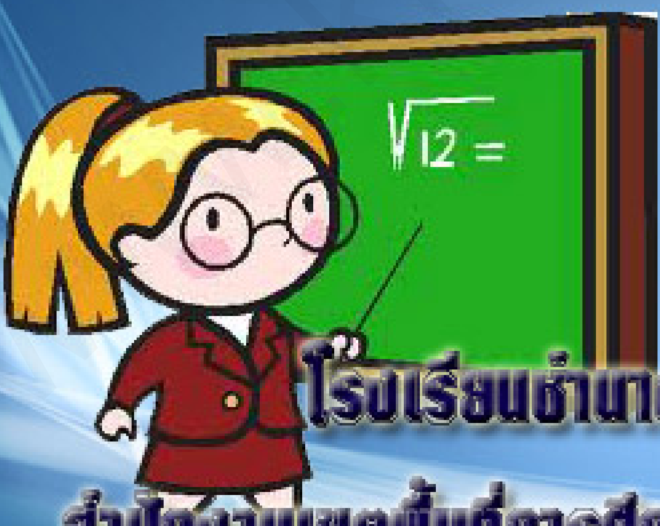
เอกสารประกอบการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

แคลคูลัสเบื้องต้น
เล่ม 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

รันยนันท์ จันเต



โรงเรียนชำนาญสามัคคีวิทยา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 18
กระทรวงศึกษาธิการ

ลิมิตและความต่อเนื่อง (Limit and Continuity)

1. ลิมิตของฟังก์ชัน

ความรู้เกี่ยวกับลิมิตมีความสำคัญมากในทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาแคลคูลัส (Calculus) ก่อนที่จะให้ความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน "ให้นักศึกษาพิจารณาฟังก์ชัน f(x) ซึ่ง $f(x) = x + 2$ ว่า ค่าของฟังก์ชัน f(x) เป็นอย่างไร เมื่อ x เข้าใกล้ 2" (ค่าของ $x \neq 2$) ดังตาราง

$x < 2$	
x	$f(x) = x + 2$
1	3
1.5	3.5
1.9	3.9
1.99	3.99
1.999	3.999
1.9999	3.9999
⋮	⋮

$x > 2$	
x	$f(x) = x + 2$
3	5
2.5	4.5
2.1	4.1
2.01	4.01
2.001	4.001
2.0001	4.0001
⋮	⋮

จะเห็นว่าเมื่อ x เข้าใกล้ 2 โดยที่ ($x < 2$) ค่าของฟังก์ชันจะเข้าใกล้ 4

และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 โดยที่ ($x > 2$) ค่าของฟังก์ชันจะเข้าใกล้ 4

จะเห็นได้ว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 โดยที่ $(x < 2)$ และเมื่อ x เข้าใกล้ 2 โดยที่ $(x > 2)$ ค่าของฟังก์ชันจะเข้าใกล้จำนวนเดียวกัน คือ 4 นั่นแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(x) = x + 2$ มีลิมิตของฟังก์ชัน โดยค่าของลิมิตเท่ากับ 4

โดยทั่วไป เมื่อ a เป็นจำนวนใด ๆ

1. x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$

และค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

2. x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ จะเรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$

และค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

ซึ่ง ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ เรียก L ว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ a หรือกล่าวว่า

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ดังนั้นจากตารางข้างต้น จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 2^-} (x + 2) = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$$

จะได้ $\lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$

วิธีพิจารณาค่าของ $\lim_{x \to a} f(x)$ มี 3 วิธี คือ

1) การหาค่าลิมิตโดยวิธีแทนค่าในตาราง

2) การหาค่าลิมิตโดยวิธีพิจารณากราฟ

3) การหาค่าลิมิตโดยใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

การหาค่าลิมิตโดยวิธีแทนค่าในตาราง

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับการหาค่าลิมิตโดยวิธีแทนค่าในตาราง

ตัวอย่างที่ 1-4 จงสร้างตารางแสดงค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ณ จุดใกล้ ๆ a (แต่ไม่เท่ากับ a) ที่กำหนดให้ เพื่อสรุปค่าของ $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \to a} f(x)$ (ถ้าลิมิตมีค่า)

ตัวอย่างที่ 1 $f(x) = 3x^2 - 2x,\quad a = 2$

วิธีทำ สร้างตาราง ดังนี้

$x < 2$	
x	$f(x) = 3x^2 - 2x$
1	1
1.5	3.75
1.9	7.03
1.99	7.90
1.999	7.990
1.9999	7.998
⋮	⋮

