สาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ (ค 32101) ช่วงชั้นที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน

เรื่อง ลำดับและอนุกรม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชุดที่ 1

ลำดับ

นางขวัญใจ งาเจือ
ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนตราษตระการคุณ อำเภอเมือง จังหวัดตราด
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 17

ใบความรู้ที่ 1.1
เรื่อง : ความหมายของลำดับ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกความหมายของลำดับ และเขียนพจน์ต่าง ๆ ของลำดับได้

มาศึกษาความหมายของลำดับกันก่อนนะคะ

ความหมายของลำดับ

ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก หรือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก เรียกว่า ลำดับ (sequence)

บทนิยาม

ลำดับ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก หรือเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรกที่เรียงจากน้อยไปมาก และเริ่มต้นด้วย 1 เสมอ

ในการเขียนลำดับ เขียนเฉพาะสมาชิกของเรนจ์เรียงกัน โดยคั่นด้วยเครื่องหมาย จุลภาค (,) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1.1 กำหนด $f(x) = 2x - 1$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงเขียนเป็นลำดับ

วิธีทำ จะได้ว่า

$f(1) = 2(1) - 1 = 1$

$f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$f(3) = 2(3) - 1 = 5$

$f(4) = 2(4) - 1 = 7$

$f(5) = 2(5) - 1 = 9$

ดังนั้น $f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

เขียนเป็นลำดับ คือ 1, 3, 5, 7, 9

ไม่ยากเลย ลองดูอีก 1 ตัวอย่างนะคะ

ตัวอย่างที่ 1.1.2 กำหนด $g(x) = x^2 + 3$ เป็นฟังก์ชันเมื่อ $x = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ จงเขียนเป็นลำดับ

วิธีทำ จะได้ว่า

$$g(1) = 1^2 + 3 = 4$$

$$g(2) = 2^2 + 3 = 7$$

$$g(3) = 3^2 + 3 = 12$$

$$\vdots$$

$$g(n) = n^2 + 3$$

ดังนั้น $g = \{(1, 4), (2, 7), (3, 12), \ldots, (n, n^2 + 3), \ldots\}$

เขียนเป็นลำดับคือ $4, 7, 12, \ldots, n^2 + 3, \ldots$

ถ้า f_1 เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f_1 = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4), \ldots, (n, a_n), \ldots\}$ เขียนลำดับ f_1 ได้ คือ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$ เรียกลำดับ f_1 ว่า ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

ถ้า f_2 เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f_2 = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), (4, a_4), \ldots, (n, a_n)\}$ เขียนลำดับ f_2 ได้ คือ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เรียกลำดับ f_2 ว่า ลำดับจำกัด (Finite Sequence)

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ (first term)

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ (second term)

a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ (third term)

a_4 ว่า พจน์ที่ 4 ของลำดับ (fourth term)

$\vdots$

a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับ (n th term) หรือ พจน์ทั่วไปของลำดับ (general term หรือ general formula)

ตัวอย่างของลำดับ

1. ลำดับจำกัด เช่น $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$

   $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$, $a_6 = 32$,

   $a_7 = 64$ และ $a_n = 2^{n-1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. ลำดับอนันต์ เช่น 1, 4, 7, 13, ...

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$, $a_4 = 13$

ตัวอย่างที่ 1.1. 3 จากลำดับ 9, 5, 1, -3, ... , 13 – 4n, ... สามารถหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับได้ ดังนี้

วิธีทำ พจน์ที่ 1 ของลำดับ คือ $a_1 = 9$

พจน์ที่ 2 ของลำดับ คือ $a_2 = 5$

พจน์ที่ 3 ของลำดับ คือ $a_3 = 1$

พจน์ที่ 4 ของลำดับ คือ $a_4 = -3$

พจน์ที่ n ของลำดับ คือ $a_n = 13 - 4n$

พจน์ที่ 10 ของลำดับ คือ $a_{10} = 13 - 4(10) = -27$

ตัวอย่างที่ 1.1.4 จากลำดับ 2, 5, 10, 17, ... , $n^2 + 1$, ... สามารถหาพจน์ต่าง ๆ ของลำดับได้ ดังนี้

