

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

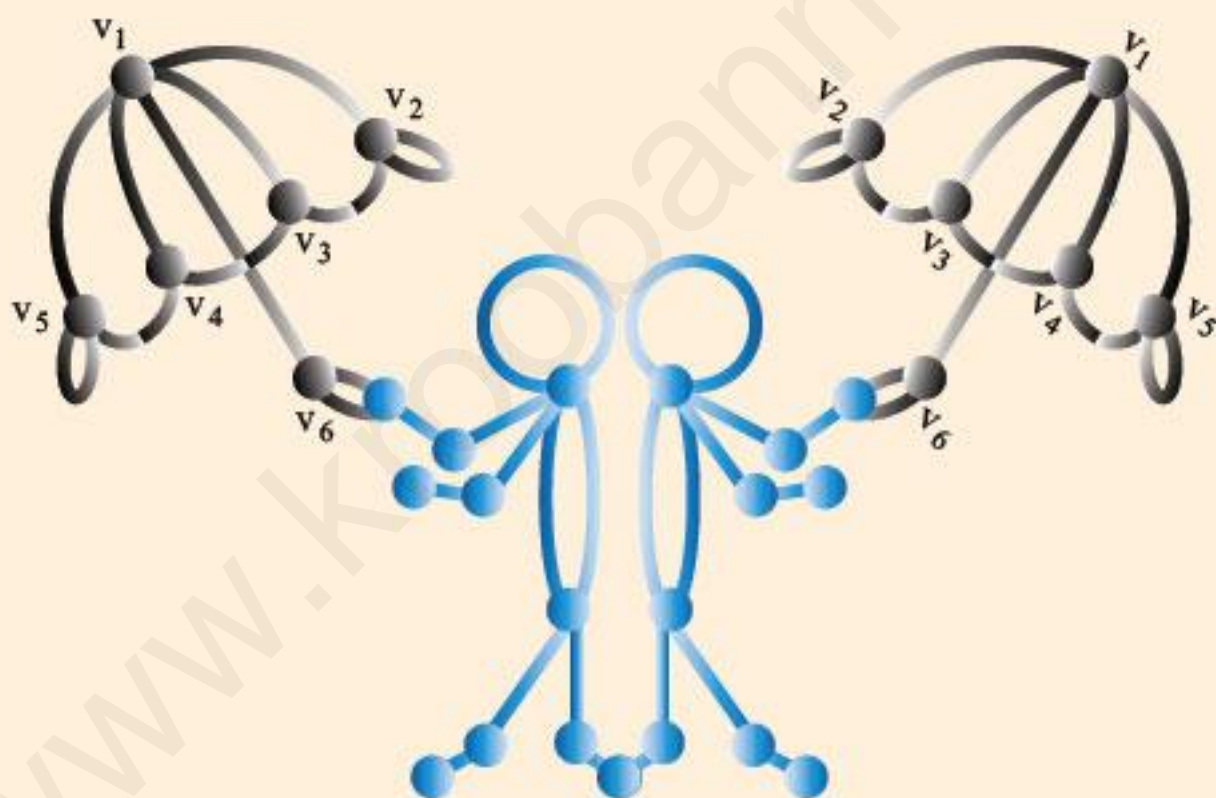
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เล่มที่

2

ติกรีบองจุดยอด



เพ็ญนิภา ศรีสุข

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนหนองอาจวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

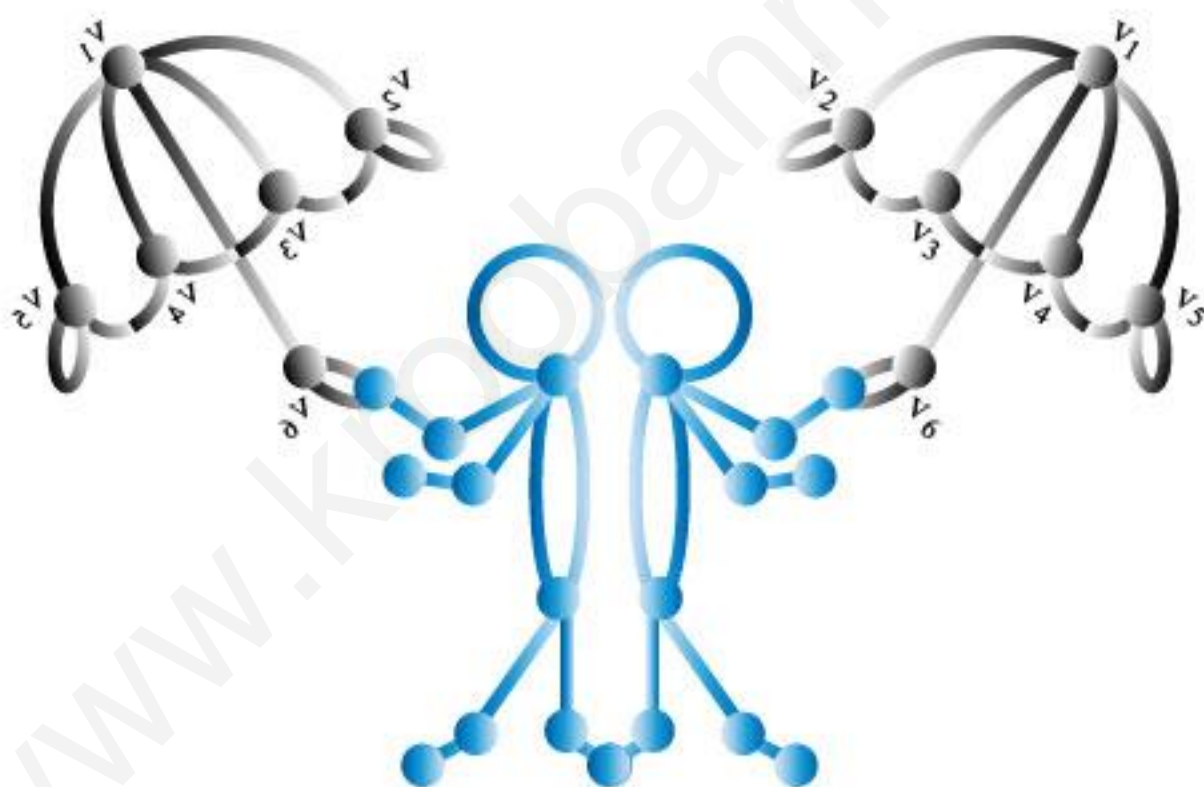
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เล่มที่

2

ติกรีบองจุดยอด



เพ็ญนิภา ศรีสุข

ตำแหน่ง ครู วิชาคณิตศาสตร์

โรงเรียนหนองฉางวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ทฤษฎีกราฟ
เบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดนี้จัดทำขึ้นเพื่อเป็นสื่อประกอบการ
จัดการเรียนรู้ สร้างเสริมและพัฒนากิจการการเรียนรู้ให้ประสบความสำเร็จ เป็นนวัตกรรม
สำหรับครู นำไปใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น สำหรับนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยแบ่งออกเป็น 5 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 เรื่อง กราฟ

เล่มที่ 2 เรื่อง ดีกรีของจุดยอด

เล่มที่ 3 เรื่อง แนวเดิน

เล่มที่ 4 เรื่อง กราฟออยเลอร์

เล่มที่ 5 เรื่อง การประยุกต์ของกราฟ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ทฤษฎีกราฟ
เบื้องต้น สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มนี้ เป็นแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 2 เรื่อง
ดีกรีของจุดยอด ประกอบด้วย คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ คำแนะนำ
การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และ
แบบทดสอบหลังเรียนพร้อมเฉลย

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ คงเป็นประโยชน์ต่อครู
และนักเรียนในการจัดการเรียนรู้ และสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาและพัฒนาทักษะ
ทางคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพต่อไป

เพ็ญนิภา ศรีสุข

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ



สารบัญ

	หน้า
คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	1
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน	2
จุดประสงค์การเรียนรู้	3
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ตีกริของจุดยอด	4
แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง ตีกริของจุดยอด	6
ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง ผลรวมของตีกริของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่	8
แบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง ผลรวมของตีกริของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่	10
ใบความรู้ที่ 3 เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา	14
แบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา	18
แบบทดสอบหลังเรียน	21
บรรณานุกรม	24
ภาคผนวก	25
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง ตีกริของจุดยอด	26
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง ผลรวมตีกริของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่	28
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา	32
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	35



คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

1. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีทั้งหมด 5 เล่ม ดังนี้
 เล่มที่ 1 เรื่อง กราฟ
 เล่มที่ 2 เรื่อง ดีกรีของจุดยอด
 เล่มที่ 3 เรื่อง แนวเดิน
 เล่มที่ 4 เรื่อง กราฟออยเลอร์
 เล่มที่ 5 เรื่อง การประยุกต์ของกราฟ
2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้ จัดทำขึ้นเพื่อเป็นสื่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ให้นักเรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ เป็นเล่มที่ 2 เรื่อง ดีกรีของจุดยอด ซึ่งประกอบด้วย
 - 3.1 คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
 - 3.2 คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน
 - 3.3 จุดประสงค์การเรียนรู้
 - 3.4 ใบความรู้
 - 3.5 แบบฝึกทักษะ
 - 3.6 แบบทดสอบหลังเรียน
 - 3.7 เฉลยแบบฝึกทักษะ
 - 3.8 เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
4. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ใช้เวลาเรียนจำนวน 3 ชั่วโมง

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน

1. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 2 เรื่อง ตีกริชของจุดยอด ใช้สำหรับฝึกทักษะนักเรียนเมื่อเรียนจบเนื้อหา
2. สามารถศึกษาความรู้เพิ่มเติมได้จากใบความรู้ในแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
3. เมื่อเข้าใจแล้วให้เริ่มทำแบบฝึกทักษะในการตอบใช้กระดาษคำตอบที่ครูมอบให้
4. เมื่อทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้ว ตรวจสอบความถูกต้องด้วยตนเอง หรือแลกเปลี่ยนตรวจกับเพื่อน หรือตรวจกับครู
5. หลังจากทำแบบทดสอบหลังเรียนเสร็จแล้ว ให้ตรวจสอบความถูกต้องกับครู
6. เมื่อเข้าใจขั้นตอนต่างๆ แล้ว ลงมือทำแบบฝึกทักษะ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ นักเรียนสามารถ

1. บอกดีกรีและหาผลรวมดีกรีของจุดยอดใดๆ ในกราฟได้
2. บอกได้ว่าจุดยอดใดเป็นจุดยอดคู่ จุดยอดใดเป็นจุดยอดคี่
3. นำความรู้เกี่ยวกับผลรวมของดีกรีของจุดยอดในกราฟ จุดยอดคู่ และจุดยอดคี่ ไปใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องต่างๆ ได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ นักเรียน

1. มีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. มีความสามารถในการให้เหตุผล
3. มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ
4. มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้
5. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ นักเรียน

1. มีความรับผิดชอบในการทำงาน
2. มีระเบียบวินัย
3. ทำงานเป็นระบบรอบคอบ
4. มีความสนใจใฝ่รู้
5. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์



ใบความรู้ที่ 1

เรื่อง ดีกรีของจุดยอด

ดีกรีของจุดยอด

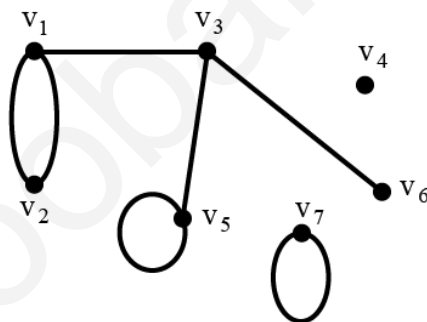
บทนิยาม ดีกรี (degree) ของจุดยอด v ในกราฟ คือ จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด v ใช้สัญลักษณ์ $\deg v$ แทนดีกรีของจุดยอด v

ข้อตกลง เกี่ยวกับดีกรีของจุดยอดที่มีวงวน และดีกรีของจุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อม มีดังนี้



- 1) a เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด a ดังรูป ให้ถือว่าเป็น 1 เส้น
จะได้ว่าดีกรีของจุดยอด a เท่ากับ 2 ดังนั้นวงวนแต่ละวงวนจะมีดีกรีเท่ากับ 2
- 2) จุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อม ให้ถือว่า ดีกรีของจุดยอดเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณากราฟต่อไปนี้

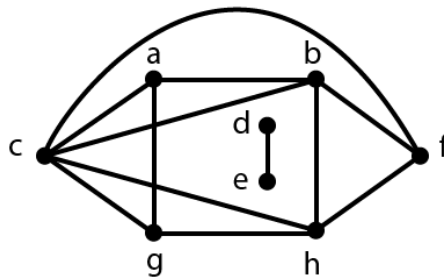


จากกราฟจะได้ว่า

จุดยอด	จำนวนครั้งทั้งหมดที่เส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอด
v_1	3
v_2	2
v_3	3
v_4	0
v_5	3
v_6	1
v_7	2

ตัวอย่างที่ 2

พิจารณากราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาดีกรีของกราฟ



วิธีทำ จากรูปจะได้ว่า $\deg a = 3$

$$\deg b = 4$$

$$\deg c = 5$$

$$\deg d = 1$$

$$\deg e = 1$$

$$\deg f = 3$$

$$\deg g = 3$$

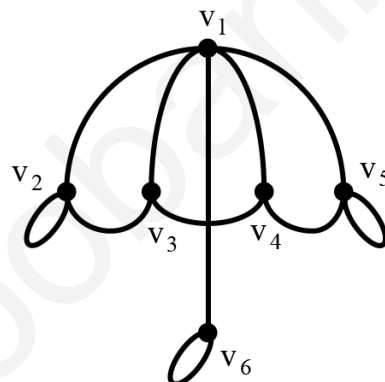
$$\deg h = 4$$

ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนแผนภาพกราฟ G เมื่อ $V(G) = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ และ

$$\deg V_1 = 5, \deg V_2 = 4, \deg V_3 = 3, \deg V_4 = 3, \deg V_5 = 4, \deg V_6 = 3$$

จะได้ตัวอย่างแผนภาพของกราฟดังนี้ (อาจวาดได้หลายรูปแบบ)



อย่าลืมนะคะ.....

1. ดีกรีของจุดยอดที่เป็นวงวน จะมีดีกรีเท่ากับ 2
2. จุดยอดที่ไม่มีเส้นเชื่อมให้ถือว่าดีกรีของจุดยอดเป็น ศูนย์



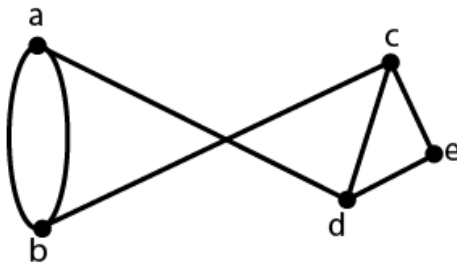
แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง ดีกรีของจุดยอด

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

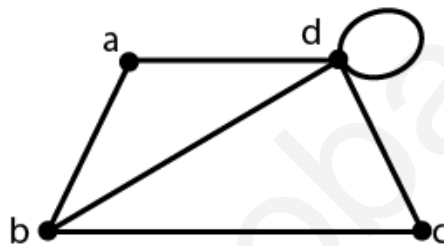
1. จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟต่อไปนี้

1)



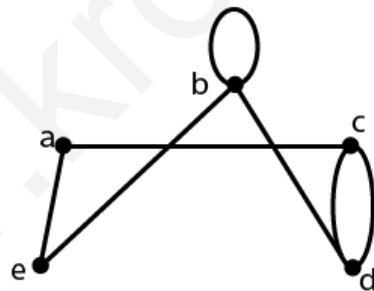
deg a =
deg b =
deg c =
deg d =
deg e =

2)



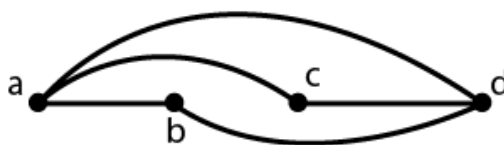
deg a =
deg b =
deg c =
deg d =

3)