$x > 2$	
x	$f(x) = 3x^2 - 2x$
3	21
2.5	13.75
2.1	9.03
2.01	8.10
2.001	8.01
2.0001	8.0008
⋮	⋮

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2 - 2x) = 8$ และ $\lim\limits_{x \to 2^+} (3x^2 - 2x) = 8$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 2^-} (3x^2 - 2x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3x^2 - 2x) = 8$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2x) = 8$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}$, $a=0$

วิธีทำ สร้างตาราง ดังนี้

$x < 0$	
x	$f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}$
-1	-1
-0.5	-1.074
-0.1	-1.023
-0.01	-1.002
-0.001	-1.000
-0.0001	-1.000
$\vdots$	$\vdots$

$x > 0$	
x	$f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}$
1	-0.6
0.5	-0.833
0.1	-0.973
0.01	-0.997
0.001	-0.999
0.0001	-0.999
$\vdots$	$\vdots$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}=-1$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}=-1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}=-1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x}=-1$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 $f(x)=\sqrt{x+1},\ a=8$

วิธีทำ สร้างตาราง ดังนี้

$x<8$	
x	$f(x)=\sqrt{x+1}$
7	2.82842
7.5	2.91547
7.9	2.98328
7.99	2.99833
7.999	2.99983
7.9999	2.99998
⋮	⋮

$x>8$	
x	$f(x)=\sqrt{x+1}$
9	3.16227
8.5	3.08220
8.1	3.01662
8.01	3.00166
8.001	3.00016
8.0001	3.00001
⋮	⋮

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 8^-}\sqrt{x+1}=3$ และ $\lim\limits_{x\to 8^+}\sqrt{x+1}=3$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 8^-}\sqrt{x+1}=\lim\limits_{x\to 8^+}\sqrt{x+1}=3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{x+1}=3$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4},\quad a=4$

วิธีทำ สร้างตาราง ดังนี้

$x < 4$	
x	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3	0.26794
3.5	0.25834
3.9	0.25158
3.99	0.25015
3.999	0.25001
3.9999	0.25000
⋮	⋮

$x > 4$	
x	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
5	0.23606
4.5	0.24264
4.1	0.24845
4.01	0.24984
4.001	0.24998
4.0001	0.24999
⋮	⋮

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0.25$ และ $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0.25$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0.25$

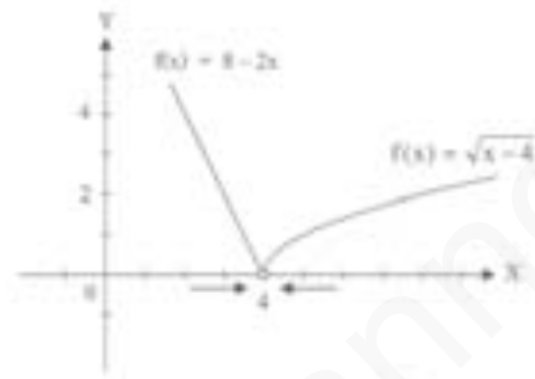
ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=0.25$ **ตอบ**

การหาค่าลิมิตโดยวิธีพิจารณากราฟ

ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างที่ 5-8 การหาค่าลิมิตโดยวิธีพิจารณากราฟ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 5 $f(x) = \begin{cases} 8x - 2x & \text{เมื่อ } x < 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{เมื่อ } x > 4 \end{cases}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4

วิธีทำ เขียนกราฟ ดังนี้

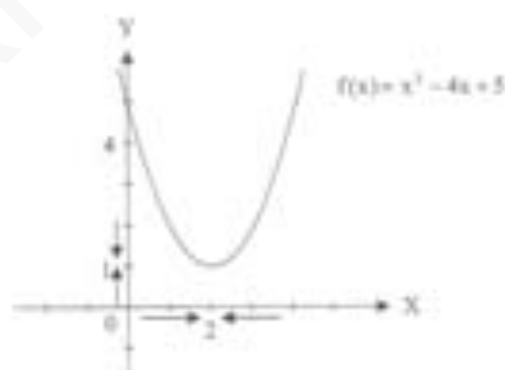


ภาพที่ 1

เมื่อพิจารณาค่าของ f(x) ในตารางและกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 0 เพียงค่าเดียว