วิธีทำ พจน์ที่ 1 ของลำดับ คือ $a_1 = 2$

พจน์ที่ 2 ของลำดับ คือ $a_2 = 5$

พจน์ที่ 3 ของลำดับ คือ $a_3 = 10$

พจน์ที่ 4 ของลำดับ คือ $a_4 = 17$

พจน์ที่ n ของลำดับ คือ $a_n = n^2 + 1$

พจน์ที่ n + 2 ของลำดับ คือ $a_{n+2} = (n + 2)^2 + 1 = n^2 + 4n + 5$

แบบฝึกทักษะที่ 1.1
เรื่อง : ความหมายของลำดับ

ชื่อ.....ชั้น .....เลขที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านข้อความต่อไปนี้ และแสดงวิธีหาคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

****

1. จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัด หรือเป็นลำดับอนันต์ (10 คะแนน)

1.1 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 เป็นลำดับ.....

1.2 6, 4, 2, ... , -100 เป็นลำดับ.....

1.3 1, 4, 9, ... , n^2 เป็นลำดับ.....

1.4 $a_n = 2n - 5$; $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ เป็นลำดับ.....

1.5 $a_n = 5n^2 + 1$; $n \in \{1, 2, 3, ... , k\}$ เป็นลำดับ.....

1.6 3, 9, 27, ... , 3^n ; $n \in \{1, 2, 3, ... , 10\}$ เป็นลำดับ.....

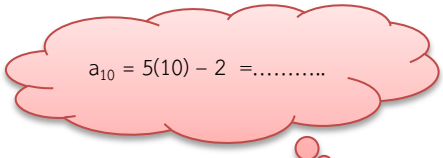
1.7 5, 10, 15, 20, ... , 5n, ... เป็นลำดับ.....

1.8 $a_n = 5n - 2$; $n \in \{1, 2, 3, ..., 100\}$ เป็นลำดับ.....

1.9 10, 20, 30, ... , 1000, ... เป็นลำดับ.....

1.10 $a_n = 3n^2 - 5$ เป็นลำดับ.....

2. จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง (10 คะแนน)



2.1 จากลำดับ 3, 8, 13, 18, 23, ... , 5n – 2, ...

a_1 = ... a_2 = ... a_3 = ...

a_4 = ... a_5 = ... a_{10} = ...

a_{35} = ... a_{50} = ... a_n = ... a_{n+1} = ...

2.2 จากลำดับ 10, 6, 2, -2, -6, ... , -4n + 14

a_1 = ... a_2 = ... a_3 = ...

a_4 = ... a_5 = ... a_{15} = ...

a_{50} = ... a_{100} = ... a_n = ...

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

เรื่อง : ความหมายของลำดับ

ชื่อ.....ชั้น .....เลขที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านข้อความต่อไปนี้ และแสดงวิธีหาคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

****

1. จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นลำดับจำกัด หรือลำดับอนันต์

1.1 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 เป็นลำดับจำกัด

1.2 6, 4, 2, ... , −100 เป็นลำดับจำกัด

1.3 1, 4, 9, ... , n^2 เป็นลำดับอนันต์

1.4 $a_n = 2n - 5$; $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ เป็นลำดับอนันต์

1.5 $a_n = 5n^2 + 1$; $n \in \{1, 2, 3, ..., k\}$ เป็นลำดับจำกัด

1.6 3, 9, 27, ... , 3^n ; $n \in \{1, 2, 3, ... , 10\}$ เป็นลำดับจำกัด

1.7 5, 10, 15, 20, ... , 5n, ... เป็นลำดับอนันต์

1.8 $a_n = 5n - 2$; $n \in \{1, 2, 3, ..., 100\}$ เป็นลำดับจำกัด

1.9 10, 20, 30, ... , 1000, ... เป็นลำดับอนันต์

1.10 $a_n = 3n^2 - 5$ เป็นลำดับอนันต์

2. จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง

2.1 จากลำดับ 3, 8, 13, 18, 23, ... , 5n − 2, ...