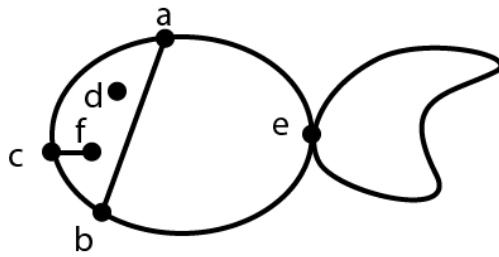
deg a =
deg b =
deg c =
deg d =
deg e =

4)



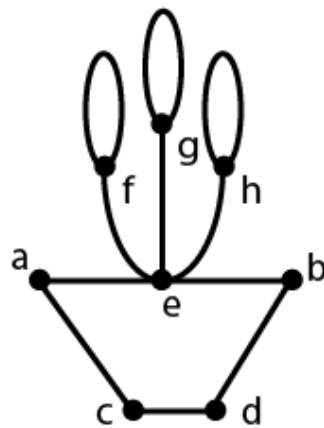
deg a =
deg b =
deg c =
deg d =

5)



deg a =
deg b =
deg c =
deg d =
deg e =
deg f =

6)



deg a =
deg b =
deg c =
deg d =
deg e =
deg f =
deg g =
deg h =

2. จงเขียนกราฟ G ที่มีจุดยอด 5 จุด คือ A, B, C, D, E และ $\deg A = 3$, $\deg B = 3$, $\deg C = 2$ และ D และ E เป็นจุดยอดประชิด



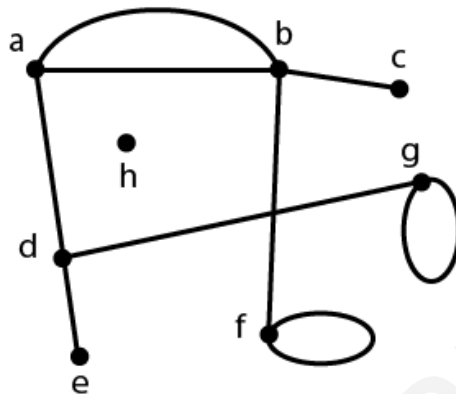
ใบความรู้ที่ 2

เรื่อง ผลรวมของดีกรีของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่

ผลรวมของดีกรีของจุดยอด

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดกราฟ G ดังรูป จงพิจารณาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดในกราฟและหาผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ G



$\deg a$	$= 3$
$\deg b$	$= 4$
$\deg c$	$= 1$
$\deg d$	$= 3$
$\deg e$	$= 1$
$\deg f$	$= 3$
$\deg g$	$= 3$
$\deg h$	$= 0$

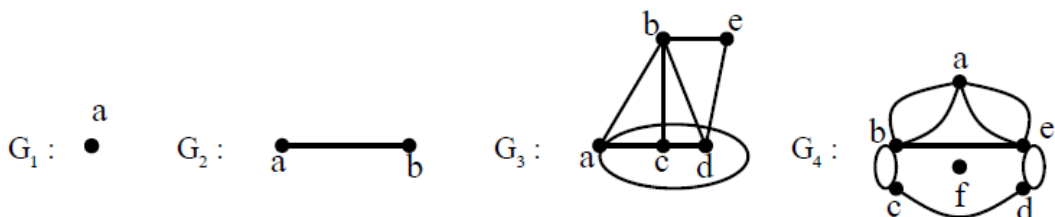
ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ $3 + 4 + 1 + 3 + 1 + 3 + 3 + 0 = 18$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 9 เส้น

จุดยอดคู่และจุดยอดคี่

บทนิยาม จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคู่ เรียกว่า จุดยอดคู่ (even vertex)
จุดยอดที่มีดีกรีเป็นจำนวนคี่ เรียกว่า จุดยอดคี่ (odd vertex)

ตัวอย่างที่ 2

ให้หาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของแต่ละกราฟ ดังนี้

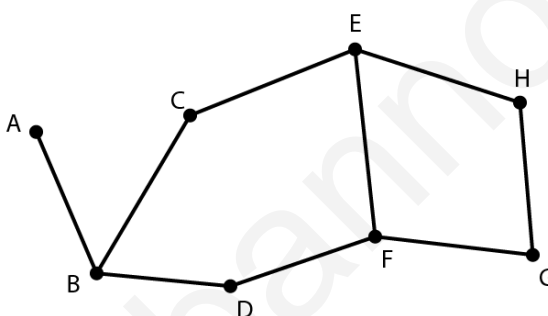


จากกราฟข้างต้นสามารถเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ของผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ และจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ ได้ดังนี้

กราฟ	จำนวนเส้นเชื่อม	ผลบวกของดีกรีของจุดยอดทุกจุดของกราฟ	จำนวนจุดยอดคี่	จำนวนจุดยอดคู่
G_1	0	0	0	1
G_2	1	2	2	0
G_3	8	16	2	3
G_4	10	20	4	2

ตัวอย่างที่ 3

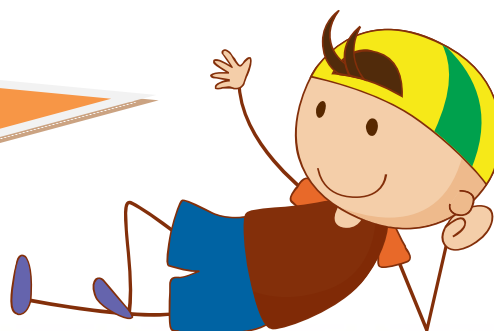
จงพิจารณาจุดแต่ละจุดในกราฟว่าจุดใดเป็นจุดยอดคู่ จุดใดเป็นจุดยอดคี่



วิธีทำ

จุดที่เป็นจุดยอดคู่	จุดที่เป็นจุดยอดคี่
จุด D มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด A มีดีกรีเท่ากับ 1
จุด F มีดีกรีเท่ากับ 4	จุด B มีดีกรีเท่ากับ 3
จุด H มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด C มีดีกรีเท่ากับ 3
จุด G มีดีกรีเท่ากับ 2	จุด E มีดีกรีเท่ากับ 3

พร้อมแล้วไปทำ
แบบฝึกทักษะกันนะครับ



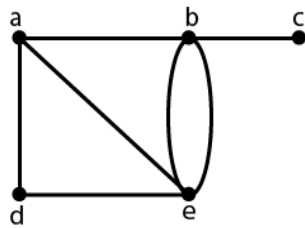
แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง ผลรวมของดีกรีของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

1. จงหาผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟต่อไปนี้

1)



$\deg a = \dots\dots\dots$

$\deg b = \dots\dots\dots$

$\deg c = \dots\dots\dots$

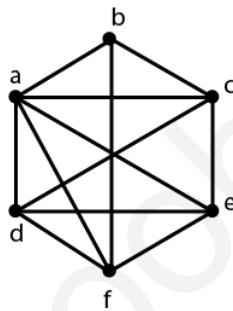
$\deg d = \dots\dots\dots$

$\deg e = \dots\dots\dots$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ

2)



$\deg a = \dots\dots\dots$

$\deg b = \dots\dots\dots$

$\deg c = \dots\dots\dots$

$\deg d = \dots\dots\dots$

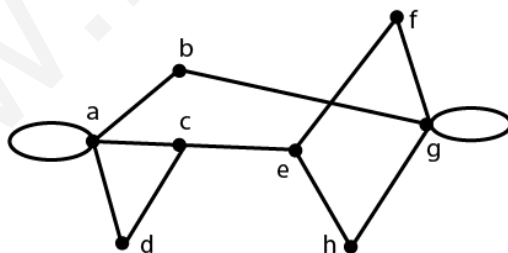
$\deg e = \dots\dots\dots$

$\deg f = \dots\dots\dots$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ

3)



