

แบบฝึกทักษะรายวิชา ค31202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ระบบสมการเชิงเส้น



ผู้จัดทำ

นายดุลย์ สีมา

ครูชำนาญการ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนเมืองพญาแลวิทยา อ.เมือง จ.ชัยภูมิ

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 30

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

การศึกษาคณิตศาสตร์สำหรับหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เป็นการศึกษาเพื่อ
ปวงชนที่เปิดโอกาสให้เยาวชนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่องและตลอดชีวิตตามศักยภาพทั้งนี้
เพื่อให้เยาวชนเป็นผู้มีความรู้ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่พอเพียง สามารถนำความรู้ทักษะและ
กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไปพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดียิ่งขึ้น รวมทั้งสามารถนำไปเป็นเครื่องมือ
ในการเรียนรู้ต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อ ดังนั้นจึงเป็นความรับผิดชอบของสถานศึกษาที่ต้อง
จัดสาระการเรียนรู้ที่เหมาะสมกับผู้เรียนแต่ละคน ทั้งนี้เพื่อให้บรรลุตามมาตรฐานการเรียนรู้ที่กำหนดไว้
ซึ่งการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ย่อมจะมีปัญหา และไม่ผ่านจุดประสงค์การเรียนรู้ เนื่องจากความ
แตกต่างระหว่างบุคคล และสภาพท้องถิ่น ครูผู้สอนจึงจำเป็นต้องหาทางแก้ไข เพื่อให้ให้นักเรียน ได้มีโอกาส
เรียนรู้ตามความสามารถของตนเอง

แบบฝึกเสริมทักษะนี้ จัดทำขึ้นเพื่อเสริมความรู้ความเข้าใจ และฝึกทักษะให้แก่นักเรียน นักเรียน
จะได้ฝึกฝนเพิ่มเติมเพื่อให้เกิดทักษะ และเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์

ในการจัดทำแบบฝึกเสริมทักษะได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีนี้ ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจาก
ผู้อำนวยการ โรงเรียนเมืองพญาแลวิทยา คณะครู โรงเรียนเมืองพญาแลวิทยาทุกท่าน และขอขอบพระคุณ
ทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกเสริมทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ ไปทำการทดลองใช้พร้อมทั้งให้
ข้อเสนอแนะและคำแนะนำงานทำให้แบบฝึกเสริมทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องเมทริกซ์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ชุดนี้สำเร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าจะเป็นประโยชน์ ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ซึ่งช่วยยกระดับ
คุณภาพการศึกษาในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ดุลย์ สีมา

สารบัญ

แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ แบบฝึกเสริมทักษะ เล่มที่ 1

สาระและมาตรฐานการ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

จุดประสงค์การเรียนรู้

สาระสำคัญ

หน้า

ก

ข

ข

ข

ค

www.kroobannok.com

คำชี้แจง

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หน่วยที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น เล่มนี้ ได้จัดทำขึ้นเพื่อพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยดำเนินการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวังและจุดประสงค์การเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วยแบบฝึกหัดทั้งหมดจำนวน 2 หน่วย ดังนี้

แบบฝึกทักษะที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

แบบฝึกทักษะที่ 2 ระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร

ขั้นตอนการใช้แบบฝึก

1. ให้นักเรียนอ่านคำชี้แจงการใช้แบบฝึกเสริมทักษะ
2. ให้นักเรียนศึกษาวางแผนจัดกิจกรรมการเรียนรู้ มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง จุดประสงค์การเรียนรู้และสาระสำคัญ
3. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 15 ข้อ
4. ให้นักเรียนศึกษาสาระการเรียนรู้ ตัวอย่างและทำแบบฝึกเรียนตามสาระการเรียนรู้จนจบทั้งเล่ม
5. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 15 ข้อ
6. ผู้สอนดำเนินการเปรียบเทียบประสิทธิภาพและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเพื่อประกอบการรายงานผล การเรียนรู้และรายงานผลให้นักเรียนทราบถึงพัฒนาการของตนเอง และใช้เป็นข้อมูลในการพัฒนาตนเองต่อไป

ขั้นตอนการเรียนรู้ แบบฝึกเสริมทักษะ เรื่อง เมทริกซ์
หน่วยที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

อ่านคำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะ
และขั้นตอนการใช้แบบฝึก

- ศึกษาแบบฝึกเสริมทักษะ โดยปฏิบัติ ดังนี้
- 1.ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้
 - 2.ศึกษามาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้น
 - 3.ศึกษาผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
 4. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้
 5. ศึกษาสาระสำคัญ