$a_1 = 3$ $a_2 = 8$ $a_3 = 13$ $a_4 = 18$

$a_5 = 23$ $a_{10} = 48$ $a_{35} = 173$ $a_{50} = 248$

$a_n = 5n - 2$ $a_{n+1} = 5n + 3$

2.2 จากลำดับ 10, 6, 2, −2, −6, ... , −4n + 14

$a_1 = 10$ $a_2 = 6$ $a_3 = 2$ $a_4 = -2$

$a_5 = -6$ $a_{15} = -46$ $a_{50} = -186$ $a_{100} = -386$

$a_n = -4n + 14$ $a_{n+5} = -4n - 6$

ใบความรู้ที่ 1.2

เรื่อง : การเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์

จุดประสงค์

1. สามารถหาสี่พจน์แรกของลำดับ เมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้ได้
2. สามารถเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์ได้

การเขียนลำดับ จะสามารถเขียนได้ 2 แบบ คือ

1. **แบบแจกแจงพจน์** หมายถึง การนำพจน์แต่ละพจน์ของลำดับมาเขียนเรียงกันโดยเริ่มด้วยพจน์ที่ 1 เสมอ และระหว่างพจน์สองพจน์จะคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,)

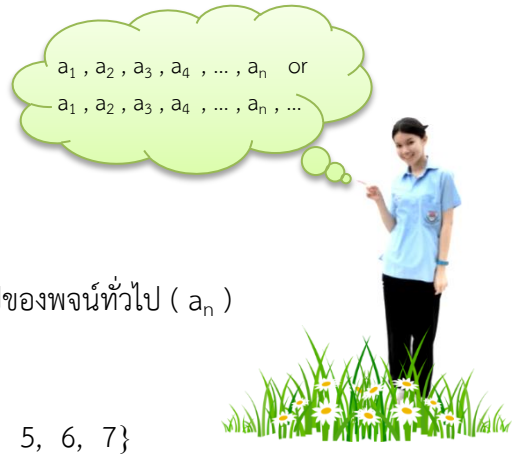
ตัวอย่าง การเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์

1) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

2) 1, 4, 7, 13, ...

3) −1, −3, −5, −7, ... , −99

4) 1, 3, 6, 10, 15, ... , $\frac{n(n+1)}{2}$, ...



2. **แบบบอกเงื่อนไข** หมายถึง การเขียนลำดับในรูปของพจน์ทั่วไป (a_n)

ตัวอย่าง การเขียนลำดับแบบบอกเงื่อนไข

1) $a_n = 2^{n-1}$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2) $a_n = 3n - 2$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

3) $a_n = 1 - 2n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, \dots , 50\}$

4) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ในกรณีที่เขียนเฉพาะพจน์ทั่วไป โดยไม่ระบุสมาชิกโดเมน ให้ถือว่าเป็นลำดับอนันต์นะจ๊ะ

ตัวอย่างที่ 1.2.1 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3n - 5$

วิธีทำ จาก $a_n = 3n - 5$

$a_1 = 3(1) - 5 = 3 - 5 = -2$

$a_2 = 3(2) - 5 = 6 - 5 = 1$

$a_3 = 3(3) - 5 = 9 - 5 = 4$

$a_4 = 3(4) - 5 = 12 - 5 = 7$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 3n - 5$ คือ $-2, 1, 4, 7$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 กำหนดลำดับ $a_n = 10 - 2n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 25\}$ จงเขียนลำดับ แบบแจกแจงพจน์

วิธีทำ จาก $a_n = 10 - 2n$

$a_1 = 10 - 2(1) = 10 - 2 = 8$

$a_2 = 10 - 2(2) = 10 - 4 = 6$

$a_3 = 10 - 2(3) = 10 - 6 = 4$

$\vdots$

$a_{25} = 10 - 2(25) = 10 - 50 = -40$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ $8, 6, 4, \ldots, -40$

ตัวอย่างที่ 1.2.3 จงเขียนลำดับ $a_n = n^2 - 3$ แบบแจกแจงพจน์

วิธีทำ จาก $a_n = n^2 - 3$

$a_1 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$

$a_2 = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$a_3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

$a_4 = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ $-2, 1, 6, 13, \ldots, n^2 - 3, \ldots$

แบบฝึกทักษะที่ 1.2
เรื่อง : การเขียนลำดับแบบการแจงพจน์

ชื่อ.....ชั้น .....เลขที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านข้อความต่อไปนี้ และแสดงวิธีหาคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

****

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้ (ข้อละ 2 คะแนน)

1.1 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2n + 7$

วิธีทำ a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ .....

1.2 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = (-1)(2^n - 1)$

วิธีทำ a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ .....

1.3 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = (n - 2)(n + 1)$

วิธีทำ a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ .....

1.4 $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 1}$

วิธีทำ จาก $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 1}$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ .....

2. จงเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์ต่อไปนี้ (ข้อละ 3 คะแนน)

2.1 $a_n = 5n - 2$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 50\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 5n - 2$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

a_{50} = ...