$\deg a = \dots\dots\dots$

$\deg b = \dots\dots\dots$

$\deg c = \dots\dots\dots$

$\deg d = \dots\dots\dots$

$\deg e = \dots\dots\dots$

$\deg f = \dots\dots\dots$

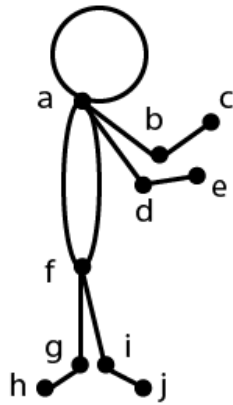
$\deg g = \dots\dots\dots$

$\deg h = \dots\dots\dots$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ

4)



deg a =

deg b =

deg c =

deg d =

deg e =

deg f =

deg g =

deg h =

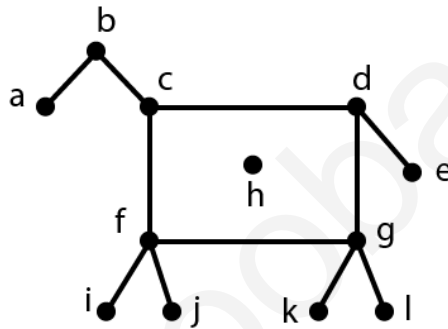
deg i =

deg j =

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ

5)



deg a =

deg b =

deg c =

deg d =

deg e =

deg f =

deg g =

deg h =

deg i =

deg j =

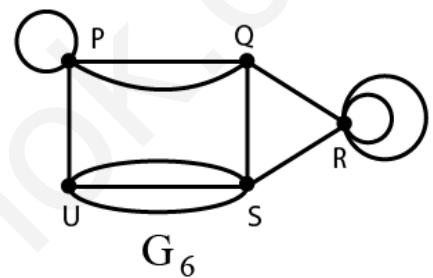
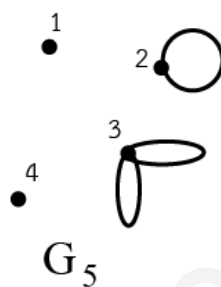
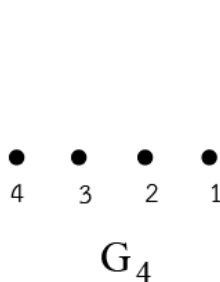
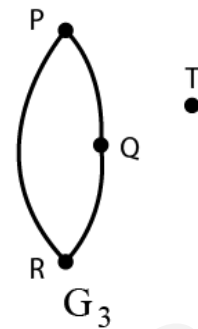
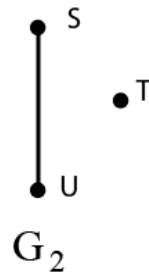
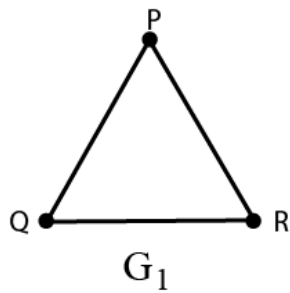
deg k =

deg l =

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ

2. จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้และตอบคำถาม



จากกราฟจะได้ว่า

กราฟ G_1 $\deg P = \dots\dots\dots$, $\deg Q = \dots\dots\dots$, $\deg R = \dots\dots\dots$
 จุดยอด P, Q, R เป็นจุดยอดคู่
 กราฟ G_1 มีจุดยอดคี่.....จุด

กราฟ G_2 $\deg S = \dots\dots\dots$, $\deg U = \dots\dots\dots$, $\deg T = \dots\dots\dots$
 จุดยอด T เป็นจุดยอดคี่ จุดยอด S, U เป็นจุดยอดคู่
 กราฟ G_2 มีจุดยอดคี่.....จุด

กราฟ G_3 $\deg P = \dots\dots\dots$, $\deg Q = \dots\dots\dots$, $\deg R = \dots\dots\dots$,
 $\deg T = \dots\dots\dots$
 จุดยอด P, Q, R, T เป็นจุดยอดคู่
 กราฟ G_3 มีจุดยอดคี่.....จุด

กราฟ G_4 $\deg 1 = \dots\dots\dots$, $\deg 2 = \dots\dots\dots$, $\deg 3 = \dots\dots\dots$,
 $\deg 4 = \dots\dots\dots$
 จุดยอด 1, 2, 3, 4 เป็นจุดยอด.....
 กราฟ G_4 มีจุดยอดคี่.....จุด

กราฟ G_5 $\deg 1 = \dots\dots\dots$, $\deg 2 = \dots\dots\dots$, $\deg 3 = \dots\dots\dots$,
 $\deg 4 = \dots\dots\dots$, $\deg 5 = \dots\dots\dots$
 จุดยอด 1, 2, 3, 4, 5 เป็นจุดยอด.....
 กราฟ G_5 มีจุดยอดคือ.....จุด

กราฟ G_6 $\deg P = \dots\dots\dots$, $\deg Q = \dots\dots\dots$, $\deg R = \dots\dots\dots$,
 $\deg S = \dots\dots\dots$, $\deg U = \dots\dots\dots$
 จุดยอด Q, R, U เป็นจุดยอด.....
 จุดยอด P, S เป็นจุดยอด.....
 กราฟ G_6 มีจุดยอดคือ.....จุด



ใบความรู้ที่ 3

เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา

ทฤษฎีบทที่ 1

การหาผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ จะอาศัยทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

พิสูจน์ เนื่องจากเส้นเชื่อมแต่ละเส้นในกราฟ เกิดกับจุดยอดเป็นจำนวนสองครั้ง ดังนั้น เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกนับ 2 ครั้ง ในผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุด นั่นคือ ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

ข้อสังเกต ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเป็นจำนวนคู่เสมอ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟที่ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับ 22

วิธีทำ สมมติว่ากราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น

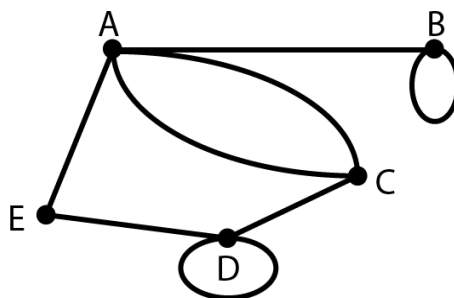
จากทฤษฎีบท ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟจะเท่ากับ สองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

$$\text{ดังนั้น} \quad 22 = 2n$$

$$\text{นั่นคือ} \quad n = 11$$

สรุปว่า กราฟมีเส้นเชื่อม 11 เส้น

ตัวอย่างที่ 2 จากกราฟ G ดังรูป จงแสดงว่าผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ



วิธีทำ จากกราฟจะได้เส้นเชื่อมทั้งหมด 8 เส้น และ
 $\deg A = 4, \deg B = 3, \deg C = 3, \deg D = 4, \deg E = 2$
 ดังนั้น $\deg A + \deg B + \deg C + \deg D + \deg E = 4 + 3 + 3 + 4 + 2 = 16$
 แสดงว่าผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับ 16 ซึ่งเท่ากับสองเท่าของเส้น
 เชื่อมคือ $2(8) = 16$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาจำนวนจุดยอดของกราฟที่มีเส้นเชื่อม 15 เส้น และมีจุดยอด 3 จุดที่มีดีกรี
 เท่ากับ 4 ส่วนจุดยอดที่เหลือมีดีกรีเท่ากับ 3

วิธีทำ ให้ n เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3
 ดังนั้น ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ คือ $(3)(4) + (3)(n)$
 จากทฤษฎีบท ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของ
 เส้นเชื่อมในกราฟ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad (3)(4) + (3)(n) &= (2)(15) \\ 12 + 3n &= 30 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

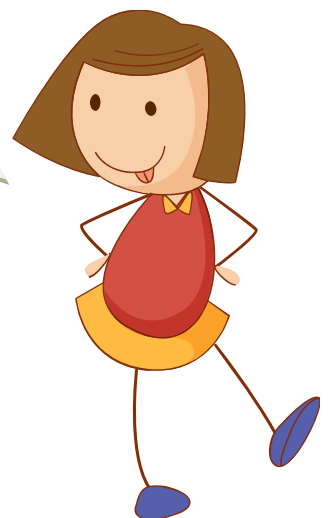
จะได้ว่า จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 มีจุดยอดทั้งหมด 6 จุด

จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 4 มีจุดยอดทั้งหมด 3 จุด

ดังนั้น จำนวนจุดยอดทั้งหมดของกราฟ คือ $3 + 6 = 9$

สรุป

1. ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ
เป็นจำนวนคู่เสมอ
2. จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับครึ่งหนึ่ง
ของผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ
หรือผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ
เป็นสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม



ทฤษฎีบทที่ 2

ทฤษฎีบทที่ 2 ทุกกราฟจะมีจุดยอดที่เป็นจำนวนคู่

ตัวอย่างที่ 4

ถ้าในห้องประชุมแห่งหนึ่งมีผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมด 23 คน เป็นไปได้หรือไม่ว่า ผู้เข้าประชุมแต่ละคนจับมือทักทายผู้เข้าประชุมคนอื่นเพียง 7 คนเท่านั้น

