

สมการและอสมการ

📄 **นำเสนอเมื่อ** 3 ม.ค. 2551

สมการและอสมการ โดย นางสุภา สุจริตพงศ์

สมการบางสมการอาจจะมีคำตอบ เช่น ถ้าถามว่า "มีจำนวนเต็มกี่ตัวที่น้อยกว่า 2 แล้วได้ 3" ก็ตอบว่า "ไม่มีจำนวนเต็มเช่นนี้" เราพูดได้ก็อย่างหนึ่งว่า สมการ $2x = 3$ มีคำตอบซึ่งเป็นจำนวนเต็ม เราทราบจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามเมื่อคูณกับตัวเองแล้วออกมาได้จำนวนเต็ม ดังนั้นเราพูดว่า สมการ $X \times X = -1$ ซึ่งเขียนได้ว่า $x^2 = -1$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง สมการบางสมการอาจมีคำตอบมากกว่าคำตอบ เช่น ถ้าถามว่า "จำนวนเต็มกี่ตัวที่น้อยกว่า 1" ก็ตอบว่า "-1 และ 1" หรือพูดว่า สมการ $x^2 = 1$ มีคำตอบ 2 คำตอบ คือ -1 และ 1 สมการที่มีตัวแปรเดียวและเลขชี้กำลัง 1 จะจัดเป็น 1 เราเรียกสมการเชิงเส้น (Linear equation) ที่มีตัวแปรเดียว ดังนี้ $2x - 5 = 1, 6 + 3x = 2, 3x + 1 - 2y = 2.7, 2z - 10 = 0$ ล้วนเป็นตัวอย่างของสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว

การแก้สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรเดียว เรามีหลักการใหญ่ๆ ดังนี้ คือ
ผู้ตั้งจำนวน หรือบางทีเรียกชื่อของเครื่องหมาย = เราจะโดยสมการที่มีคำตอบเหมือนสมการเดิม
ผู้ตั้งจำนวน หรือชื่ออะไร 0 มาคูณหรือหารทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = เราจะโดยสมการที่มีคำตอบเหมือนสมการเดิม

สมมติว่าเราต้องการแก้สมการ $2x + 3 = 5$ เราใช้หลักทั้งสองข้อดังนี้
 $2x + 3 = 5$
ลบ 3 ทั้งสองข้าง
ได้ $2x = 2$ หารทั้งสองข้าง
จากหลักทั้งสองข้อ เราได้สมการที่สามที่มีคำตอบเหมือนกัน ดังนั้นเรจึงสรุปได้ว่า 1 เป็นคำตอบของสมการ $2x + 3 = 5$

* เรามีสมาชิก 5 โต้ว 5 และเรียก 1 ว่า เลขชี้กำลัง
เราเขียน 5×5 โต้ว 5 และเรียกเลข 2 ว่า เลขชี้กำลัง
เราเขียน $5 \times 5 \times 5$ โต้ว 5 และเรียกเลข 3 ว่า เลขชี้กำลัง ฯลฯ
ให้ x แทนจำนวนใด ๆ ก็ตาม
เราเขียน X โต้ว X^1 และเรียกเลข 1 ว่า เลขชี้กำลัง
เราเขียน $X \times X$ โต้ว X^2 และเรียกเลข 2 ว่า เลขชี้กำลัง
เราเขียน $X \times X \times X$ โต้ว X^3 และเรียกเลข 3 ว่า เลขชี้กำลัง
เราเขียน $X \times X \times X \times X$ โต้ว X^4 และเรียกเลข 4 ว่า เลขชี้กำลัง ฯลฯ
เลขชี้กำลังไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มบวก แต่เราจะไม่กล่าวถึงในที่นี้

หลักข้อ (2) หมายถึง 0 มาหารทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = ไม่สมการ เพราะการหารด้วย 0 ไม่มีความหมาย และหลักเดียวกันนี้ห้ามนำ 0 มาคูณทั้งสองข้างของเครื่องหมาย = ไม่สมการ เพราะสมการนี้จะมีความหมายจากสมการเดิม ตัวอย่างเช่น สมการ $2x = 6$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว โดย 3 แต่สมการ $2x \times 0 = 6 \times 0$ นั้นมีจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นคำตอบ เนื่องจากจำนวนจริงใด ๆ ก็ตามคูณกับ 0 แล้วออกมาได้ 0