ดังนั้น .....

2.2 $a_n = 7 - 3n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 7 - 3n$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

a_k = ...

ดังนั้น .....

2.3 $a_n = 2n^2 - 10$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 2n^2 - 10$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น .....

2.4 $a_n = \dfrac{n-3}{2^n + 1}$ เมื่อ $n \in I^+$

วิธีทำ จาก $a_n = \dfrac{n-3}{2^n + 1}$

a_1 = ...

a_2 = ...

a_3 = ...

a_4 = ...

ดังนั้น .....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

เรื่อง : การเขียนลำดับแบบการแจงพจน์

ชื่อ.....ชั้น .....เลขที่ .....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านข้อความต่อไปนี้ และแสดงวิธีหาคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

****

1. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไปให้

1.1 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2n + 7$

วิธีทำ $a_1 = 2(1) + 7 = 9$

$a_2 = 2(2) + 7 = 11$

$a_3 = 2(3) + 7 = 13$

$a_4 = 2(4) + 7 = 15$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ 9, 11, 13, 15

1.2 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = (-1)(2^n - 1)$

วิธีทำ $a_1 = (-1)(2^1 - 1) = -1$

$a_2 = (-1)(2^2 - 1) = -3$

$a_3 = (-1)(2^3 - 1) = -7$

$a_4 = (-1)(2^4 - 1) = -15$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ $-1, -3, -7, -15$

1.3 จงหา 4 พจน์แรกของลำดับ $a_n = (n - 2)(n + 1)$

วิธีทำ $a_1 = (1 - 2)(1 + 1) = -2$

$a_2 = (2 - 2)(2 + 1) = 0$

$a_3 = (3 - 2)(3 + 1) = 4$

$a_4 = (4 - 2)(4 + 1) = 10$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ $-2, 0, 4, 10$

1.4 $a_n = \frac{2n - 3}{3n + 1}$

วิธีทำ $a_1 = \frac{2(1) - 3}{3(1) + 1} = -\frac{1}{4}$ $a_2 = \frac{2(2) - 3}{3(2) + 1} = \frac{1}{7}$

$a_3 = \frac{2(3) - 3}{3(3) + 1} = \frac{3}{10}$ $a_4 = \frac{2(4) - 3}{3(4) + 1} = \frac{5}{13}$

ดังนั้น 4 พจน์แรกของลำดับ คือ $-\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{10}, \frac{5}{13}$

2. จงเขียนลำดับแบบแจกแจงพจน์ต่อไปนี้

2.1 $a_n = 5n - 2$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, 50\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 5n - 2$

$a_1 = 5(1) - 2 = 3$

$a_2 = 5(2) - 2 = 8$

$a_3 = 5(3) - 2 = 13$

$a_4 = 5(4) - 2 = 18$

$a_{50} = 5(50) - 2 = 248$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ 3, 8, 13, 18, ... , 248

2.2 $a_n = 7 - 3n$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 7 - 3n$

$a_1 = 7 - 3(1) = 4$

$a_2 = 7 - 3(2) = 1$

$a_3 = 7 - 3(3) = -2$

$a_4 = 7 - 3(4) = -5$

$a_n = 7 - 3(k) = 7 - 3k$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ 4, 1, −2, −5, ... , $7 - 3k$

2.3 $a_n = 2n^2 - 10$ เมื่อ $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

วิธีทำ จาก $a_n = 2n^2 - 10$

$a_1 = 2(1^2) - 10 = -8$

$a_2 = 2(2^2) - 10 = -2$

$a_3 = 2(3^2) - 10 = 8$

$a_4 = 2(4^2) - 10 = 22$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ $-8, -2, 8, 22, \ldots, 2n^2 - 10, \ldots$

2.4 $a_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$ เมื่อ $n \in I^+$

วิธีทำ จาก $a_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

$a_1 = \dfrac{1-3}{1^2+1} = -\dfrac{2}{3}$

$a_2 = \dfrac{2-3}{2^2+1} = -\dfrac{1}{5}$

$a_3 = \dfrac{3-3}{3^2+1} = 0$

$a_4 = \dfrac{4-3}{4^2+1} = \dfrac{1}{17}$

ดังนั้น ลำดับนี้คือ $-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{5}, 0, \dfrac{1}{17}, \ldots, \dfrac{n-3}{n^2+1}, \ldots$