วิธีทำ แปลงปัญหาดังกล่าวเป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทนผู้เข้าประชุม

และเส้นเชื่อมแทนการจับมือทักทายของผู้เข้าประชุม

จะได้ว่า กราฟนี้มีจุดยอด 23 จุด และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรี 7

นั่นคือ กราฟมีจุดยอดที่เป็นจำนวน 23 จุด ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ขัดแย้งกับทฤษฎีบทที่ 2

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่ผู้เข้าประชุมแต่ละคนจับมือกับคนอื่นเพียง 7 คนเท่านั้น

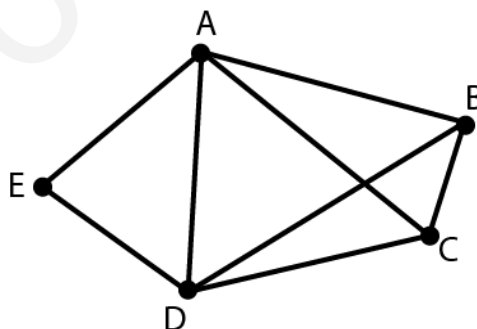
ตัวอย่างที่ 5

ในการประชุมคณะกรรมการนักเรียนซึ่งประกอบด้วย ประธาน, รองประธาน, เภรัณญิก, ปฏิคม และ เลขานุการ โดยกำหนดว่า ให้คณะกรรมการจับมือกันดังนี้ ประธานจับมือกับเพื่อน 4 ครั้ง รองประธานจับมือกับเพื่อน 3 ครั้ง เภรัณญิกจับมือกับเพื่อน 3 ครั้ง ปฏิคมจับมือกับเพื่อน 4 ครั้ง เลขานุการจับมือกับเพื่อน 2 ครั้ง จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ คณะกรรมการนักเรียนจะจับมือทักทายกันตามที่กำหนด

วิธีทำ แปลงปัญหาให้เป็นกราฟ โดยให้จุดยอดแทน ประธาน, รองประธาน, เภรัณญิก, ปฏิคม และเลขานุการ เส้นเชื่อมแทนการจับมือทักทายของคณะกรรมการนักเรียน จะได้ว่า

กราฟนี้มีจุดยอด 5 จุด โดยให้ A แทน ประธาน, B แทน รองประธาน,

C แทน เภรัณญิก, D แทน ปฏิคม และ E แทน เลขานุการ



ดังนั้น จุดยอด A มีดีกรีเท่ากับ 4

จุดยอด B มีดีกรีเท่ากับ 3

จุดยอด C มีดีกรีเท่ากับ 3

จุดยอด D มีดีกรีเท่ากับ 4

จุดยอด E มีดีกรีเท่ากับ 2

จะเห็นว่า กราฟมีจุดยอดที่เป็นจำนวนคี่ สอดคล้องกับทฤษฎีบท

ดังนั้น คณะกรรมการนักเรียนจะจับมือทักทายกันได้ตามที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 6

ผลการสำรวจข้อมูลการใช้โทรศัพท์มือถือของพนักงานในบริษัทแห่งหนึ่งซึ่งมีพนักงาน 20 คน ในเดือนที่ผ่านมาพบว่า มีพนักงาน 15 คน แต่ละคนคุยโทรศัพท์มือถือกับเพื่อนในบริษัท 5 ครั้ง มีพนักงาน 5 คน แต่ละคนคุยโทรศัพท์มือถือกับเพื่อนในบริษัท 3 ครั้ง จงหาจำนวนการใช้โทรศัพท์มือถือของพนักงานบริษัทนี้

วิธีทำ แปลงปัญหาเป็นกราฟ โดยให้ จุดยอด แทนพนักงาน เส้นเชื่อม แทนการคุยโทรศัพท์มือถือของพนักงาน

จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 5 มีจำนวน 15 จุด และจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 มีจำนวน 5 จุด จำนวนการใช้โทรศัพท์มือถือของพนักงานในบริษัท ก็คือจำนวนเส้นทั้งหมดของกราฟ สมมติว่ากราฟมีเส้นเชื่อม n เส้น จากทฤษฎีบท 1 ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟ เท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อมในกราฟ

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น} \quad 5(15) + 3(5) &= 2n \\ 75 + 15 &= 2n \\ n &= 45\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนการใช้โทรศัพท์มือถือของพนักงานบริษัทแห่งนี้ คือ 45 ครั้ง

ตัวอย่างที่ 7

จังหวัดหนึ่งมีอำเภออยู่ 17 อำเภอ ต้องการสร้างถนนเชื่อมอำเภอเหล่านี้ โดยให้แต่ละอำเภอมียถนนเชื่อมกับอำเภออื่นอีก 3 สายพอดี จงหาว่าสามารถสร้างถนนตามเงื่อนไขดังกล่าวได้หรือไม่

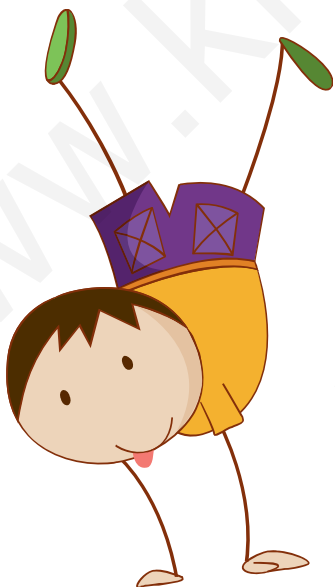
วิธีทำ แปลงปัญหาเป็นกราฟ โดยให้ จุดยอด แทน อำเภอ เส้นเชื่อม แทน ถนน

กราฟมีจุดยอด 17 จุด และแต่ละจุดยอดมีดีกรีเท่ากับ 3

จะได้ว่า กราฟมีจุดยอดคือ จำนวน 17 จุด

ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 2 นั่นคือการสร้างถนนตามเงื่อนไขดังกล่าวไม่สามารถแปลงเป็นกราฟได้

ดังนั้น การสร้างถนนตามเงื่อนไขโจทย์จึงเป็นไปไม่ได้



เข้าใจแล้วทำ
แบบฝึกทักษะกัน
ดีกว่าครับ...

แบบฝึกทักษะที่ 3
เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

1. ถ้ากราฟมีดีกรีของจุดยอด $A = 3$, จุดยอด $B = 2$, จุดยอด $C = 4$, จุดยอด $D = 3$ แล้วเส้นเชื่อมของกราฟจะมีกี่เส้น

.....

.....

.....

.....

.....

2. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 14 เส้น จะมีผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้กราฟมีดีกรีของจุดยอดต่างๆ ดังนี้ 1, 1, 4, 4, และ 6 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

.....

.....

.....

.....

.....

4. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 26 เส้น และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 4 จะมีจุดยอดกี่จุด

.....

.....

.....

.....

.....

5. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 30 เส้น และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 5 จะมีจุดยอดกี่จุด

.....

.....

.....

.....

.....

6. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ตำบลหนึ่งมี 5 หมู่บ้าน โดยมี 3 หมู่บ้านซึ่งแต่ละหมู่บ้านมีถนนเชื่อมหมู่บ้านอื่นเพียง 3 สาย , มี 1 หมู่บ้านที่มีถนนเชื่อมกับหมู่บ้านอื่นเพียง 2 สาย และมี 1 หมู่บ้านมีถนนเชื่อมกับหมู่บ้านที่เหลือทุกหมู่บ้าน

.....

.....

.....

.....

.....