ควรสังเกตว่า การคูณด้วย 0 ไม่สามารถแก้สมการได้ ถ้าทำอย่างไรทางซ้าย (ของเครื่องหมาย =) แล้วให้ทำอย่างเดียวกันทางขวา (ของเครื่องหมาย =) นั่น ใช่ว่าได้ เพราะสมการใหม่อาจมีคำตอบต่างจากสมการเดิมได้ เช่น สมการ $x = 3$ กับสมการ $x^2 = 3^2$ ซึ่งได้จาก "ยกกำลังสองทั้งสองข้าง" มีคำตอบต่างกัน สมการ $x = 3$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ 3 ส่วนสมการ $x^2 = 3^2$ มีคำตอบ 2 คำตอบ คือ -3 กับ 3

สมการ $x - 1 = 0$ กับสมการ $x(x - 1) = 0$ ที่มีคำตอบต่างกัน สมการที่สนใจจากการคูณ x ทั้งสองข้าง (ของเครื่องหมาย =) ในสมการแรก หรือพูดว่าสมการแรกได้จากการหารด้วย x ทั้งสองข้างในสมการที่สองก็ได้ สมการ $x - 1 = 0$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ 1 ส่วนสมการ $x(x - 1) = 0$ มีคำตอบ 2 คำตอบ คือ 0 และ 1

สมการอาจจะมีตัวแปรกี่ตัวก็ได้ เช่น โจทย์ที่ว่า "จงหาจำนวนสองจำนวนซึ่งผลต่างเป็น 3" อาจเขียนได้ว่า "จงแก้สมการ $x - y = 3$ " สมการ $x - y = 3$ เป็นสมการที่มีตัวแปร 2 ตัว สมการที่มีคำตอบมากมาย เช่น $x = 4$ และ $y = 1$ หรือ $x = 3$ และ $y = 0$ หรือ $x = -$ และ $y = -3$ เป็นต้น คำตอบเหล่านี้เราเขียนในรูปคู่ลำดับว่า (4,1), (3,0), (-, -3) จำนวนแรกในคู่ลำดับแทนค่า x จำนวนหลังแทนค่า y ดังนั้น (4,1) เป็นคำตอบหนึ่งๆ ของสมการ $x - y = 3$ แต่ (1,4) ไม่ใช่คำตอบของสมการนี้

เนื่องจากสมการ $x - y = 3$ นี้ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอยู่มากมาย ไม่สามารถแจกแจงให้ดูได้หมด วิธีที่จะแสดงคำตอบได้วิธีหนึ่งคือ การเขียนกราฟ

สมการที่มีตัวแปรสองตัวสามารถแก้ได้ด้วยวิธีการทางเรขาคณิตได้โดยวิธีการทางเรขาคณิต เช่น ถ้าต้องการแก้สมการ $2x + 3 = 5$ ซึ่งมีคำตอบเหมือนสมการ $2x - 2 = 0$ (นำ 5 มาลบทั้งสองข้างของเครื่องหมาย =) เราเพิ่มตัวแปร y ขึ้นมาอีกหนึ่งตัวโดยกำหนดให้ $2x - 2 = y$

สมการที่เป็นสมการที่มีตัวแปรสองตัว คำตอบของสมการ $2x - 2 = y$ คือทุกจุดที่อยู่ในเส้นตรงเส้นนี้ ค่าของ x ที่ทำให้ y เป็น 0 เป็นคำตอบของสมการ $2x - 2 = 0$ จุดบนกราฟที่ y เป็น 0 คือจุดที่กราฟตัดแกน x เส้นตรงนี้ตัดแกน x ที่จุด (1,0) เราจึงสรุปได้ว่า 1 เป็นคำตอบของสมการ $2x - 2 = 0$ หรือสมการ $2x + 3 = 5$

สมการ $x^2 - 2x - 3$ มีคำตอบเหมือนสมการ $x^2 - 2x - 3 = 0$ เราแก้ได้โดยเขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 3 = y$ (เส้นโค้งสีน้ำเงินในรูป) ค่าของ x ที่ทำให้ y เป็น 0 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 3 = 0$ จุดบนกราฟที่ y เป็น 0 คือจุดที่กราฟตัดแกน x โดยจุด (-1,0) และ (3,0) เราจึงสรุปว่า -1 กับ 3 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 3 = 0$ หรือ $x^2 - 2x = 3$

