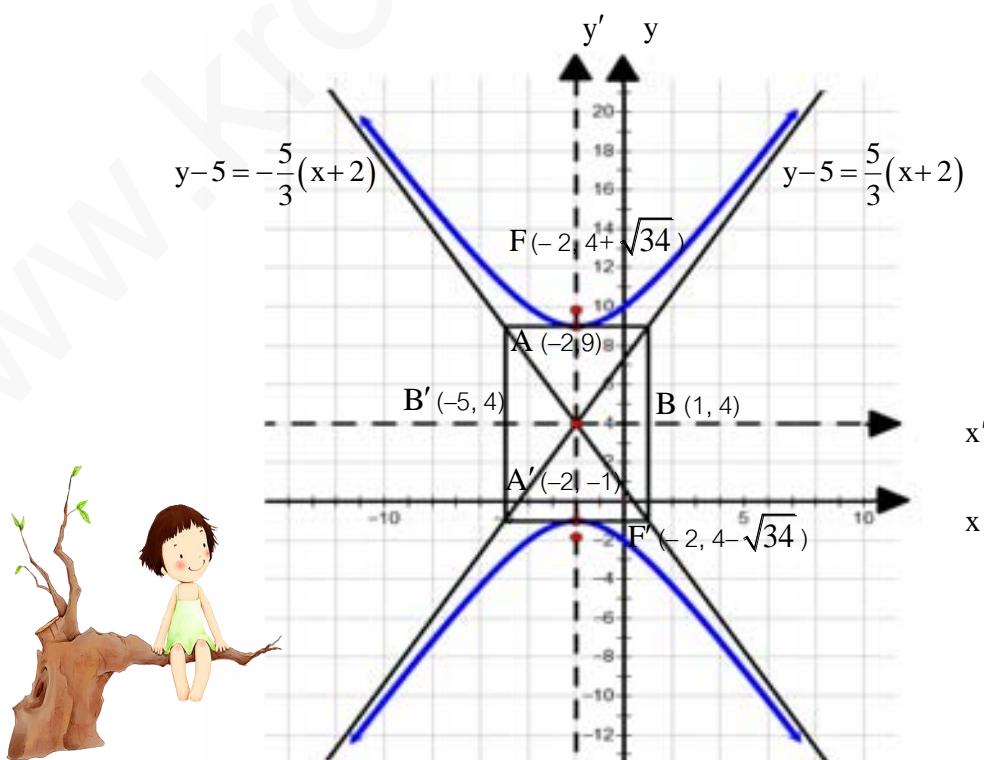
และ  $A'(h, k - a) = (-2, 4-4) = (-2, 0)$

จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่จุด  $B(h + b, k) = (-2+3, 4) = (1, 4)$

และ  $B'(h - b, k) = (-2-3, 4) = (-5, 4)$

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $F(h, k + c) = (-2, 4+5) = (-2, 9)$  และ  $F'(h, k - c) = (-2, 4-5) = (-2, 3)$

สมการเส้นกำกับ  $y - 4 = \pm \frac{5}{3}(x + 2)$



## แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 4



1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{64} = 1$

.....

.....

แกนตามขวางขนานแกน.....

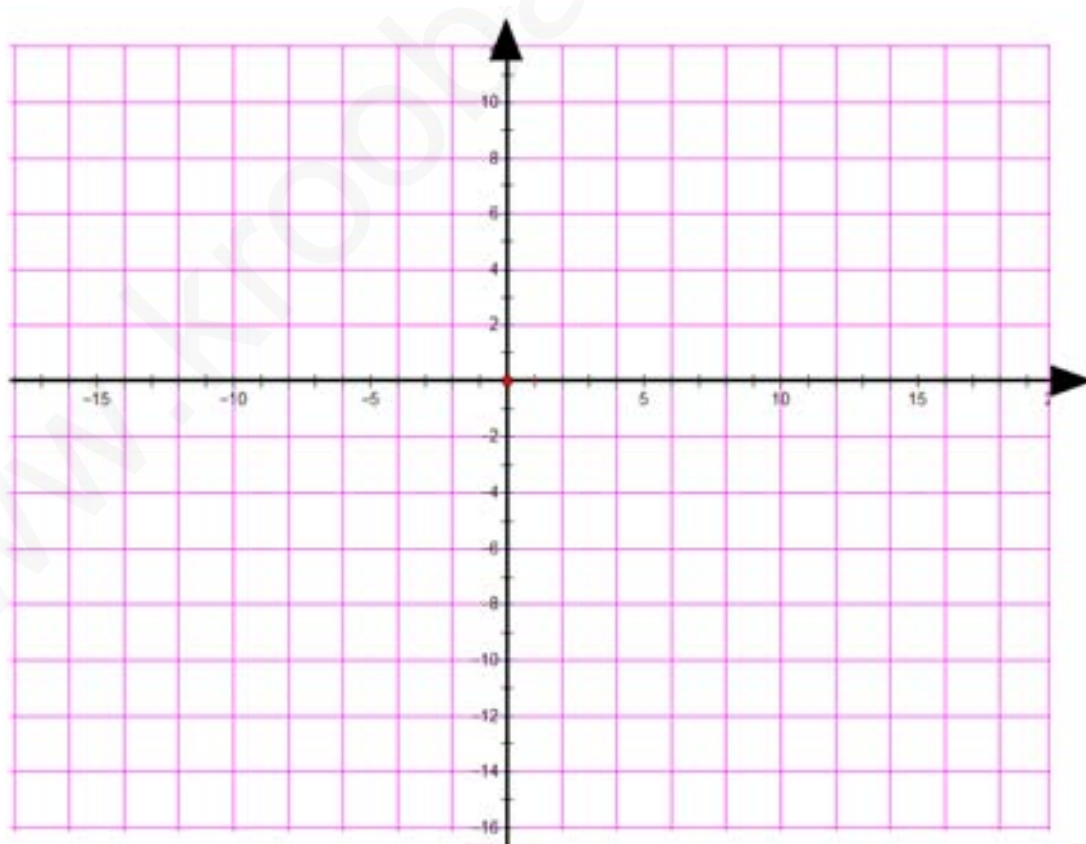
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.2 \quad y^2 - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

.....

.....

แกนตามขวางขนานแกน.....

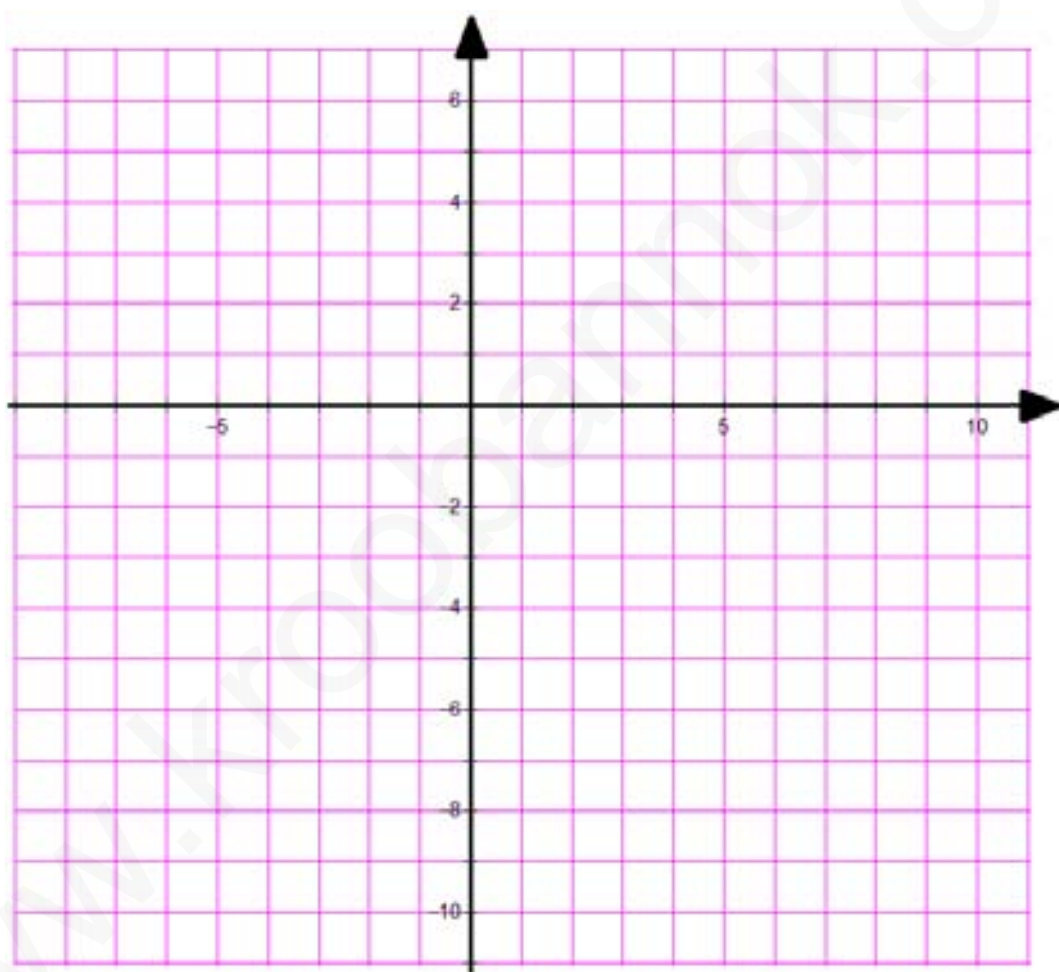
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.3 \quad 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 144$$

.....

.....

แกนตามขวางขนานแกน.....