ตัวอย่างที่ 6 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

วิธีทำ เขียนกราฟ ดังนี้

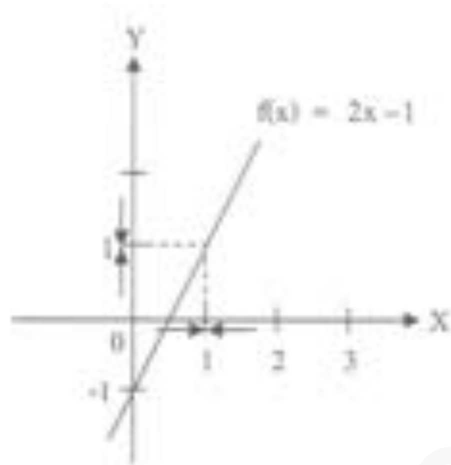


ภาพที่ 2

เมื่อพิจารณาค่าของ f(x) ในตารางและกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 1 เพียงค่าเดียว

ตัวอย่างที่ 7 $f(x) = 2x - 1$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1

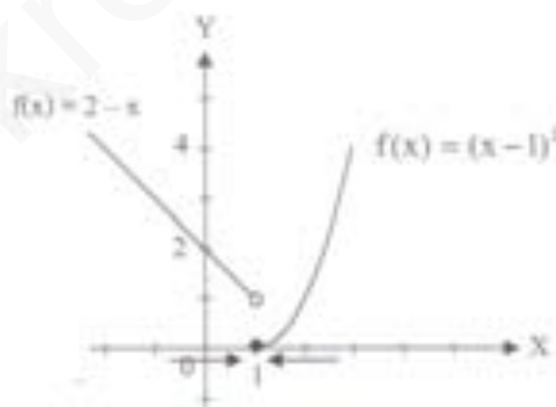
วิธีทำ เขียนกราฟ ดังนี้



ภาพที่ 3

เมื่อพิจารณาค่าของ f(x) ในตารางและกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้ายและด้านขวา ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 1 เพียงค่าเดียว

ตัวอย่างที่ 8 $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{เมื่อ } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1



ภาพที่ 4

เมื่อพิจารณาค่าของ f(x) ในตารางและกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 1 และเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา ค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ 0

2. นิยามของลิมิต

นิยาม 2.1 ลิมิตทางขวา

ให้ f เป็นฟังก์ชัน a และ L เป็นจำนวนจริง จะกล่าวว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวามือ (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $a < x < a + \delta$ แล้วจะได้ $|f(x) - L| < \varepsilon$

นิยาม 2.2 ลิมิตทางซ้าย

ให้ f เป็นฟังก์ชัน a และ L เป็นจำนวนจริง จะกล่าวว่า f(x) มีค่าเข้าใกล้ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้ายมือ (เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$) ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก ๆ $x \in D_f$ ถ้า $a - \delta < x < a$ แล้วจะได้ $|f(x) - L| < \varepsilon$

จากบทนิยาม 2.1 – 2.2 สำหรับนักเรียนที่เรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อาจทำความเข้าใจกับบทนิยามนี้ค่อนข้างที่จะเข้าใจยาก ดังนั้นเพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจนิยามของลิมิตง่ายขึ้น จะขอให้นิยามของลิมิตในอีกลักษณะหนึ่ง ดังนี้

"เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a มากพอที่จะทำให้ค่าของ f(x) เข้าใกล้ L

3. กฎเกณฑ์หรือทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตและการคำนวณค่าลิมิตของฟังก์ชัน

3.1 กฎเกณฑ์หรือทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

การพิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยพิจารณาจากค่าของฟังก์ชัน ณ จุด x ใกล้ ๆ a หรือโดยพิจารณาจากตารางหรือกราฟไม่สะดวกรวดเร็วเท่าที่ควร เพื่อให้วิธีการหาค่าลิมิตสะดวกและรวดเร็วขึ้นจึงจำเป็นต้องศึกษากฎเกณฑ์และทฤษฎีสำคัญเพื่อนำมาใช้ในการคำนวณ กฎทุกกฎสามารถพิสูจน์ได้ แต่ในที่นี้เราจะไม่ศึกษาวิธีพิสูจน์ เพียงแต่จะศึกษาถึงวิธีนำกฎเกณฑ์ไปใช้ในการคำนวณเท่านั้น

ทฤษฎีบทที่ 1

เมื่อ a , L และ M เป็นจำนวนใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ แล้ว

1) ถ้า $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$

3) $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$, $n \in I^+$

4) $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot L$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$

6) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

7) $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ , } M \neq 0$$

8) $$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n = L^n \text{ , } n \in I^+$$

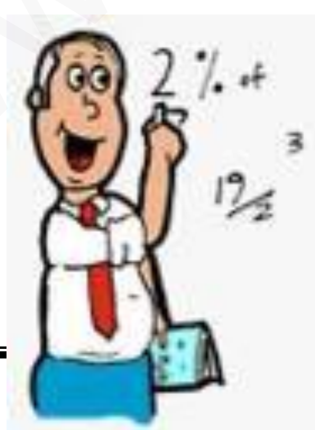
9) $$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ , } n \in I^+ - \{1\} \text{ และ } \sqrt[n]{L} \in R$$

หมายเหตุ กฎเกณฑ์เหล่านี้ใช้ได้กับลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวา

ทฤษฎีบทที่ 2

ถ้า $p(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามแล้ว สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

ฟังก์ชันพหุนาม คือ ฟังก์ชันที่เขียนในรูป $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n, n-1,...,1 เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ เป็นจำนวนจริง รายละเอียดเพิ่มเติมนักเรียนสามารถศึกษาได้ตามตัวอย่าง ดังนี้



3.2 การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน คือ การหาว่าฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงใด เมื่อกำหนดให้ตัวแปรอิสระมีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ซึ่งการหาค่าลิมิตนี้สามารถใช้กฎเกณฑ์เกี่ยวกับลิมิตมาช่วยในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้ ให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 8x + 7)$

วิธีทำ โดยกฎข้อ 5) สามารถเขียนค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 8x + 7) = \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 8x + \lim_{x \to 3} 7$$

$$= (3^2) - (8)(3) + 7$$

$$= 9 - 24 + 7$$

$$= -8$$

$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 8x + 7) = -8$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 1)$

วิธีทำ โดยกฎข้อ 5) สามารถเขียนค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 4x + \lim_{x \to 1} 1$$

$$= (1^2) - (4)(1) + 1$$

$$= 1 - 4 + 1$$

$$= -2$$

$\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 4x + 1) = -2$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x+3}{x^2+1}$

วิธีทำ พิจารณาตัวส่วนของเศษส่วน $\dfrac{5x+3}{x^2+1}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to 2}(x^2+1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 1 = 2^2+1 = 5$$

โดยกฎข้อ 7) และ 5) สามารถเขียนค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x+3}{x^2+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(5x+3)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2+1)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 2} 5x + \lim\limits_{x \to 2} 3}{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim\limits_{x \to 2} 1}$$

$$= \frac{5(2)+3}{(2^2)+1}$$

$$= \frac{10+3}{4+1}$$

$$= \frac{13}{5}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x+3}{x^2+1} = \frac{13}{5}$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 12 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

วิธีทำ พิจารณาตัวส่วนของเศษส่วน $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to 2} x - 2 = \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 2 = 2 - 2 = 0$$

ดังนั้นไม่สามารถใช้กฎข้อ 5) หาค่าลิมิตนี้ได้ จะหาค่าลิมิตนี้ได้ต้องอาศัย

ความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนาม ดังนี้

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 2)$$

โดยกฎข้อ 5) สามารถเขียนค่าลิมิตได้ดังนี้

$$= \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 2$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

วิธีทำ พิจารณาตัวส่วนของเศษส่วน $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x \to 1} (\sqrt{x^2+3}-2) = \sqrt{1^2+3}-2 = \sqrt{4}-2 = 2-2 = 0$$

ดังนั้นไม่สามารถใช้กฎข้อ 5) หาค่าลิมิตนี้ได้ จะหาค่าลิมิตนี้ได้ต้องอาศัยความรู้เรื่องเสิร์ดคู่สังยุคของ $\sqrt{x^2+3}-2$ คือ $\sqrt{x^2+3}+2$ ดังนี้

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2+3}+2}{1+1}$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = 2$$ **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 3

ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,\ L \neq 0$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{0},\ L \neq 0$ หาค่าไม่ได้ หรือ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่างที่ 14 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$

วิธีทำ พิจารณาตัวส่วนของเศษส่วน $\frac{x^2}{x-1}$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 1-1 = 0$ (ค่าลิมิตของตัวส่วนมีค่าเท่ากับ 0)

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}$ หาค่าลิมิตไม่ได้

หาค่าลิมิตไม่ได้ **ตอบ**