ในการแก้สมการ $x^2 - 2x + 2 = 0$ เราเขียนกราฟแสดงคำตอบของสมการ $x^2 - 2x + 2 = y$ จะพบว่ากราฟนี้ไม่ตัดแกน x แสดงว่าจุด (x,0) ไม่อยู่บนกราฟ ดังนั้น (x,0) ไม่ใช่คำตอบของสมการ $x^2 - 2x + 2 = y$ นั่นคือไม่มี x จะแทนจำนวนจริงใดๆ ก็ตาม $x^2 - 2x + 2$ ไม่เท่ากับ 0 เราจึงสรุปได้ว่าสมการ $x^2 - 2x + 2 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

หัวข้อ

- [สมการเชิงเส้น](#)
- [สมการไดโอแฟนทีน](#)

ทุกจุดบนเส้นตรงในกราฟ เป็นคำตอบของสมการ $x - y = 3$

กราฟแสดงคำตอบของสมการ $x^2 + y^2 = 1$

กราฟแสดงคำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 3 = y$

[ดูภาพทั้งหมดในเว็บนี้](#)

สมการเชิงเส้น

บางที่เราพบโจทย์บางประเภท เช่น "ชาวคนหนึ่งเลี้ยงหมูและไก่ ถ้านับหัวของสัตว์เหล่านี้จะได้ 20 หัว ถ้านับขาจะได้ 50 ขา ตามหาว่ามีหมูและไก่อย่างละกี่ตัว"

ถ้าให้ x แทนจำนวนหมู และ y แทนจำนวนไก่ เราจะได้สมการ 2 สมการคือ
 $x + y = 20$
 $4x + 2y = 50$

เราต้องการหาค่าของ x และ y ซึ่งเมื่อนำไปแทนในสมการทั้งสองแล้วจะได้ข้อความจริงทั้งคู่ ในกรณีนี้ถ้าแทน x ด้วย 5 และแทน y ด้วย 15 ในสมการทั้งคู่ จะได้ข้อความจริง เราจึงพูดว่า (5, 15) เป็นคำตอบของ **ระบบสมการ** (system of equations) ขาดสมการทั้งสองเป็นสมการเชิงเส้นทั้งคู่ เราจึงเรียกระบบสมการนี้ว่า **ระบบสมการเชิงเส้น** (system of linear equations)

ระบบสมการเชิงเส้นมีวิธีแก้หลายวิธี แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงการแก้ระบบสมการด้วยวิธีเขียนกราฟ

คำตอบ (5, 15) สำหรับระบบสมการในโจทย์ปัญหาเรื่องชวานากับสัตว์เลี้ยง หาได้จากกราฟ ดังนี้
เขียนกราฟของสมการทั้งสองจะได้เส้นตรง 2 เส้น ทุกจุดบนเส้นตรงสีน้ำเงินเป็นคำตอบของสมการ $x + y = 20$
ทุกจุดบนเส้นตรงสีแดงเป็นคำตอบของสมการ $4x + 2y = 50$ จุดตัดคือ (5, 15) จึงเป็นคำตอบของสมการทั้งคู่พร้อมๆ กันและเป็นคำตอบของระบบสมการนี้

เราจึงสรุปได้ว่า ระบบสมการที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้น ที่มีตัวแปร 2 ตัว 2 สมการ อาจมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว ในกรณีที่เส้นตรงทั้งสองตัดกันหรือไม่มีคำตอบเลยในกรณีที่เส้นตรงทั้งสองขนานกัน หรือมีคำตอบมากมายแจกแจกไม่หมดในกรณีที่เส้นตรงทั้งสองทับกัน
แม้ว่าระบบสมการที่มีตัวแปรไม่เกิน 2 ตัว จะไม่ใช่ระบบสมการเชิงเส้นเราก็อาจแก้ไขได้ด้วยวิธีเขียนกราฟ เช่น

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 - 2y = x \end{cases}$$

มีคำตอบ 4 คำตอบ ค่าโดยประมาณคือ (-1.1, -0.8), (1.1, -0.8), (-1.6, 0.6), 1.6, 0.6
[\[กลับไปหัวข้อหลัก\]](#)

ระบบสมการเชิงเส้น $x + y = 20$ และ $4x + 2y = 50$

ระบบสมการเชิงเส้น $x^2 + 4y^2 = 4$ และ $y = x^2 - 2$

[\[ดูภาพทั้งหมดในเรื่องนี้\]](#)