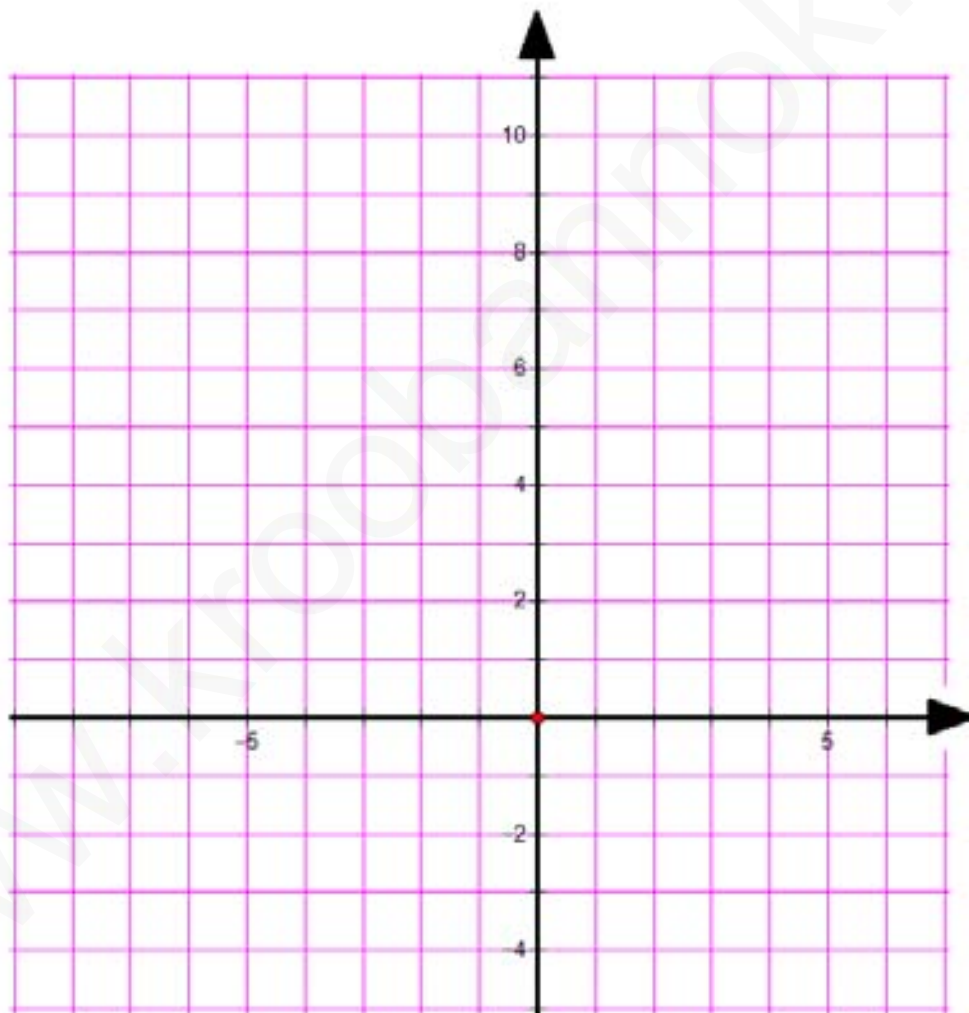
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



$$1.4 \quad 100y^2 - 36(x+4)^2 = 3600$$

.....

.....

แกนตามขวางขนานแกน.....

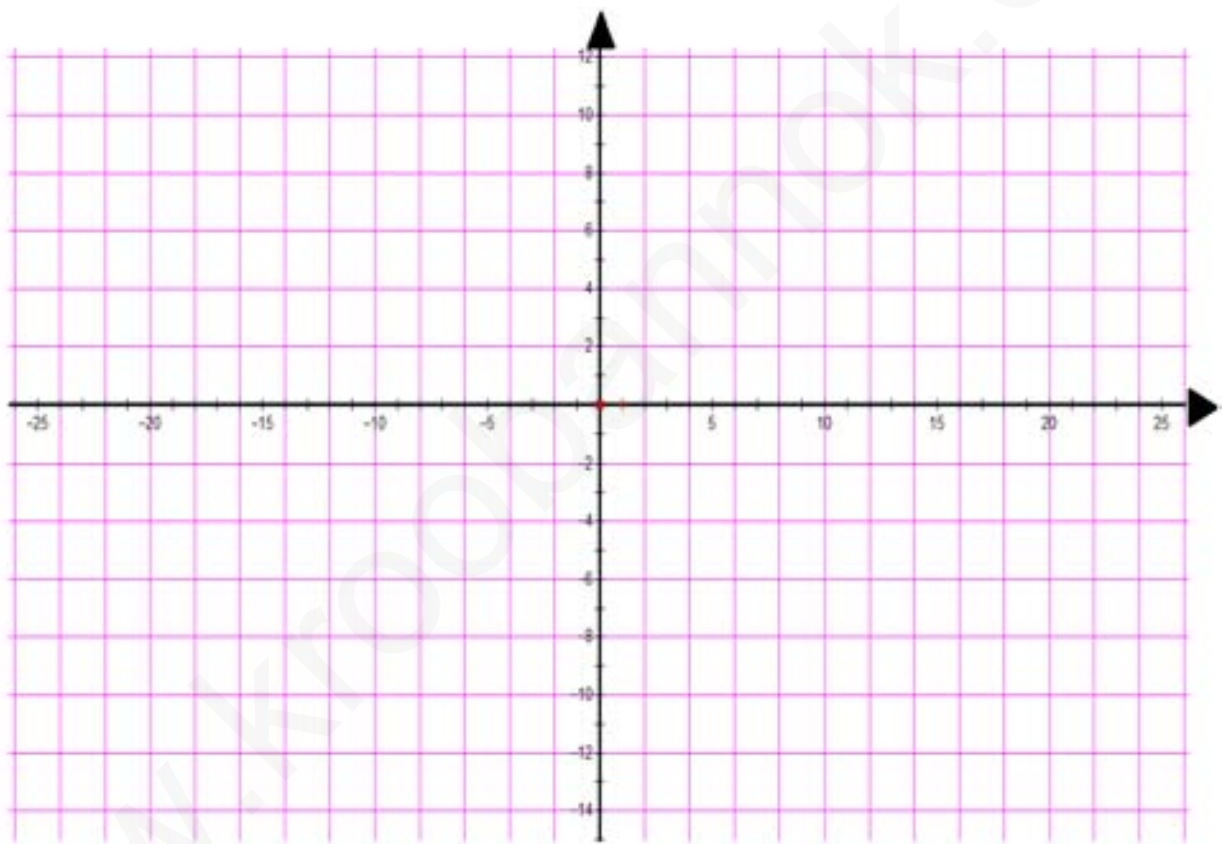
จุดศูนย์กลาง .....

จุดยอด.....

โฟกัส.....

จุดปลายแกนสังยุค.....

สมการเส้นกำกับ.....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดโฟกัส  $(-4, -8)$  และ  $(-14, -8)$  และมีแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

.....

2.2 จุดศูนย์กลาง  $(4, 0)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $Y$  ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

.....

2.3 จุดศูนย์กลาง  $(6, -4)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $Y$  ยาว 6 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 4 หน่วย

.....

2.4 จุดศูนย์กลาง  $(8, 2)$  และแกนตามขวางขนานแกน  $Y$  ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

.....

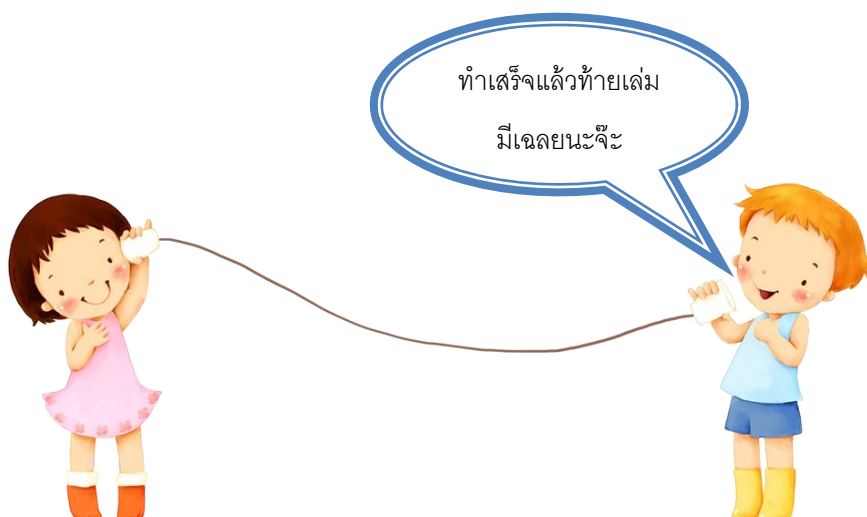
2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(5, -1)$  แกนตามขวางขนานแกน  $Y$  แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(5, 4)$  และ  $(5, -6)$

.....

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ  $(3, -1)$  แกนตามขวางขนานแกน  $Y$  ยาว 24 หน่วย

แกนสังยุคยาว 10 หน่วย



ทำแบบทดสอบ  
หลังเรียนกันดีกว่า



แบบทดสอบหลังเรียน  
 วิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4  
 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมาย **x** ในกระดาษคำตอบ

- ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, -5)$  และ  $(0, 5)$  และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด  $(0, \sqrt{29})$  คือข้อใด
  - $\{(x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{54} = 1\}$
  - $\{(x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1\}$
  - $\{(x, y) \mid \frac{y^2}{29} - \frac{x^2}{4} = 1\}$
  - $\{(x, y) \mid \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{54} = 1\}$
- ความสัมพันธ์  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1\}$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดเป็นจริง
  - แกนตามขวางยาว 2 หน่วย อยู่บนแกน  $y$
  - แกนตามขวางยาว 4 หน่วย อยู่บนแกน  $y$
  - แกนสังยุคยาว 3 หน่วย อยู่บนแกน  $x$
  - แกนสังยุคยาว 4 หน่วย อยู่บนแกน  $x$
- พิกัดของจุดยอดและโฟกัสของสมการของไฮเพอร์โบลา  $16x^2 + 25y^2 = 400$  คือข้อใด
  - จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-5, 0)$  และ  $(5, 0)$
  - จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-\sqrt{7}, 0)$  และ  $(\sqrt{7}, 0)$
  - จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(0, -\sqrt{7})$  และ  $(0, \sqrt{7})$
  - จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-5, 0)$  และ  $(5, 0)$