7. เป็นไปได้หรือไม่ที่แต่ละคนในกลุ่มคนจำนวน 9 คน จะมีเพื่อนสนิทในกลุ่ม 5 คน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. ประเทศหนึ่งมีเมืองทั้งหมด 17 เมือง ถ้าต้องการสร้างถนนเชื่อมเมืองเหล่านี้โดยให้แต่ละเมืองมีถนนเชื่อมกับเมืองอื่นอีก 5 สายพอดี จะสามารถทำได้หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. เมืองหนึ่งมีชุมสายโทรศัพท์ทั้งหมด 25 ชุมสาย ถ้าต้องการเชื่อมสายโทรศัพท์ระหว่างชุมสายโดยแต่ละชุมสายเชื่อมโยงกับชุมสายอื่นๆ อีก 9 ชุมสาย จะสามารถทำได้หรือไม่

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. ชั้นเรียนหนึ่งมีนักเรียน 50 คน เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีนักเรียนจำนวน 20 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 3 คนในชั้น มี 13 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 4 คนในชั้น และมี 17 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 5 คนในชั้น

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

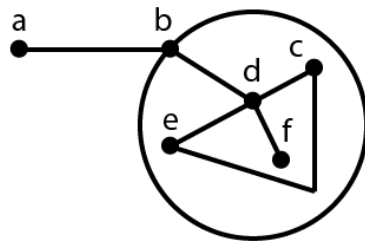


แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 2 เรื่อง ดิกรีของจุดยอด

คำชี้แจงในการทำแบบทดสอบ

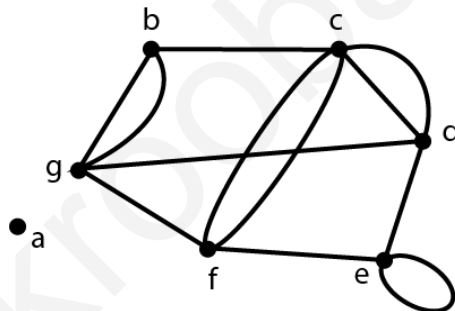
1. แบบทดสอบเป็นแบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ 10 คะแนน
2. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วกากบาท (X) ลงในกระดาษคำตอบ

1. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหาว่าจุดยอดในข้อใดเป็นจุดยอดคู่ทั้งหมด



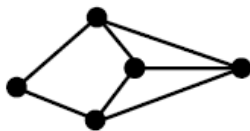
- | | |
|------------------|------------------|
| ก. จุดยอด b, f | ข. จุดยอด a, d |
| ค. จุดยอด c, f | ง. จุดยอด b, e |

2. กำหนดกราฟ G ดังรูป จงหาผลรวมของดิกรีของจุดยอดทุกๆ จุดในกราฟ G



- | | |
|-------|-------|
| ก. 20 | ข. 22 |
| ค. 23 | ง. 24 |

3. กราฟในข้อใดต่อไปนี้ มีผลรวมของดิกรีของทุกจุดยอดเท่ากับ 12



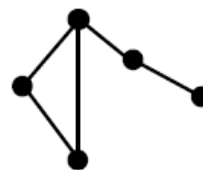
ก.



ข.

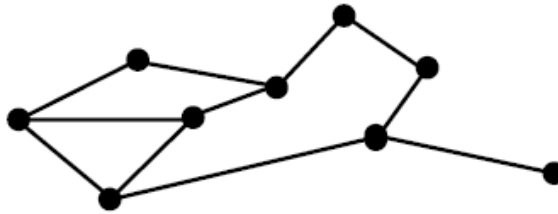


ค.



ง.

4. กำหนดกราฟดังแผนภาพต่อไปนี้



ผลรวมของดีกรีของทุกจุดยอดในกราฟเท่ากับข้อใด

ก. 20

ข. 21

ค. 22

ง. 23

5. ถ้ากราฟ G มีผลรวมดีกรีของจุดยอดทุกจุดเท่ากับ 18 แล้ว กราฟมีเส้นเชื่อมกี่เส้น

ก. 6 เส้น

ข. 7 เส้น

ค. 8 เส้น

ง. 9 เส้น

6. กราฟที่มีเส้นเชื่อม 45 เส้น มีจุดยอดที่มีดีกรี 3 อยู่ 10 จุด นอกนั้นมีดีกรี 6 จงหาว่ากราฟนี้มีจุดยอดทั้งหมดกี่จุด

ก. 8 จุด

ข. 14 จุด

ค. 20 จุด

ง. 22 จุด

7. ถ้าจุดในกราฟ G มีดีกรี 2 หรือ 5 เท่านั้น และจำนวน $V(G) = 10$ และจำนวน $E(G) = 22$ จงหาจำนวนจุดยอดที่มีดีกรี 5

ก. 5

ข. 7

ค. 8

ง. 10

8. กราฟในข้อใดต่อไปนี้ ที่ไม่สามารถสร้างได้

ก. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 4, 3, 2, 2, 1

ข. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 3, 3, 2, 2, 2

ค. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 5, 3, 3, 2, 1

ง. กราฟที่มี 5 จุด และมีดีกรีเป็น 4, 3, 2, 1, 1

9. ในงานเลี้ยงหนึ่ง มีผู้ร่วมงาน 7 คน ซึ่งแต่ละคนจะทักทายกันด้วยการจับมือ เป็นไปได้หรือไม่ที่ผู้มาร่วมงานทั้ง 7 คน ซึ่งแต่ละคนจะทักทายกันด้วยการจับมือเป็นจำนวน 0, 1, 2, 3, 3, 4 และ 4 ครั้ง ตามลำดับ

ก. ได้ เพราะว่า มีจุดยอดที่เป็นจำนวนคี่จุด

ข. ได้ เพราะว่า ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมดเป็นจำนวนคี่

ค. ไม่ได้ เพราะว่า ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมดเป็นจำนวนคี่

ง. ไม่ได้ เพราะว่า มีจุดยอดที่มีดีกรีเป็น 0

10. ถ้าต้องการลากส่วนของเส้นตรง 15 เส้นในระนาบ โดยมีเงื่อนไขว่า แต่ละเส้นจะต้องตัดกับส่วนของเส้นตรงอื่น 3 ครั้งพอดี จงหาผลรวมของดีกรี และเหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นได้หรือไม่

- ก. 45 , เป็นไปได้ เพราะว่า มีจุดยอดคู่เป็นจำนวนคี่จุด
- ข. 60 , เป็นไปได้ เพราะว่า ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมดเป็นจำนวนคู่
- ค. 45 , เป็นไปไม่ได้ เพราะว่า ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมดเป็นจำนวนคี่
- ง. 60 , เป็นไปไม่ได้ เพราะว่า มีจุดยอดคี่เป็นจำนวนคู่จุด



บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2554). **แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4**. กรุงเทพฯ: เดอะบุคส์.
- ธนวัฒน์ สนทราพรผล. **แบบฝึกทักษะและวิธีคิดเลขเร็ว คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 4 – 6
เล่ม 4**. กรุงเทพฯ: SICENCE CENTER.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). **หนังสือเรียน
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4- 6 เล่ม 4**. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสศ. ลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2554). **คู่มือครู
รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4- 6**. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ:
โรงพิมพ์ สกสศ. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (2554). **คณิตศาสตร์ ม. 4 – 6 เล่ม 4 (รายวิชา
พื้นฐานและเพิ่มเติม)**. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2551). **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ หลักสูตร
ลดระยะเวลาเรียน สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา
ตอนปลาย**. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ: บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด.

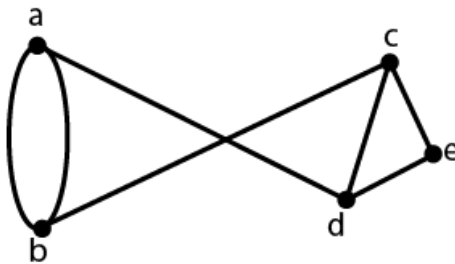
ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง ดีกรีของจุดยอด

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

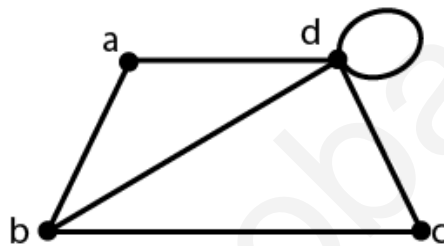
1. จงหาดีกรีของจุดยอดแต่ละจุดของกราฟต่อไปนี้

1)



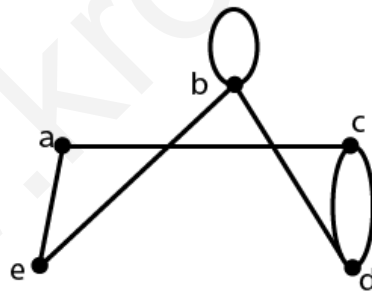
deg a = 3
deg b = 3
deg c = 3
deg d = 3
deg e = 2