สมการไดโอแฟนทีน

สมการที่นำเสนอจะประเภทหนึ่ง คือ สมการที่ต้องการคำตอบเฉพาะที่เป็นจำนวนเต็ม หรือจำนวนตรรกยะ สมการประเภทนี้เรียกว่า **สมการไดโอแฟนทีน (Diophantine equations)** ซึ่งเป็นชื่อที่ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวกรีกชื่อ ไดโอแฟนตัส (Diophantus)

ตัวอย่างของโจทย์ปัญหาประเภทหนึ่งคือ "มีส้มอยู่จำนวนหนึ่ง ถ้าแบ่งให้คน 5 คนๆ ละเท่าๆ กัน จะขาดส้ม 1 ผล ถ้าจะแบ่งให้คน 7 คนๆ ละเท่าๆ กัน ก็จะขาด 1 ผล ถามว่ามีส้มอยู่เท่าไร" ถาสสมมุติว่ามีส้มอยู่ n ผล เราจะได้ว่า $n-1$ หารด้วย 5 ลงตัว และหารด้วย 7 ก็ลงตัว นั่นคือ $n-1 = 5x$ และ $n-1 = 7y$ เมื่อ x และ y แทนจำนวนเต็มบวก

เราจึงต้องแก้สมการ $5x = 7y$ เมื่อ x และ y แทนจำนวนเต็มบวก

จะเห็นว่าสมการนี้มีคำตอบมากมายได้แก่ (7,5), (14,10), (21,15), (28,20), (35,25), (42,30)... คำตอบเหล่านี้ให้ค่า $5x$ (หรือ $7y$) เป็น 35, 70, 105, 140, 175, 210... ตามลำดับ ดังนั้นค่าของ n ที่ต้องการคือ 34, 69, 104, 139, 174, 209... ถ้าโจทย์ถามเพิ่มเติมว่าจำนวนสมนอยที่สุดเป็นเท่าไร จึงจะมีลักษณะตามที่ต้องการก็จะได้อีกคำตอบ 34

สมการไดโอแฟนทีนที่มีคำตอบมากมายประเภท สมการไดโอแฟนทีนที่มีชื่อเสียงมากที่สุดคือ สมการ $x^2 + y^2 = z^2$ ซึ่งเราเรียกกันว่า **สมการพีทาโกรัส (Pythagorean equation)** ชื่อที่ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติแก่ **พีทาโกรัส (Pythagorus)** การหาคำตอบที่เป็นจำนวนบวกของสมการนี้คือการหาสามเหลี่ยมมุมฉากที่เป็นจำนวนเต็มของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมมุมฉากนั่นเอง คำตอบที่เราทราบกันดีคือ $x=3, y=4, z=5$ ซึ่งเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า (3,4,5) สมการพีทาโกรัสนี้มีคำตอบมากมายนับได้ไม่หมด คำตอบทั้งหลายหาได้จากสูตรต่อไปนี้คือ

$x = a^2 - b^2, y = 2ab$ และ $z = a^2 + b^2$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนเต็ม เช่น ถ้าให้ $a = 2$ และ $b = 1$ เราจะได้คำตอบ (3,4,5) ถ้าให้ $a = 3$ และ $b = 2$ เราจะได้คำตอบ (5,12,13) ถ้าให้ $a = 3$ และ $b = 1$ เราจะได้คำตอบ (8,6,10) เป็นต้น

เรากล่าวได้ว่าสมการพีทาโกรัสนั้น เราทราบคำตอบได้อย่างสมบูรณ์เพราะเรามีวิธีหาคำตอบทั้งหมดได้

สมการไดโอแฟนทีนที่มีตัวแปร 2 ตัว และเป็นการเชิงเส้น เช่น $5x = 7y, 6x + 15y = 12$ ฯลฯ เราทราบคำตอบโดยสมบูรณ์ แต่สมการไดโอแฟนทีนในส่วนที่ส่วนหนึ่งไม่ทราบคำตอบอย่างสมบูรณ์ บางสมการยังไม่ทราบเลยด้วยซ้ำไปว่ามีคำตอบหรือไม่ เช่น สมการ $x^n + y^n = z^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งมากกว่า 2 สมการนี้ไม่มีใครทราบเลยว่ามีคำตอบเป็นจำนวนเต็มบวกหรือไม่