4. สมการของไฮเพอร์โบลาในข้อใดมีจุดยอดอยู่ที่  $(-2, 0)$  และ  $(2, 0)$  และโฟกัสอยู่ที่  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$

ก.  $3x^2 - y^2 - 1 = 0$

ข.  $3y^2 - x^2 - 12 = 0$

ค.  $3x^2 - y^2 - 12 = 0$

ง.  $3y^2 - x^2 - 1 = 0$

5. ความสัมพันธ์  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา

พิกัดของจุดยอดและโฟกัส คือ ข้อใด

ก. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-2\sqrt{5}, 0)$  และ  $(2\sqrt{5}, 0)$

ข. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-4, 0)$  และ  $(4, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-4\sqrt{5}, 0)$  และ  $(4\sqrt{5}, 0)$

ค. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-6, 0)$  และ  $(6, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-2\sqrt{3}, 0)$  และ  $(2\sqrt{3}, 0)$

ง. จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-6, 0)$  และ  $(6, 0)$  ; โฟกัสอยู่ที่จุด  $(-4\sqrt{3}, 0)$  และ  $(4\sqrt{3}, 0)$

6. สมการ  $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดเป็นจริง

ก. จุดยอดอยู่ที่  $(3, -5)$  และ  $(3, 3)$

ข. จุดยอดอยู่ที่  $(-1, 1)$  และ  $(7, 1)$

ค. โฟกัสอยู่ที่  $(-2, -1)$  และ  $(8, -1)$

ง. โฟกัสอยู่ที่  $(3, -1-\sqrt{7})$  และ  $(3, -1+\sqrt{7})$

7. สมการ  $9(x-1)^2 - 25(y+2)^2 = 225$  มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา ข้อใดถูกต้อง

ก. จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-5, 4)$

ข. จุดยอดอยู่ที่  $(3, 2)$

ค. โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(5+\sqrt{5}, -4)$

ง. แกนตามขวางยาว 3 หน่วย

8. สมการของไฮเพอร์โบลาซึ่งผลต่างของระยะจากจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด  $(-4, 3)$

และ  $(4, 3)$  ซึ่งเป็นโฟกัส เท่ากับ 6 หน่วย คือข้อใด

ก.  $25x^2 - 9(y-3)^2 = 225$

ข.  $7y^2 - 9(x-3)^2 = 63$

ค.  $7x^2 - 9(y-3)^2 = 63$

ง.  $25y^2 - 9(x-3)^2 = 225$

9. สมการของไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่  $(6, 3)$   $(-4, 3)$  มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่  $(5, 3)$  คือข้อใด

ก.  $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

ข.  $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

ค.  $\frac{(x+6)^2}{64} - \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

ง.  $\frac{(x-4)^2}{8} - \frac{(y+3)^2}{6} = 1$

10. สมการของไฮเพอร์โบลาในข้อใดมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(1, -2)$  และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่  $(1, 1)$

และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่  $(1, 3)$

ก.  $\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$

ข.  $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

ค.  $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{25} = 1$

ง.  $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1$

# ภาคผนวก



## เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน



ข้อ	คำตอบ
1	ก
2	ข
3	ง
4	ค
5	ข
6	ก
7	ค
8	ก
9	ง
10	ค



## เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1

1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1$

แกนตามขวาง คือ.....แกน x.....

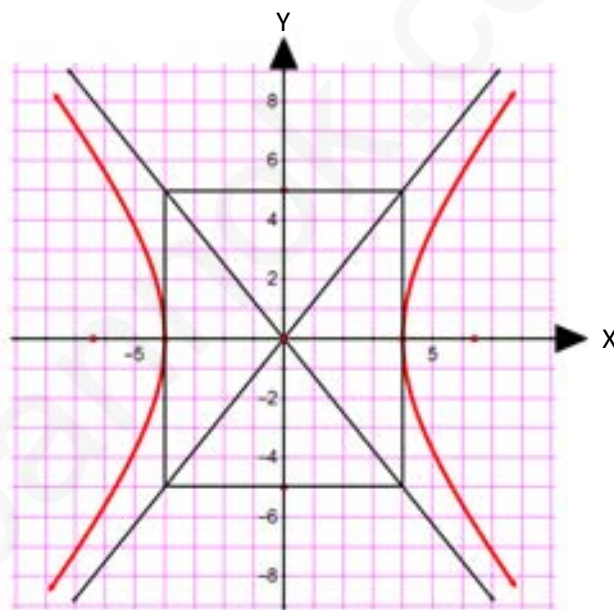
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(4,0) , (-4,0).....

โฟกัส...  $(\sqrt{41}, 0)$  ,  $(-\sqrt{41}, 0)$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (0,5) , (0,-5).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{5}{4}x$  .....



1.2  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

แกนตามขวาง คือ.....แกน x.....

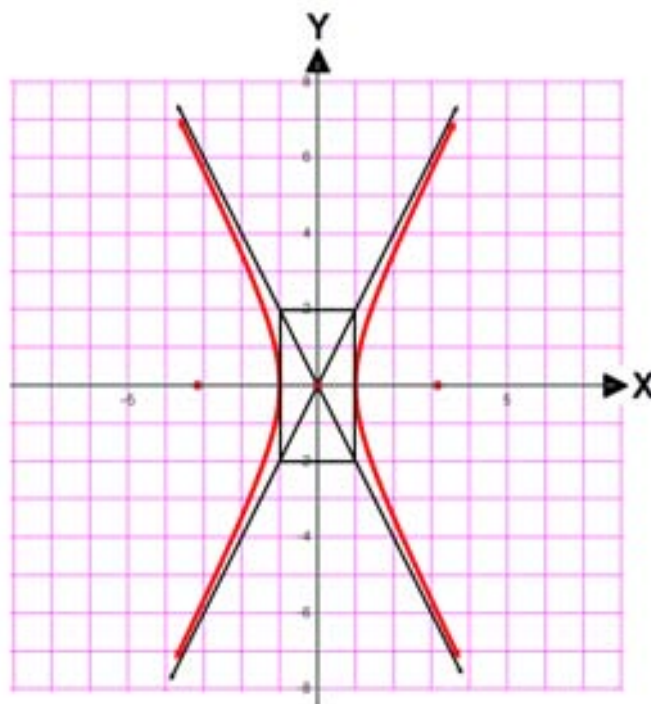
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(1,0) , (-1,0).....

โฟกัส...  $(\sqrt{5}, 0)$  ,  $(-\sqrt{5}, 0)$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (0,2) , (0,-2).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm 2x$  .....



$$1.3 \quad \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน x.....

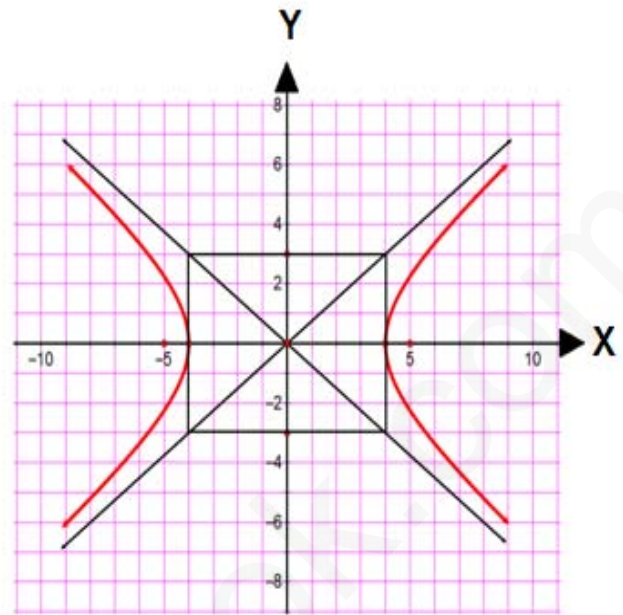
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(4,0) , (-4,0).....

โฟกัส.....(5,0) , (-5,0).....

จุดปลายแกนสังยุค.... (0,3) , (0,-3).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{3}{4}x$  .....



$$1.4 \quad \frac{x^2}{6^2} - \frac{y^2}{8^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน x.....

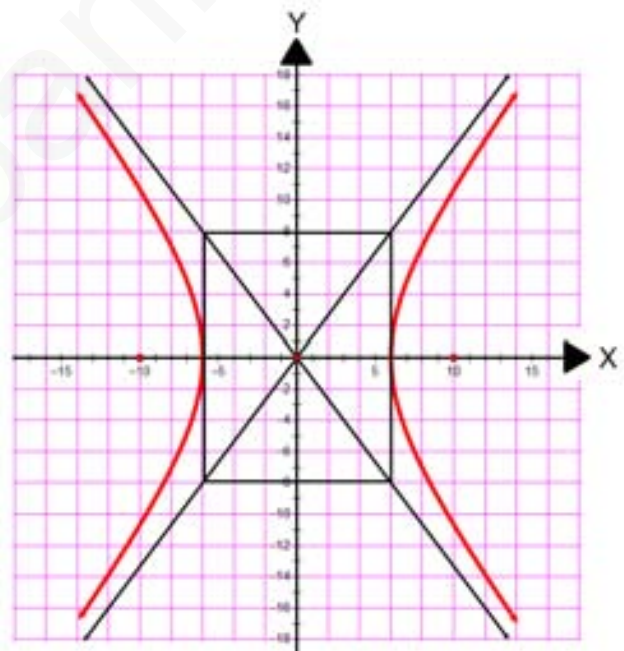
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(6,0) , (-6,0).....

โฟกัส..... (10,0) , (-10,0) .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (0,8) , (0,-8).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{4}{3}x$  .....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดศูนย์กลาง คือ จุดกำเนิด แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 14 หน่วย

จุดปลายแกนสังยุค คือจุด (0,-5)

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$$

2.2 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 12 หน่วย

แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$$

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 12 หน่วย

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-10,0)

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน X แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่ (-15, 0) และ (15,0)

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$$

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่ (-13, 0) และ (13,0)

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน X ยาว 10 หน่วย

แกนสังยุคยาว 4 หน่วย

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

## เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2

1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{4^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน  $y$ .....