ทำแบบทดสอบก่อนเรียน

ศึกษาสาระการเรียนรู้ในแต่ละหน่วย

ทำแบบฝึกทักษะ

ทำแบบทดสอบหลังเรียน

ศึกษาแบบฝึกทักษะเล่มที่ 2 ต่อไป

ปรึกษาคู่มือสอน

ไม่ผ่านเกณฑ์

ประเมินผล

ผ่านเกณฑ์

สาระและมาตรฐานการ

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1: อธิบายและวิเคราะห์แบบรูปแบบ (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่างๆ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเมทริกซ์และการดำเนินการของเมทริกซ์
2. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เกินสี่ได้
3. วิเคราะห์และหาคำตอบระบบสมการเชิงเส้นได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้
2. หาคำตอบของสมการเชิงเส้นสามตัวแปรได้

ระบบสมการเหมือนที่เรียนตอน ม.3 เลขนะ
ว่าอ ๗ ๑๖

ดีกว่าว่าอ ลองทำแบบทดสอบก่อนเรียน
ดูซิ



แบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบก่อนเรียน แบบฝึกทักษะ เรื่อง เมทริกซ์ เล่ม 1 ใช้ทดสอบความรู้ของนักเรียนก่อนเรียนหน่วยที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น มีจำนวนทั้งหมด 15 ข้อ
2. การตอบแบบทดสอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ได้ตัวเลข 1, 2, 3, 4 หรือ 5 ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ถ้า $(3, a)$ เป็นคำตอบของสมการ $2x - y =$

2 จงหาค่า a

- 1) 0
- 2) 3
- 3) -3
- 4) 4
- 5) -4

2. ถ้า x และ y แทนจำนวนเต็มบวก แล้ว

$x + y = 10$ จะมีคำตอบทั้งสิ้นกี่คำตอบ

- 1) 9
- 2) 10
- 3) 11
- 4) มีมากมายนับไม่ถ้วน
- 5) ไม่มีคำตอบ

3. ระบบสมการใดไม่มีคำตอบ

- 1) $x + y = 5$; $2x - y = 5$
- 2) $2x + y = 5$; $x - y = 5$
- 3) $4x - 2y = 10$; $x + y = 3$
- 4) $-x + y = 15$; $2x - y = 5$
- 5) $x - y = 5$; $2x + y = 5$

4. ระบบสมการในข้อใดมีคำตอบมากมาย

ไม่จำกัดในรูป $\left(x, \frac{x-1}{2}\right)$

- 1) $x - 2y = 1$; $x - 2y = 1$
- 2) $3x + 4y = -3$; $x + 2y = 1$
- 3) $2x - 4y = 2$; $x + 2y = 1$
- 4) $x - 2y = 1$; $x - 2y = 1$
- 5) $2x - 2y = 2$; $2x - 4y = 4$

5. คำตอบของระบบสมการ $x + y = 2$ และ

$$2x - 3y = 1 \text{ คือข้อใด}$$

- 1) (0,0)
- 2) (-1, 0)
- 3) (1,1)
- 4) $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- 5) $\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right)$

6. คำตอบของระบบสมการ $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$ หรือ

$$8x + 9y = 7 \text{ คือข้อใด}$$

- 1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
- 2) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$
- 3) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
- 4) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- 5) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

7. คำตอบของระบบสมการ $3x - y = 2.4$ และ

$$0.6x + 0.4y = 0 \text{ คือข้อใด}$$

- 1) (-0.3, 0.6)
- 2) (0.4, -0.6)
- 3) (-0.5, 0.6)
- 4) (0.6, 0.3)
- 5) (0.5, -0.6)

8. คำตอบของระบบสมการ $4(x-2y) - (5x+3y) =$

$$30 \text{ และ } 3(3x+7y)+[-2(x+9y)] = 12 \text{ คือข้อใด}$$

- 1) (3,3)
- 2) (3, -3)
- 3) (2, 3)
- 4) (-3, 2)
- 5) (2, -3)

9. ข้อใดเป็นคำตอบของระบบสมการ

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \text{ และ } 2(x-3) = y + 4$$

- 1) (8,8)
- 2) (8, -10)
- 3) (-8,-10)
- 4) (10, 10)
- 5) (10, -10)

10. กราฟของสมการในข้อใดขนานกับแกน x

และตัดแกน y ที่จุด (0,3)

- 1) $x - 3 = 0$
- 2) $x + 3 = 0$
- 3) $x = -3$
- 4) $y - 3 = 0$
- 5) $y + 3 = 0$