2)



deg a = 2
deg b = 3
deg c = 2
deg d = 5

3)



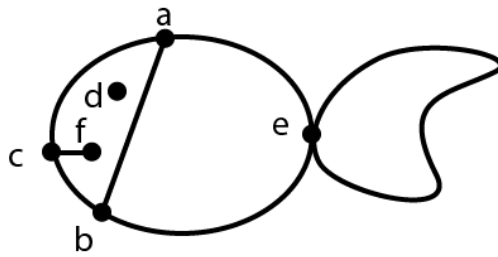
deg a = 2
deg b = 4
deg c = 3
deg d = 3
deg e = 2

4)



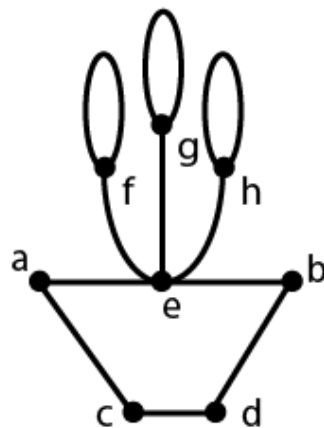
deg a = 3
deg b = 2
deg c = 2
deg d = 3

5)



deg a = 3
deg b = 3
deg c = 3
deg d = 0
deg e = 4
deg f = 1

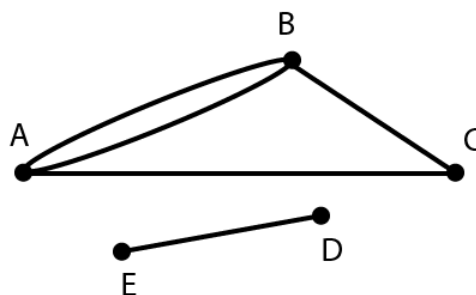
6)



deg a = 2
deg b = 2
deg c = 2
deg d = 2
deg e = 5
deg f = 3
deg g = 3
deg h = 3

2. จงเขียนกราฟ G ที่มีจุดยอด 5 จุด คือ A, B, C, D, E และ $\deg A = 3$, $\deg B = 3$, $\deg C = 2$ และ D และ E เป็นจุดยอดประชิด

สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบตัวอย่างเช่น



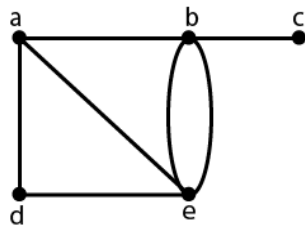
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง ผลรวมของดีกรีของจุดยอด จุดยอดคู่และจุดยอดคี่

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

1. จงหาผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟและจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟต่อไปนี้

1)



$$\deg a = 3$$

$$\deg b = 4$$

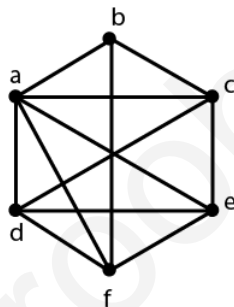
$$\deg c = 1$$

$$\deg d = 2$$

$$\deg e = 4$$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ $3 + 4 + 1 + 2 + 4 = 14$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 7 เส้น

2)



$$\deg a = 5$$

$$\deg b = 3$$

$$\deg c = 4$$

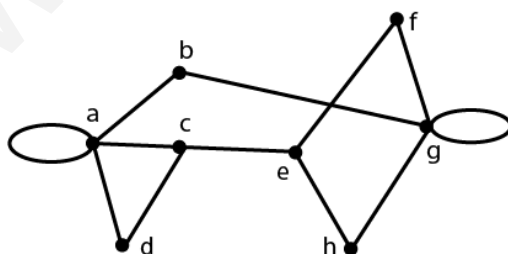
$$\deg d = 4$$

$$\deg e = 4$$

$$\deg f = 4$$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ $5 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 12 เส้น

3)



$$\deg a = 5$$

$$\deg b = 2$$

$$\deg c = 3$$

$$\deg d = 2$$

$$\deg e = 3$$

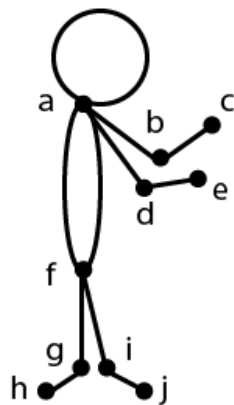
$$\deg f = 2$$

$$\deg g = 5$$

$$\deg h = 2$$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ $5 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 5 + 2 = 24$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 12 เส้น

4)



$$\deg a = 6$$

$$\deg b = 2$$

$$\deg c = 1$$

$$\deg d = 2$$

$$\deg e = 1$$

$$\deg f = 4$$

$$\deg g = 2$$

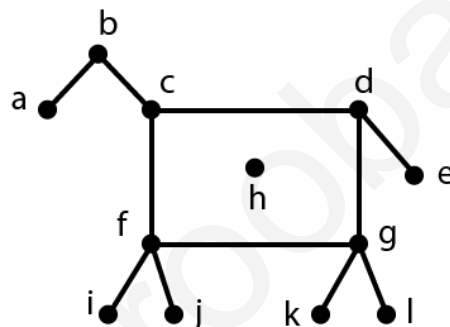
$$\deg h = 1$$

$$\deg i = 2$$

$$\deg j = 1$$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ $6 + 2 + 1 + 2 + 1 + 4 + 2 + 1 + 2 + 1 = 22$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 11 เส้น

5)



$$\deg a = 1$$

$$\deg b = 2$$

$$\deg c = 3$$

$$\deg d = 3$$

$$\deg e = 1$$

$$\deg f = 4$$

$$\deg g = 4$$

$$\deg h = 0$$

$$\deg i = 1$$

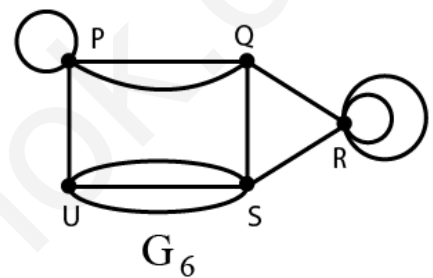
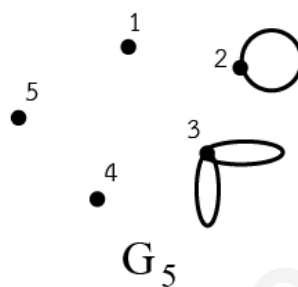
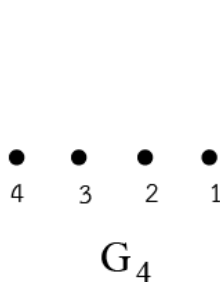
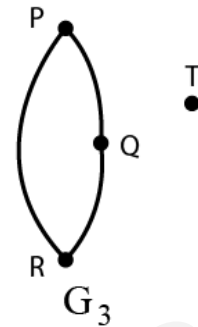
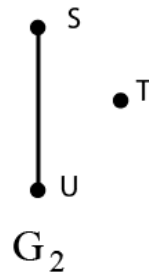
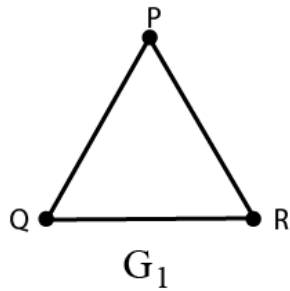
$$\deg j = 1$$

$$\deg k = 1$$

$$\deg l = 1$$

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ
 $1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 4 + 4 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 22$
จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 11 เส้น

2. จงพิจารณากราฟที่กำหนดให้และตอบคำถาม



จากกราฟจะได้ว่า

กราฟ G_1

$\deg P = 2$, $\deg Q = 2$, $\deg R = 2$

จุดยอด P, Q, R เป็นจุดยอดคู่

กราฟ G_1 ไม่มีจุดยอดคี่

กราฟ G_2

$\deg S = 1$, $\deg U = 1$, $\deg T = 0$

จุดยอด T เป็นจุดยอดคี่ จุดยอด S, U เป็นจุดยอดคู่

กราฟ G_2 มีจุดยอดคี่ 2 จุด

กราฟ G_3

$\deg P = 2$, $\deg Q = 2$, $\deg R = 2$, $\deg T = 0$

จุดยอด P, Q, R, T เป็นจุดยอดคู่

กราฟ G_3 ไม่มีจุดยอดคี่

กราฟ G_4

$\deg 1 = 0$, $\deg 2 = 0$, $\deg 3 = 0$, $\deg 4 = 0$

จุดยอด 1, 2, 3, 4 เป็นจุดยอดคู่

กราฟ G_4 ไม่มีจุดยอดคี่

กราฟ G_5 $\deg 1 = 0$, $\deg 2 = 2$, $\deg 3 = 4$,
 $\deg 4 = 0$, $\deg 5 = 0$
จุดยอด 1, 2, 3, 4, 5 เป็นจุดยอดคู่
กราฟ G_5 ไม่มีจุดยอดคี่