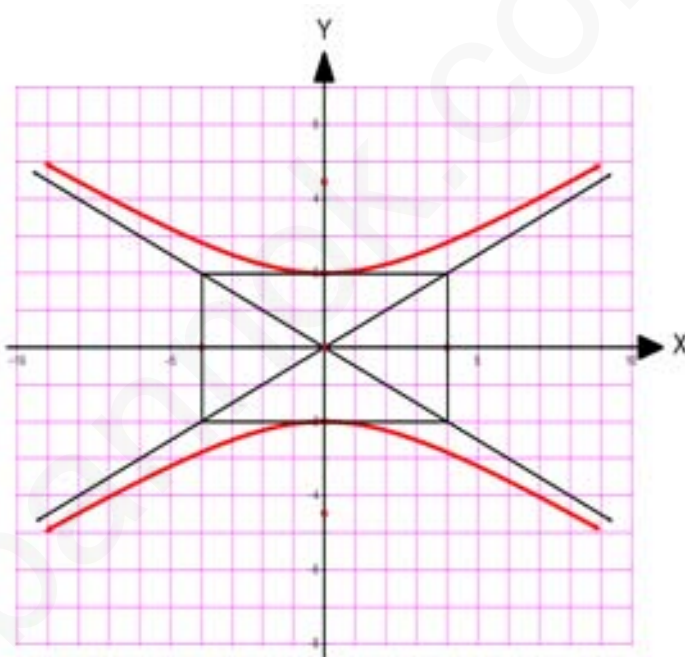
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(0,2) , (0,-2).....

โฟกัส....  $(0, 2\sqrt{5})$  ,  $(0, -2\sqrt{5})$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (4,0) , (-4,0).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{1}{2}x$  .....



1.2  $\frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{36} = 1$

$$\frac{y^2}{10^2} - \frac{x^2}{6^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน  $y$ .....

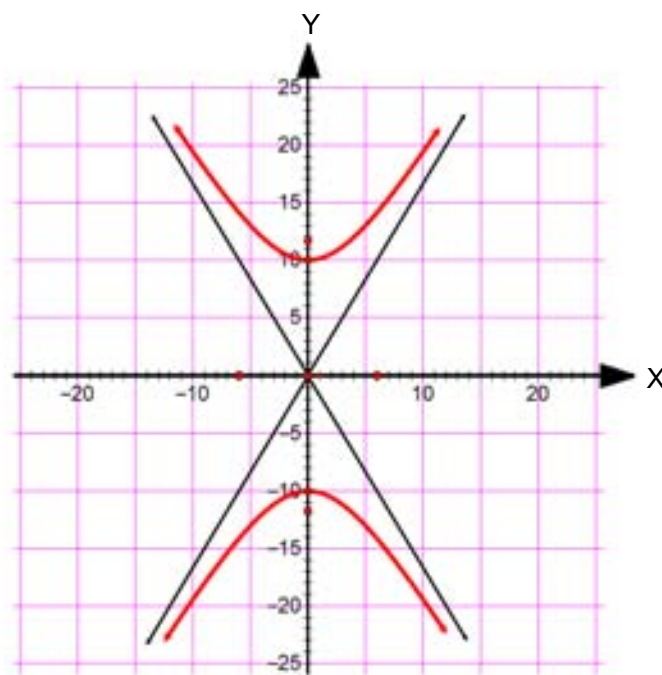
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(0,10) , (0,-10).....

โฟกัส....  $(0, 2\sqrt{34})$  ,  $(0, -2\sqrt{34})$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (6,0) , (-6,0).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{5}{3}x$  .....



1.3  $25y^2 - 9x^2 = 225$

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน  $y$ .....

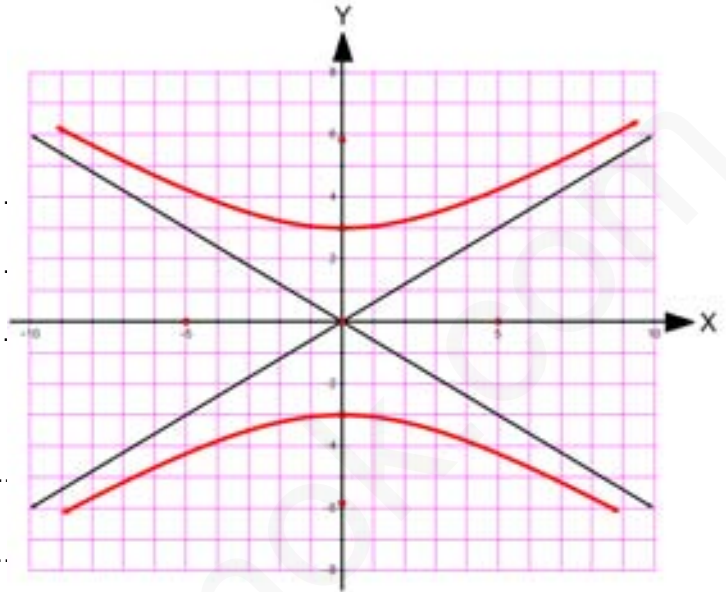
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(0,3) , (0,-3).....

โฟกัส....  $(0, \sqrt{34})$  ,  $(0, -\sqrt{34})$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (5,0) , (-5,0).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{3}{5}x$ .....



1.4  $36y^2 - 49x^2 = 1764$

$$\frac{y^2}{7^2} - \frac{x^2}{6^2} = 1$$

แกนตามขวาง คือ.....แกน  $y$ .....

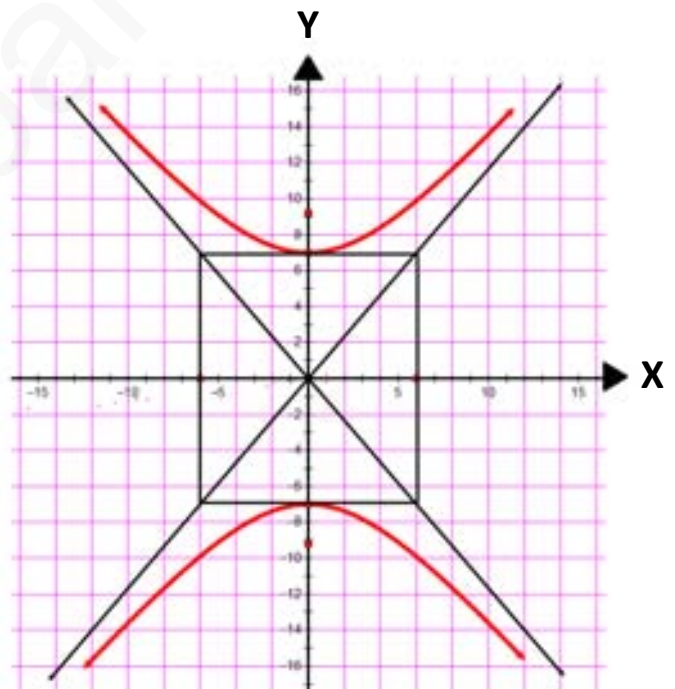
จุดศูนย์กลาง .....(0,0).....

จุดยอด.....(0,7) , (0,-7).....

โฟกัส....  $(0, \sqrt{85})$  ,  $(0, -\sqrt{85})$  .....

จุดปลายแกนสังยุค.... (6,0) , (-6,0).....

สมการเส้นกำกับ.....  $y = \pm \frac{7}{6}x$ .....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดยอดคือ จุด (0,5) , (0,-5) แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

2.2 โฟกัสคือ (0,8) , (0,-8) จุดปลายแกนสังยุค คือจุด (5,0) , (-5,0)

$$\frac{y^2}{39} - \frac{x^2}{25} = 1$$

2.3 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน Y ยาว 16 หน่วย

โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (0,10)

$$\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$$

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน Y แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่ (0, 15) และ (0,-15)

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{144} = 1$$

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน Y ยาว 12 หน่วย

แกนสังยุคยาว 16 หน่วย

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ (0,0) แกนตามขวางคือ แกน Y แกนสังยุคยาว 16 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่ (0, 10) และ (0,-10)

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

## เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3



1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

$$1.1 \quad \frac{(x+3)^2}{100} - \frac{(y+6)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{10^2} - \frac{(y+6)^2}{12^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน.....x.....

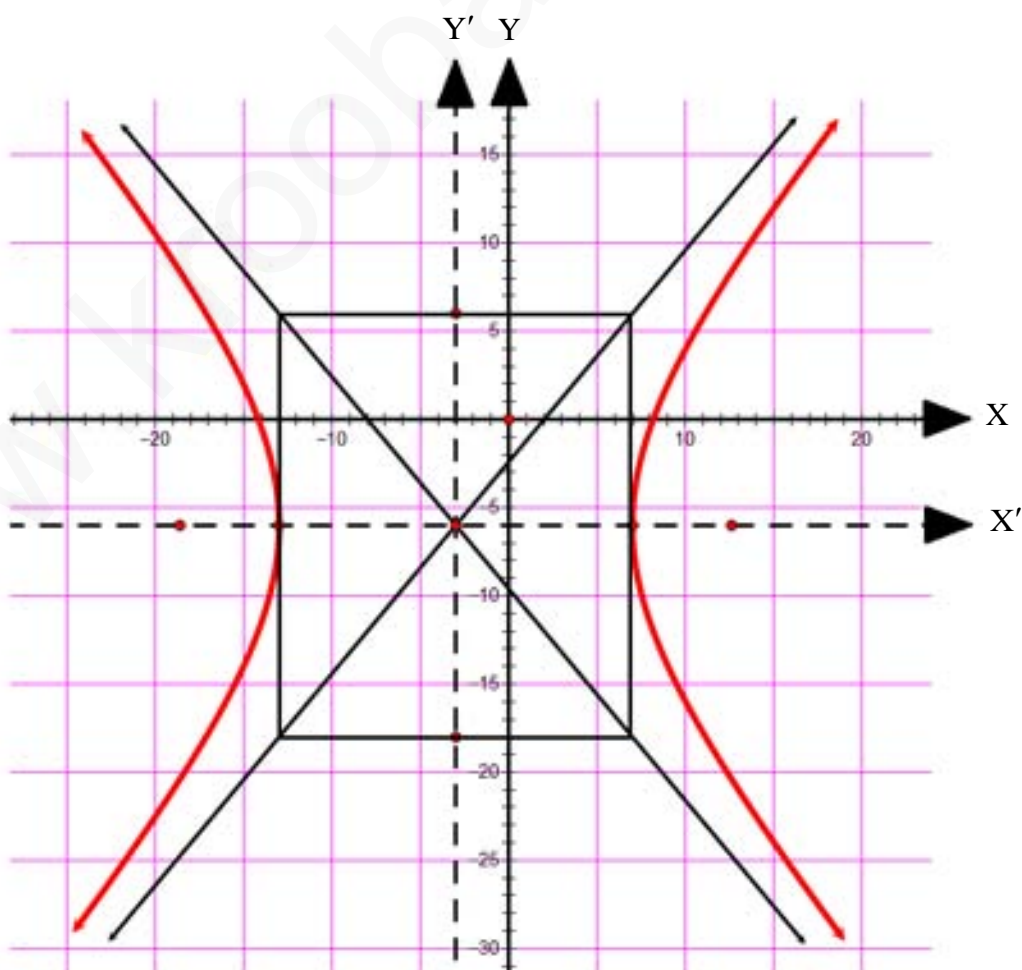
จุดศูนย์กลาง .....(-3,-6).....