แฟร์มาต์ ทำนายไว้ว่า "สมการ $x^n + y^n = z^n$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนเต็มบวก เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 2" ข้อความนี้เขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า "ไม่ว่า x, y, z, n จะเป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ก็ตาม ถ้า n มากกว่า 2 แล้ว จะได้ว่า $x^n + y^n \neq z^n$ " ข้อความนี้เรียกกันว่า **ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์ (Fermat's Last Theorem)** ในระยะเวลา 300 กว่าปีที่ผ่านมานี้ นักคณิตศาสตร์หลายพันคนทุ่มเทความทุ่มเท และมีความพยายามพิสูจน์ข้อความเป็นข้อความจริงสำหรับหลายค่าของ n เช่น มีผู้พิสูจน์ได้ว่า "ไม่ว่า x, y, z, n จะเป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ก็ตาม ถ้า n มากกว่า 2 และน้อยกว่า 100 แล้ว จะได้ว่า $x^n + y^n \neq z^n$ " แต่จนถึงบัดนี้ก็ยังไม่มีการพิสูจน์ได้ว่า ทฤษฎีบทสุดท้ายของแฟร์มาต์ เป็นข้อความจริงหรือเท็จ

ความจริง ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เกิดในชีวิตประจำวันมักจะไม่ซับซ้อนเท่าสมการ เช่น ถ้าเราต้องการซื้อของ เราก็มักจะใช้ซื้อเงินหมดกระเป๋าก็พอ เพียงแต่ซื้อไม่ให้เป็นเงินที่มีอยู่เท่านั้น เช่น มีเงิน 20 บาท จะซื้อส้มเขียนหวานราคาถุงละ 4 บาท เราอาจจะซื้อส้มหมดเงิน เราอาจจะซื้อเพียง 1 กิโลกรัม หรือ 2 กิโลกรัมเท่านั้น แต่เราจะซื้อเกิน 5 กิโลกรัมไม่ได้ ถาสสมมุติว่าซื้อ x กิโลกรัม จะสิ้นเงิน $4x$ บาท ถาสซื้อจนหมดเงิน จะเขียนได้เป็นสมการ $4x = 20$ แต่โดยปกติแล้วเราไม่จำเป็นต้องซื้อจนหมดเงิน เราจึงกำหนดเพียงว่า $4x$ ต้องไม่มากกว่า 20 หรือ $4x$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 20 ซึ่งเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า $4x \leq 20$

เครื่องหมายที่แสดงความไม่เท่ากันที่นิยมใช้กันมีดังต่อไปนี้
> แทนคำว่า มากกว่า,
มากกว่าหรือเท่ากับ
< แทนคำว่า น้อยกว่า,
น้อยกว่าหรือเท่ากับ
ไม่เท่ากับ

✖
พีทาโกรัส ✖

✖
แฟร์มาต์ ✖

[ดูภาพทั้งหมดในเรื่องนี้](#)

ไดโอแฟนตัส มีชีวิตอยู่ในสมัยประมาณ 250 ปีก่อนคริสตศักราช เป็นชาวเมืองเล็กชานแคเรีย เขาไม่ค่อยทราบรายละเอียดเกี่ยวกับชีวิตของเขามากนัก แต่อาจจะคำนวณอายุของเขาได้จากคำซึ่งเล่ากันต่อๆ มาดังนี้
เขาเป็นเด็กอยู่ 1 ของอายุของเขา เป็นวัยรุ่นอยู่ 1 ของอายุ เป็นชายโสดอยู่ 1 ของอายุ ลูกชายของเขาเกิดเมื่อเขาแต่งงานแล้ว 5 ปี ลูกชายตายก่อนเขา 4 ปี เขามีอายุยืนเป็น 2 เท่าของลูกชาย (คำตอบคือ 84 ปี)

พีทาโกรัส เป็นนักปรัชญาและนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกที่มีชีวิตอยู่ระหว่างปี 582-507 ปีก่อนคริสตศักราช ทฤษฎีบทของเขาซึ่งเรารู้จักกันดีคือทฤษฎีบทในเรขาคณิตที่กล่าวว่าการกำลังสองของความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ยอมเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวอีกสองด้าน

แฟร์มาต์ (ค.ศ. 1601-1665) เป็นชาวฝรั่งเศส อาชีพรับราชการ งานอดิเรกคือ คณิตศาสตร์ ถือได้ว่าเป็นคนหนึ่งที่ริเริ่มเรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัสแต่ปัจจุบันคนรู้จักเขามากจากผลงานของเขาเรื่องทฤษฎีของจำนวน (Theory of Numbers) [\[กลับหัวข้อหลัก\]](#)



บรรณานุกรม

- นางสุภา สุจริตพงศ์