กราฟ G_6 $\deg P = 5$, $\deg Q = 4$, $\deg R = 6$,
 $\deg S = 5$, $\deg U = 4$
จุดยอด Q, R, U เป็นจุดยอดคู่
จุดยอด P, S เป็นจุดยอดคี่
กราฟ G_6 มีจุดยอดคี่ 2 จุด



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3

เรื่อง การนำความรู้เกี่ยวกับจุดยอดไปใช้ในการแก้ปัญหา

ชื่อ - สกุล ชั้น เลขที่

1. ถ้ากราฟมีดีกรีของจุดยอด $A = 3$, จุดยอด $B = 2$, จุดยอด $C = 4$, จุดยอด $D = 3$ แล้วเส้นเชื่อมของกราฟจะมีกี่เส้น

จำนวนเส้นเชื่อมในกราฟเท่ากับ 6 เส้น

2. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 14 เส้น จะมีผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดในกราฟเท่ากับเท่าใด

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทั้งหมด เท่ากับ 28

3. กำหนดให้กราฟมีดีกรีของจุดยอดต่างๆ ดังนี้ 1, 1, 4, 4, และ 6 จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดทุกจุดเท่ากับ $1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 16$

ดังนั้น จำนวนเส้นของกราฟเท่ากับ 8 เส้น

4. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 26 เส้น และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 4 จะมีจุดยอดกี่จุด

กราฟมีจุดยอดทั้งหมด 13 จุด

ให้จุดยอดมีทั้งหมด x จุด ซึ่งแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 4 แสดงว่า

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $4x$

และ ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

ดังนั้น $4x = 2(26)$

$$x = 13$$

5. ถ้ากราฟมีเส้นเชื่อม 30 เส้น และจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 5 จะมีจุดยอดกี่จุด

กราฟมีจุดยอดทั้งหมด 12 จุด

ให้จุดยอดมีทั้งหมด x จุด ซึ่งแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 5 แสดงว่า

ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $5x$

และ ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

ดังนั้น $5x = 2(30)$

$$x = 12$$

6. จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ตำบลหนึ่งมี 5 หมู่บ้าน โดยมี 3 หมู่บ้านซึ่งแต่ละหมู่บ้านมีถนนเชื่อมหมู่บ้านอื่นเพียง 3 สาย, มี 1 หมู่บ้านที่มีถนนเชื่อมกับหมู่บ้านอื่นเพียง 2 สาย และมี 1 หมู่บ้านมีถนนเชื่อมกับหมู่บ้านที่เหลือทุกหมู่บ้าน

เป็นไปได้ เพราะถ้าให้หมู่บ้านเป็นจุดยอด ซึ่งมีหมู่บ้าน 3 หมู่บ้านมีถนนเชื่อมหมู่บ้านอื่น 3 สาย แสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 3 มีหมู่บ้าน 1 หมู่บ้านมีถนนเชื่อมหมู่บ้านอื่น 2 สาย แสดงว่าจุดยอดมีดีกรีเป็น 2 มีหมู่บ้าน 1 หมู่บ้านมีถนนเชื่อมหมู่บ้านอื่นทุกหมู่บ้าน แสดงว่าจุดยอดมีดีกรีเป็น 4 ดังนั้นผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $(3 \times 3) + (1 \times 2) + (1 \times 4) = 15$ ซึ่งเป็นไปได้ เพราะผลรวมของดีกรีจะต้องเป็นจำนวนคู่

7. เป็นไปได้หรือไม่ที่แต่ละคนในกลุ่มคนจำนวน 9 คน จะมีเพื่อนสนิทในกลุ่ม 5 คน

เป็นไปได้ เพราะถ้าให้คนเป็นจุดยอด ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อนสนิทในกลุ่ม 5 คน แสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 5 ดังนั้นผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $9 \times 5 = 45$ ซึ่งเป็นไปได้ เพราะผลรวมของดีกรีจะต้องเป็นจำนวนคู่

8. ประเทศหนึ่งมีเมืองทั้งหมด 17 เมือง ถ้าต้องการสร้างถนนเชื่อมเมืองเหล่านี้โดยให้แต่ละเมืองมีถนนเชื่อมกับเมืองอื่นอีก 5 สายพอดี จะสามารถทำได้หรือไม่

ทำไม่ได้ เพราะถ้าให้เมืองแต่ละเมืองเป็นจุดยอด ซึ่งมีทั้งหมด 17 จุด ซึ่งแต่ละเมืองมีถนนเชื่อมไปยังเมืองอื่น 5 สาย แสดงว่าจุดยอดแต่ละจุดมีดีกรีเป็น 5 ดังนั้นผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $17 \times 5 = 85$ ซึ่งเป็นไปได้ เพราะผลรวมของดีกรีจะต้องเป็นจำนวนคู่

9. เมืองหนึ่งมีชุมสายโทรศัพท์ทั้งหมด 25 ชุมสาย ถ้าต้องการเชื่อมสายโทรศัพท์ระหว่างชุมสายโดยแต่ละชุมสายเชื่อมโยงกับชุมสายอื่นๆ อีก 9 ชุมสาย จะสามารถทำได้หรือไม่

ทำไม่ได้ เพราะถ้าให้ชุมสายโทรศัพท์เป็นจุดยอดและสายโทรศัพท์แทนด้วยเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด ดังนั้น จะมีจุดยอดทั้งหมด 25 จุด ในแต่ละจุดมีเส้นเชื่อมทั้งหมด 9 เส้น แสดงว่า ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับ $25 \times 9 = 225$ ถ้ากรณีนี้มีจำนวนสายโทรศัพท์ทั้งหมด(เส้นเชื่อมทั้งหมด) เท่ากับ x

และ ผลรวมของดีกรีของจุดยอดเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม

$$\begin{array}{rcl} \text{ดังนั้น} & 225 & = & 2x \\ & x & = & \frac{225}{2} \end{array} \text{ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม}$$

เพราะฉะนั้นจึงไม่สามารถทำตามเงื่อนไขของโจทย์ได้เนื่องจากผลรวมของดีกรีของจุดยอดต้องออกมาเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนเส้นเชื่อมต้องออกมาเป็นจำนวนเต็ม

10. ชั้นเรียนหนึ่งมีนักเรียน 50 คน เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีนักเรียนจำนวน 20 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 3 คนในชั้น มี 13 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 4 คนในชั้น และมี 17 คน ซึ่งแต่ละคนมีเพื่อน 5 คนในชั้น
 ทำไม่ได้ เพราะถ้าให้คนแต่ละคนเป็นจุดยอด และแต่ละคนมีเพื่อนแทนด้วยตีกีร์ ซึ่งจะมีจุดยอดทั้งหมด 20 จุด แต่ละจุดมีตีกีร์เป็น 3, 13 จุดแต่ละจุดมีตีกีร์เป็น 4 และ 17 จุดแต่ละจุดมีตีกีร์เป็น 5

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น ผลรวมของตีกีร์} &= (20 \times 3) + (13 \times 4) + (17 \times 5) \\ &= 60 + 52 + 85 \\ &= 197\end{aligned}$$

ซึ่งผลรวมของตีกีร์เป็นจำนวนคี่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะผลรวมของตีกีร์ต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
ชุดที่ 2 เรื่อง ตีกริของจุดยอด

- | | | | | | |
|-----|---|----|---|----|---|
| 1. | ง | 2. | ง | 3. | ข |
| 4. | ค | 5. | ง | 6. | ค |
| 7. | ค | 8. | ง | 9. | ค |
| 10. | ค | | | | |



www.kroobannok.com