จุดยอด.....(7, -6) , (-13, -6).....

โฟกัส  $(-3+2\sqrt{61}, -6)$  ,  $(-3-2\sqrt{61}, -6)$

จุดปลายแกนสังยุค.... (-3,6) , (-3,-18).....

สมการเส้นกำกับ...  $y + 6 = \pm \frac{6}{5}(x + 3)$  ....



$$1.2 \quad \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(y+3)^2}{4^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน..... $x$ .....

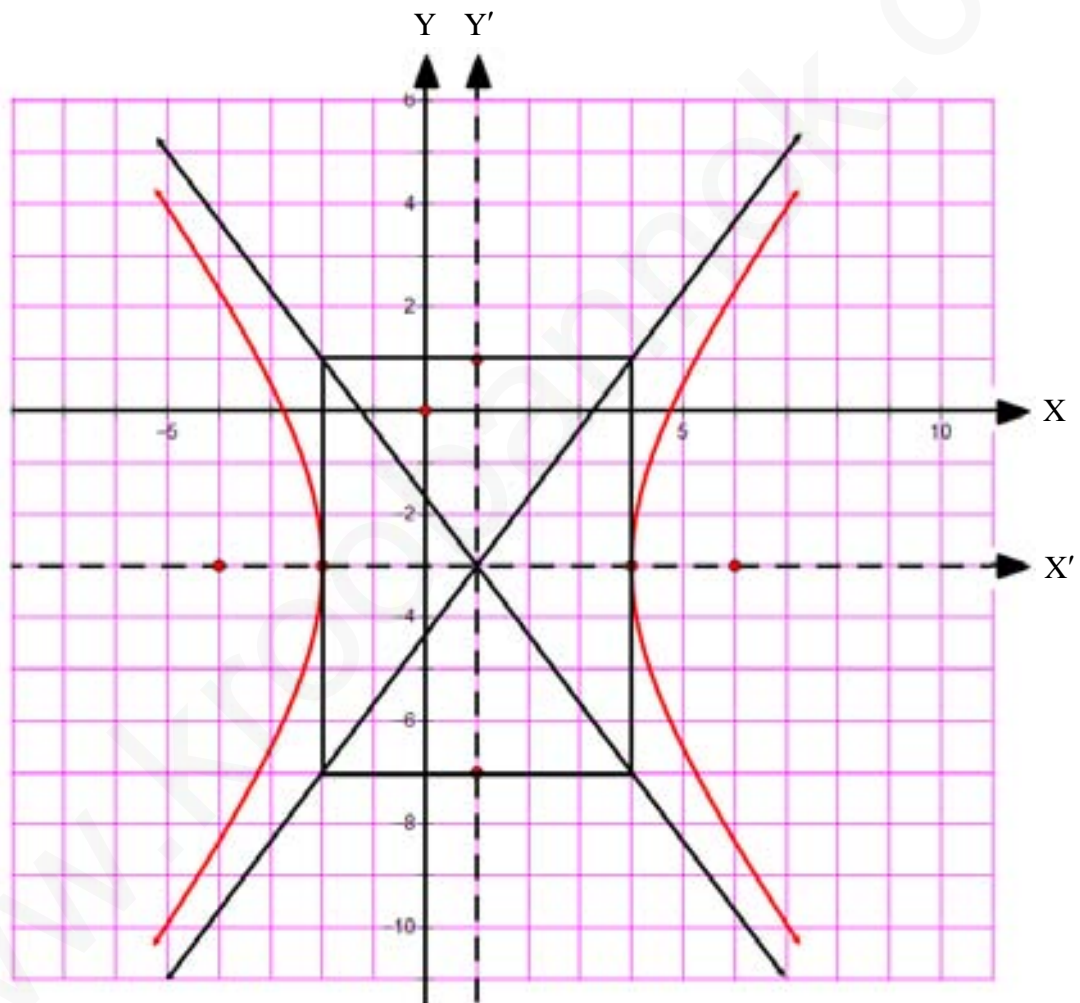
จุดศูนย์กลาง .....  $(1, -3)$ .....

จุดยอด.....  $(4, -3)$  ,  $(-2, -3)$ .....

โฟกัส .....  $(-4, -3)$  ,  $(6, -3)$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(1, 1)$  ,  $(1, -7)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y + 3 = \pm \frac{4}{3}(x - 1)$ .....



$$1.3 \quad 9(x+3)^2 - 16(y+3)^2 = 144$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{4^2} - \frac{(y+3)^2}{3^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน..... $x$ .....

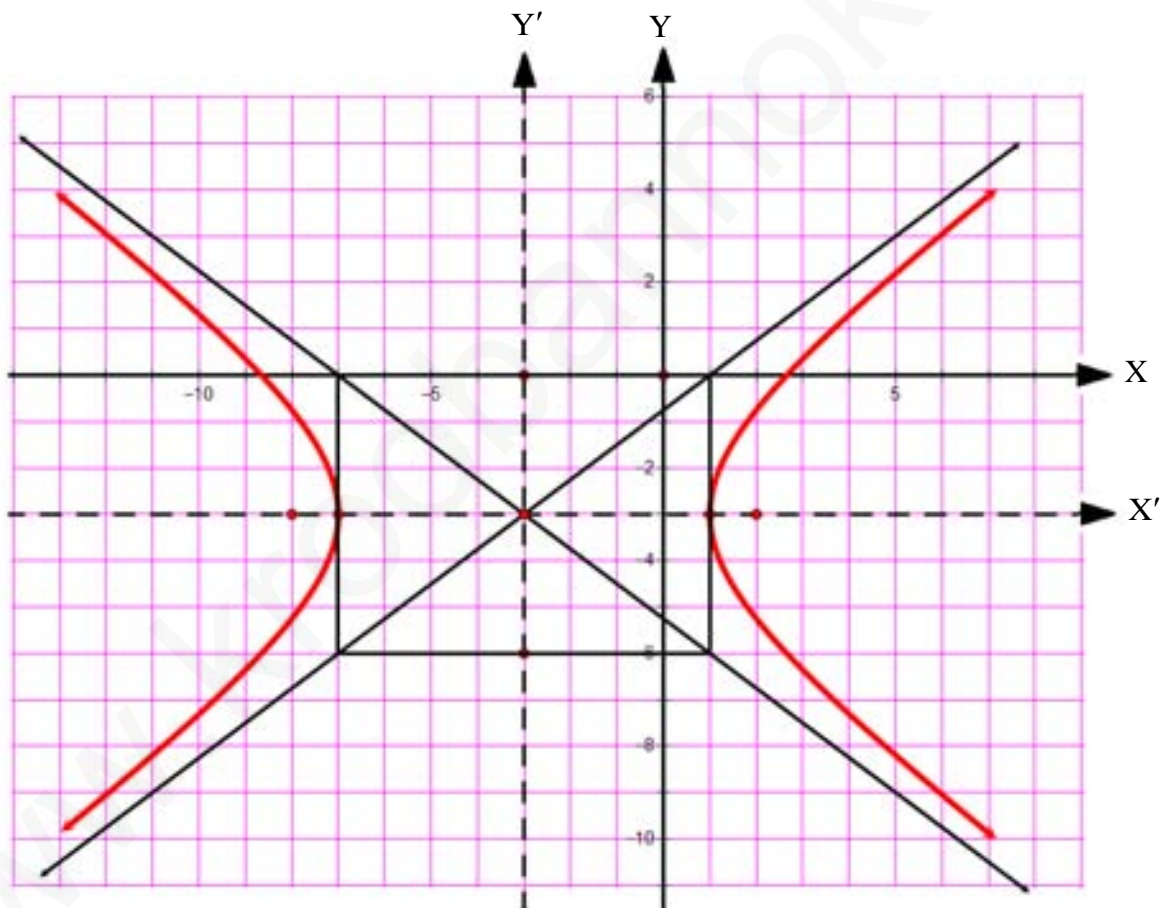
จุดศูนย์กลาง .....  $(-3, -3)$ .....

จุดยอด.....  $(-8, -3)$  ,  $(2, -3)$ .....

โฟกัส .....  $(-8, -3)$  ,  $(2, -3)$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(-3, 0)$  ,  $(-3, -6)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y + 3 = \pm \frac{3}{4}(x + 3)$  .....



$$1.4 \quad 9(x-8)^2 - 25(y+1)^2 = 225$$

$$\frac{(x-8)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-8)^2}{5^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน.....x.....

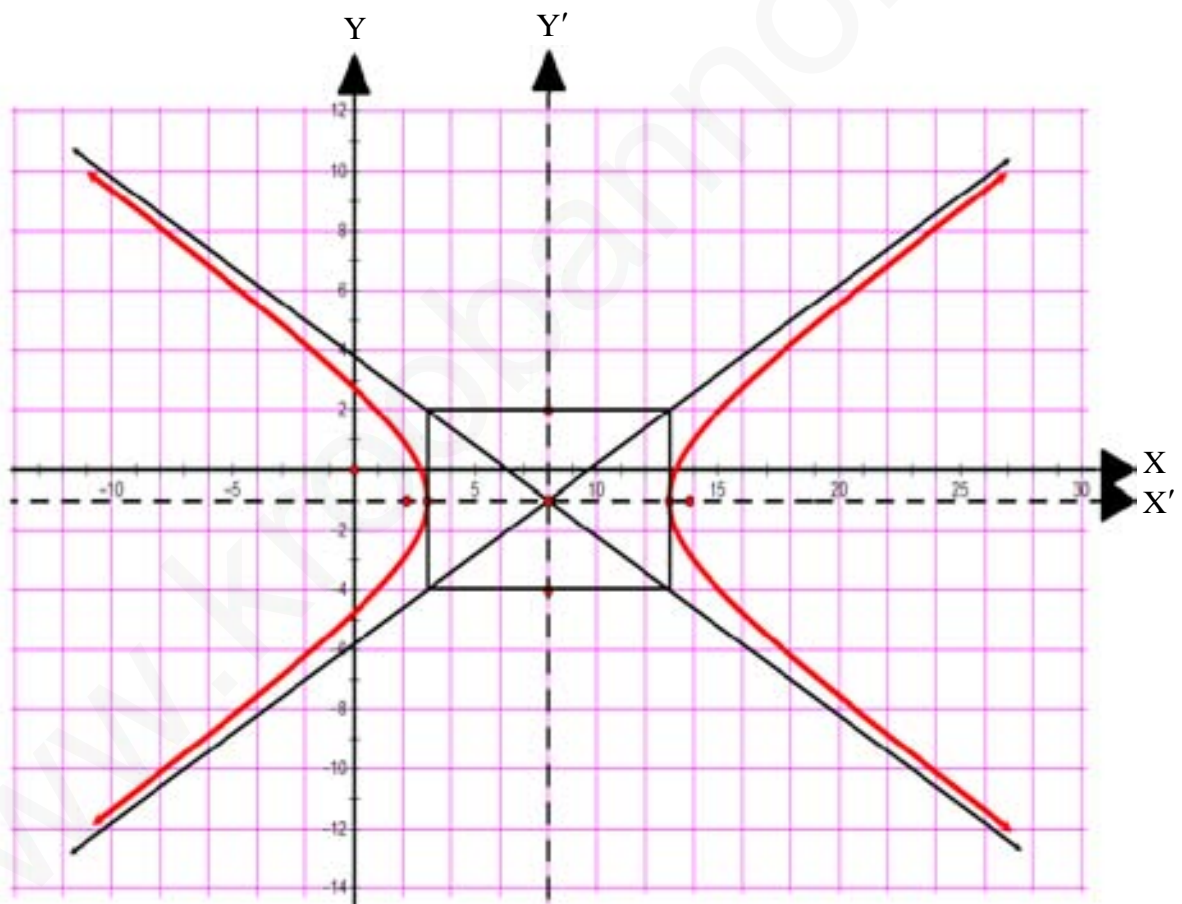
จุดศูนย์กลาง ..... (8, -1).....

จุดยอด..... (13, -1) , (3, -1).....

โฟกัส . (8 + √34, -1) , (8 - √34, -1) ..

จุดปลายแกนสังยุค.... (8, 2) , (8, -4).....

สมการเส้นกำกับ...  $y+1 = \pm \frac{3}{5}(x-8)$  .....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดโฟกัส  $(-8,14)$  และ  $(-8,4)$  และมีแกนตามขวางยาว 8 หน่วย

$$\frac{(x+9)^2}{9} - \frac{(y+8)^2}{16} = 1$$

2.2 จุดศูนย์กลาง  $(8,3)$  และแกนตามขวางขนานแกน X ยาว 6 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย

$$\frac{(x-8)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

2.3 จุดศูนย์กลาง  $(3,3)$  และแกนตามขวางขนานแกน X ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

2.4 จุดศูนย์กลาง คือ  $(1,-5)$  แกนตามขวางขนานแกน X ยาว 10 หน่วย

แกนสังยุคยาว 6 หน่วย

$$\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(5,-1)$  แกนตามขวางขนานแกน X แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(-5, -1)$  และ  $(15,-1)$

$$\frac{(x-5)^2}{64} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

2.6 แกนตามขวางขนานแกน X แกนสังยุคยาว 8 หน่วย โฟกัสอยู่ที่  $(-1, -2)$

และ  $(-9,-2)$

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

## เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 4

1. ให้ออกแกนตามขวาง จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

$$1.1 \quad \frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{64} = 1$$

$$\frac{(y+2)^2}{6^2} - \frac{(x-1)^2}{8^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน.....  $y$ .....

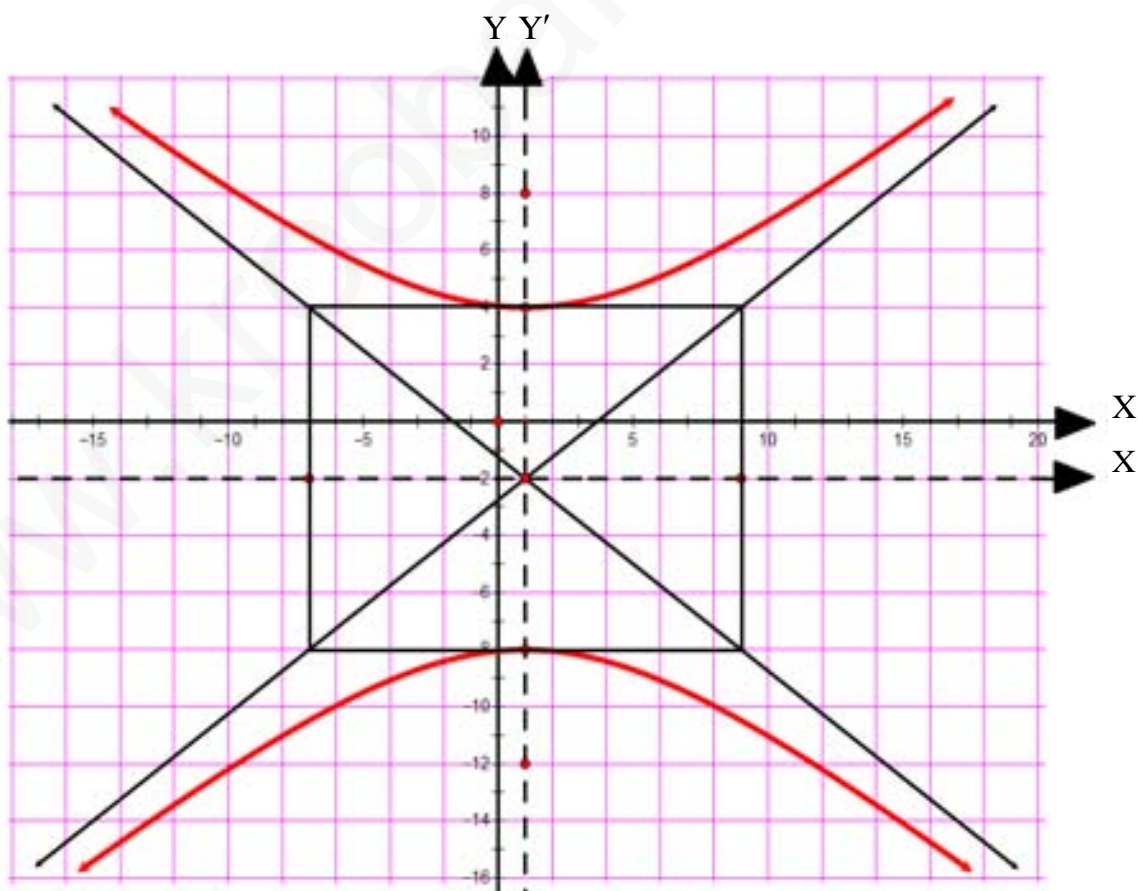
จุดศูนย์กลาง .....  $(1, -2)$ .....

จุดยอด.....  $(1, 4)$  ,  $(1, -8)$ .....

โฟกัส.....  $(1, 8)$  ,  $(1, -12)$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(-7, -2)$  ,  $(9, -2)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y + 2 = \pm \frac{3}{4}(x - 1)$  .....



$$1.2 \quad y^2 - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

$$y^2 - \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน.....  $y$ .....

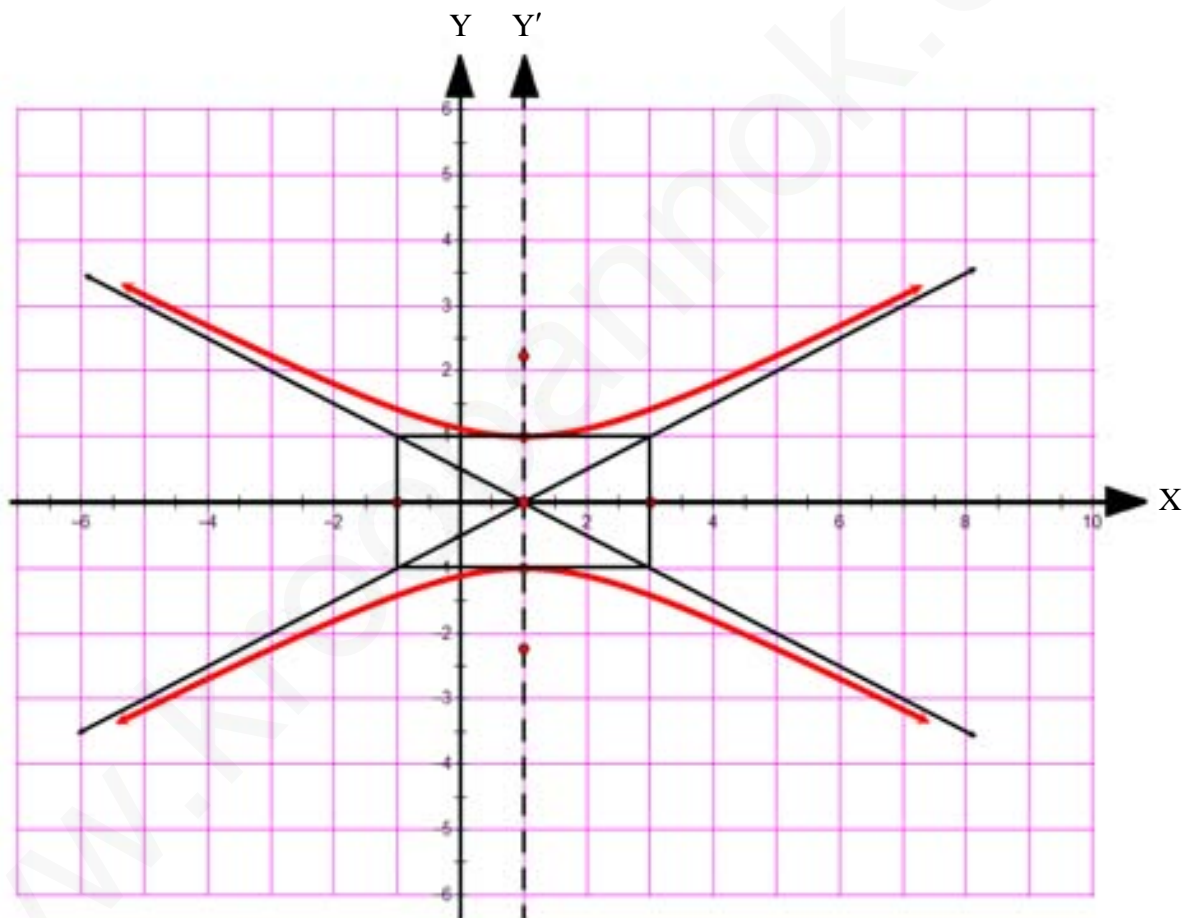
จุดศูนย์กลาง .....  $(1, 0)$ .....

จุดยอด.....  $(1, 1)$  ,  $(1, -1)$ .....

โฟกัส.....  $(1, -\sqrt{5})$  ,  $(1, \sqrt{5})$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(-1, 0)$  ,  $(3, 0)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y = \pm \frac{1}{4}(x-1)$  .....



$$1.3 \quad 9(y-3)^2 - 16(x+2)^2 = 144$$

$$\frac{(y-3)^2}{4^2} - \frac{(x+2)^2}{3^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน..... y.....

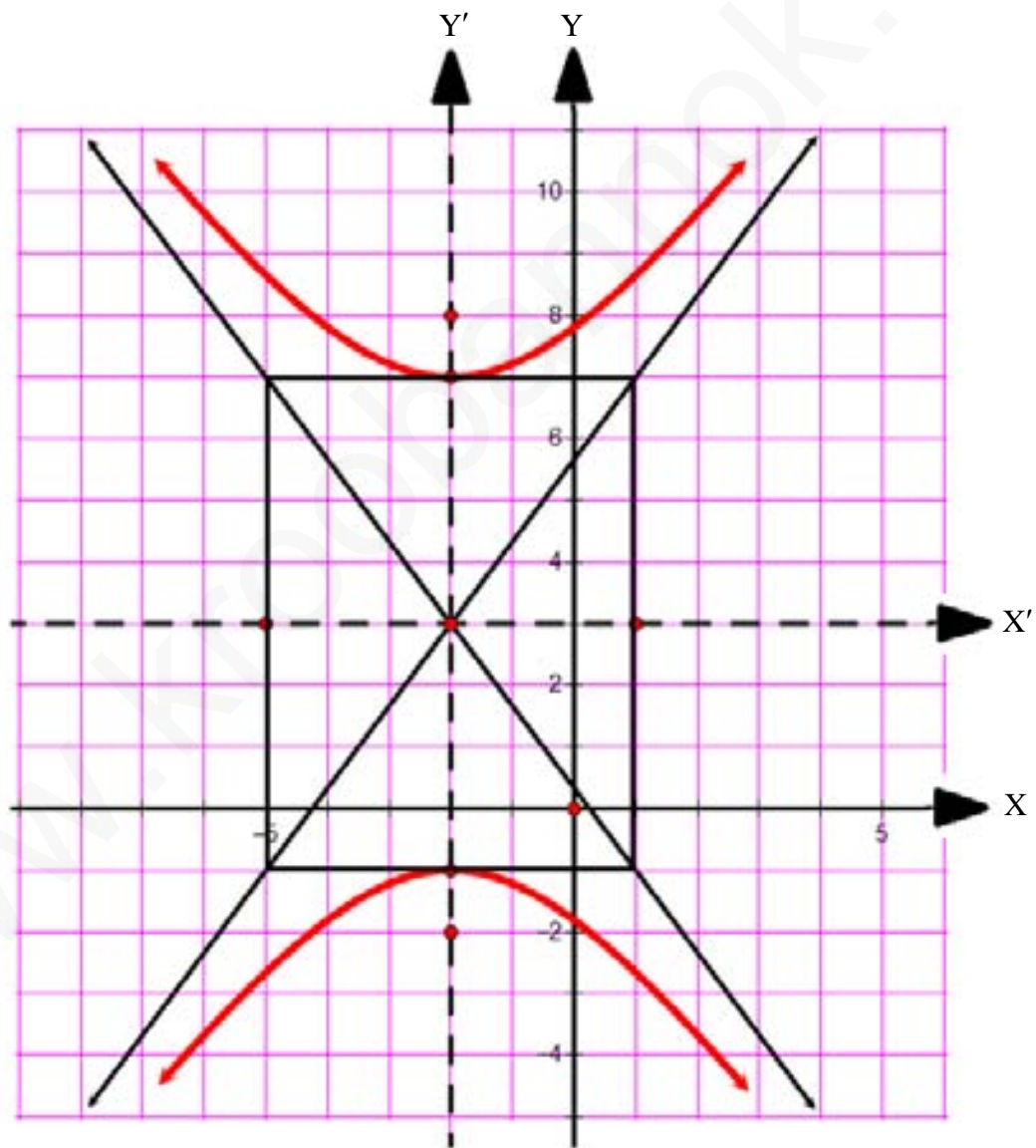
จุดศูนย์กลาง .....  $(-2, 3)$ .....

จุดยอด.....  $(-2, 7)$  ,  $(-2, -1)$ .....

โฟกัส.....  $(-2, 8)$  ,  $(-2, -2)$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(-5, 3)$  ,  $(1, 3)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y-3 = \pm \frac{4}{3}(x+2)$  .....



$$1.4 \quad 100y^2 - 36(x+4)^2 = 3600$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{(x+4)^2}{100} = 1$$

$$\frac{y^2}{6^2} - \frac{(x+4)^2}{10^2} = 1$$

แกนตามขวางขนานแกน.....  $y$ .....

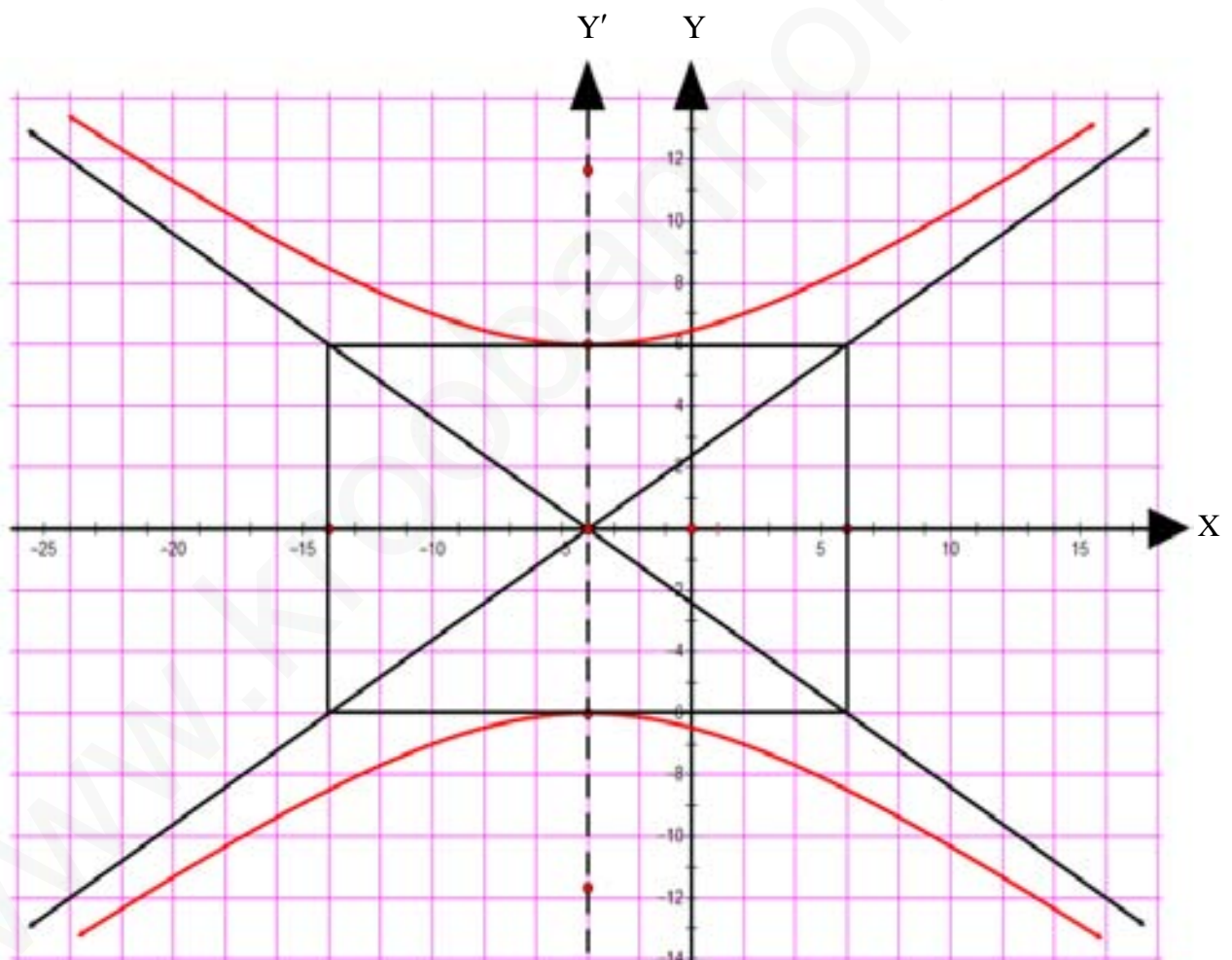
จุดศูนย์กลาง .....  $(-4, 0)$ .....

จุดยอด.....  $(-4, 6)$  ,  $(-4, -6)$ .....

โฟกัส..  $(-4, 2\sqrt{34})$  ,  $(-4, -2\sqrt{34})$ .....

จุดปลายแกนสังยุค....  $(6, 0)$  ,  $(-14, 0)$ .....

สมการเส้นกำกับ...  $y = \pm \frac{3}{5}(x+4)$ .....



## 2. จงสร้างสมการมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

2.1 จุดโฟกัส  $(-4, -8)$  และ  $(-14, -8)$  และมีแกนตามขวางยาว 6 หน่วย

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{16} = 1$$

2.2 จุดศูนย์กลาง  $(4, 0)$  และแกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

$$\frac{y^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

2.3 จุดศูนย์กลาง  $(6, -4)$  และแกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 6 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 4 หน่วย

$$\frac{(y+4)^2}{9} - \frac{(x-6)^2}{4} = 1$$

2.4 จุดศูนย์กลาง  $(8, 2)$  และแกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 4 หน่วย

และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-8)^2}{9} = 1$$

2.5 จุดศูนย์กลาง คือ  $(5, -1)$  แกนตามขวางขนานแกน Y แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

โฟกัสอยู่ที่  $(5, 4)$  และ  $(5, -6)$

$$\frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$$

2.6 จุดศูนย์กลาง คือ  $(3, -1)$  แกนตามขวางขนานแกน Y ยาว 24 หน่วย

แกนสังยุคยาว 10 หน่วย

$$\frac{(y+1)^2}{144} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

## เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ข
2	ข
3	ง
4	ค
5	ก
6	ก
7	ค
8	ค
9	ก
10	ง



ตารางบันทึก  
การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์  
เรื่อง ไฮเพอร์โบลา



ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

แบบทดสอบ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	หมายเหตุ
ก่อนเรียน	10		
หลังเรียน	10		
ผลการพัฒนา			

แบบฝึกทักษะ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	หมายเหตุ
ชุดที่ 1	10		
ชุดที่ 2	10		
ชุดที่ 3	10		
ชุดที่ 4	10		

## แบบประเมินผลการทำแบบฝึกทักษะ

(เล่มที่ 5 ไฮเพอร์โบลา)

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ครั้งที่	วัน/เดือน/ปี	คะแนนตามระดับคุณภาพ				น้ำหนักคะแนน	คะแนนที่ได้ (คะแนน x น้ำหนัก)
		4	3	2	1		
1						5	
2						5	
3						5	
4						5	
รวม						20	

$$\text{ร้อยละของคะแนนรวม} = \frac{\text{คะแนนที่ได้รวม}}{(\text{น้ำหนักคะแนนรวม} \times 4)} \times 100 = \dots\dots\dots$$

สรุประดับคุณภาพของผลงาน ☐ ดีมาก ☐ ดี ☐ พอใช้ ☐ ต้องปรับปรุง

ข้อเสนอแนะ/ปัญหาที่ควรแก้ไข

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน

## หมายเหตุ

ระดับดีมาก หมายถึง ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 80 ขึ้นไป

ระดับดี หมายถึง ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 60 – 79

ระดับพอใช้ หมายถึง ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 40 – 59

ระดับต้องปรับปรุง หมายถึง ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละต่ำกว่า 40

## เกณฑ์การประเมินแบบฝึกทักษะ

คะแนน(ระดับคุณภาพ)	เกณฑ์การพิจารณา
4 (ดีมาก)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำแบบฝึกทักษะครบถ้วน</li> <li>- ทำแบบฝึกทักษะได้ถูกต้อง 80% ขึ้นไป ของจำนวนข้อทั้งหมด</li> <li>- แสดงลำดับขั้นตอนของการทำแบบฝึกหัดได้ชัดเจนและเหมาะสม</li> </ul>
3 (ดี)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำแบบฝึกทักษะครบถ้วน</li> <li>- ทำแบบฝึกทักษะได้ถูกต้อง 70% - 79% ของจำนวนข้อทั้งหมด</li> <li>- แสดงลำดับขั้นตอนของการทำแบบฝึกทักษะยังไม่เหมาะสมหรือสลับขั้นตอนของการทำแบบฝึก</li> </ul>
2 (พอใช้)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำแบบฝึกทักษะไม่ครบถ้วน</li> <li>- ทำแบบฝึกทักษะได้ถูกต้อง 60% - 69% ของจำนวนข้อทั้งหมด</li> <li>- แสดงลำดับขั้นตอนของการทำแบบฝึกทักษะยังไม่เหมาะสมหรือไม่สัมพันธ์กับโจทย์</li> </ul>
1 (ต้องปรับปรุง)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ทำแบบฝึกทักษะไม่ครบถ้วน</li> <li>- ทำแบบฝึกทักษะได้ถูกต้องน้อยกว่า 60% ของจำนวนข้อทั้งหมด</li> <li>- แสดงลำดับขั้นตอนของการทำแบบฝึกไม่สัมพันธ์กับโจทย์หรือไม่ระบุขั้นตอนของการทำแบบฝึก</li> </ul>

## กระดาษคำตอบ

### แบบทดสอบก่อนเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

ข้อ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ก										
ข										
ค										
ง										

## กระดาษคำตอบ

## แบบทดสอบหลังเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อ.....

ชั้น.....เลขที่.....

ข้อ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ก										
ข										
ค										
ง										

## บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*.  
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- คุณากร จำปาหอม. (2552). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนกลุ่มสาระการเรียนรู้  
คณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับและอนุกรม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และความพึงพอใจของนักเรียน  
ต่อการสอนที่มีการจัดกลุ่มนักเรียนและเรียงลำดับเนื้อหาสาระต่างกัน. วิทยานิพนธ์ กศ.ม.  
(การวิจัยการศึกษา). มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- จารุวรรณ เขียวอ่อน. (2551). การพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
เรื่อง รูปสี่เหลี่ยม ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้แบบฝึกทักษะ. การค้นคว้าอิสระ กศ.ม.  
มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- ณัฐฐิษา บุญนที. (2553). *การพัฒนาบุคลากรในการจัดทำแบบฝึกทักษะ กลุ่มสาระการเรียนรู้  
คณิตศาสตร์ โรงเรียนสหราษฎร์รังสฤษดิ์ อำเภอสว่างคราม จังหวัดนครพนม*. การศึกษา  
ค้นคว้าอิสระ กศ.ม.(การบริหารการศึกษา) มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัย  
มหาสารคาม.
- ดรณ สุขนันทกุล. (2554). *ผลการสอนด้วยแบบฝึกตามรูปแบบการสอนโดยใช้สิ่งช่วยจัดมโนคติ  
ล่วงหน้า เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสนใจ  
ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5*. สารนิพนธ์ กศ.ม.  
(การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ทัศนีย์ บุตรอุดม. (2552). *การพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการและการแก้สมการ  
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค  
STAD ร่วมกับแบบฝึกทักษะ*. การศึกษาค้นคว้าอิสระ กศ.ม.(หลักสูตรและการสอน).  
มหาสารคาม: มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- ธิดารัตน์ ลือโลก. (2554). *การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่อง ภาคตัดกรวยเพื่อส่งเสริม  
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความสามารถเชิงปริมาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*.  
ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา) กรุงเทพมหานคร : บัณฑิตวิทยาลัย  
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- นงลักษณ์ เดชมา. (2524). *การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง  
ภาคตัดกรวยของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้สื่อประสม 2 แบบ*. ปริญญาานิพนธ์ กศ.ม.  
กรุงเทพมหานคร : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ฝ่ายวิชาการ พีพีซี. (2555). *ยอดคณิตศาสตร์ เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์*.  
กรุงเทพมหานคร : พีพีซี

- วิมลรัตน์ สุนทรโรจน์. (2545). พัฒนาการเรียนการสอน. มหาสารคาม: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- วิไลลักษณ์ มีทิศ. (2551). การสร้างและหาประสิทธิภาพแบบฝึกทักษะการคิดคำนวณด้านการคูณ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม.(การประถมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- วุฒิกุล เสาวรัตน์. (2526). การสร้างแบบทดสอบอิงเกณฑ์วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. ปรินูญานิพนธ์ กศม. กรุงเทพมหานคร : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.
- \_\_\_\_\_. (2546). คู่มือการวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดดูเคชั่น
- \_\_\_\_\_. (2552). หนังสือเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว
- สุชาติ สิริเมื่อนันท์. (2542). การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยจุดบกพร่องในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย ของชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในกรุงเทพมหานคร. ปรินูญานิพนธ์ กศม. (วัดผลการศึกษา) กรุงเทพมหานคร : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุนันทา สุนทรประเสริฐ. (2544). การผลิตนวัตกรรมการเรียนการสอน เรื่อง การสร้างแบบฝึก. ชัยนาท: ม.ป.ป.
- อรุณศรี ดำบรรณ. (2548). การสร้างแบบฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาเศษส่วนโดยการใช้ตัวแทนสำหรับ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่มีผลการเรียนต่ำ. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.