11. คำตอบระบบสมการ $x + y + z = 10$

, $3x + z = 13$ และ $2x + y - z = 9$

มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $(\frac{25}{7}, \frac{29}{7}, \frac{16}{7})$
- 2) $(-\frac{25}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{29}{7})$
- 3) $(\frac{15}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{29}{7})$
- 4) $(-\frac{5}{8}, \frac{15}{8}, -\frac{25}{8})$
- 5) $(\frac{15}{8}, -\frac{25}{8}, -\frac{5}{8})$

12. ค่า y จากระบบสมการ $x + y = 3$

$y + z = 1$, $x + z = 4$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 4
- 2) 3
- 3) 2
- 4) 1
- 5) 0

13. ค่า z จากระบบสมการ $4x + 3y + 2z = 5$

, $-x + 2y + z = 1$, $3x - y - z = 6$

มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{5}{4}$
- 2) $-\frac{1}{4}$
- 3) $-\frac{27}{4}$
- 4) $\frac{1}{8}$
- 5) $\frac{13}{8}$

14. ผลบวกของคำตอบระบบสมการ

$x - 3y - 3z = -2$, $2x + y - z = 5$

และ $3x - 2y + 2z = -3$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 0
- 2) 2
- 3) 4
- 4) 5
- 5) 9

15. ผลบวกของคำตอบระบบสมการ

$2x - 4y - z = 4$, $3x - 3y + 2z = 2$ และ

$x + 2y + 3z = -1$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) -4
- 2) -2
- 3) 0
- 4) 2
- 5) 4

นึกว่าว่ายอย่างที่ดีดี ตัวแปร 3 ตัวไม่เคยเห็นเลย
มันทำฮั้วไว้นะ นึกไม่ออกเลย

ไม่เป็นไรจ้ะ ผอ. ๗ ศึกษา แล้วจะทำได้เอง
ตอนนี้นำไปขึ้นความจำกับการแก้ระบบ
สมการ 2 ตัวแปร ในหน่วยที่ 1 ก่อน
ดีกว่า



หน่วยที่ 1

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

สมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร คือ สมการที่อยู่ในรูปทั่วไป ดังนี้

$$Ax + By + C = 0$$

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัวที่ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

x และ y เป็นตัวแปร มีดีกรีสูงสุด = 1 และไม่มีการคูณกันของตัวแปร

คำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ที่มี x และ y เป็นตัวแปร คือจำนวนที่แทน x และ y ในสมการแล้วได้สมการที่เป็นจริง ซึ่งนิยามเขียนในรูปของคู่อันดับเสมอ เช่น

สมการ $x + 2y = 0$ คำตอบ คือ $\dots, (0,0), (1, \frac{1}{2}), (2,-1), \dots$

หรืออาจจะกล่าวได้ว่าคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจะมีมากมายนับไม่ถ้วน ดังนั้นคำตอบของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจึงนิยมแสดงด้วยกราฟ

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เรียก

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

ว่าสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ ค่าของ x และ y มีทำให้สมการทั้งคู่เป็นจริง

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นมีวิธีการ 3 วิธี

1. โดยการใช้กราฟ
2. โดยการกำจัดตัวแปรตัวใดตัวแปรหนึ่ง
3. โดยการแทนค่าตัวแปรหนึ่งในรูปของอีกตัวแปรหนึ่ง

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกำจัดตัวแปรตัวใดตัวหนึ่ง

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นวิธีนี้จะใช้การบวกหรือการลบ ดังนี้

1. ใช้สมบัติการบวก ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่

$$a = b \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$c = d \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad a - c = b - d$$

และการจะเลือกใช้สมบัติการบวกหรือการลบ ให้พิจารณาจากวิธีการแก้ระบบสมการต่อไปนี้

1. ถ้าต้องการกำจัดตัวแปรใด ให้ใช้สมบัติการคูณ ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องการกำจัดนั้นให้เท่ากัน หรือให้เป็นจำนวนตรงข้ามกัน
2. ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องการกำจัดเท่ากัน ให้ใช้สมบัติการลบ จะทำให้ตัวแปรนั้นหายไป
3. ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ต้องการกำจัดเป็นจำนวนตรงข้ามกัน ให้ใช้สมบัติการบวกจะทำให้ตัวแปรนั้นหายไป
4. ใช้สมบัติการเท่ากัน หาค่าตัวแปรที่เหลือ
5. นำค่าตัวแปรที่ได้จากข้อ 4 แทนค่าในสมการแรกที่โจทย์กำหนดสมการใดสมการหนึ่งจะได้ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการ $x + y = 8, -x + 2y = 1$

วิธีทำ $x + y = 8$ ----- (1)

$-x + 2y = 1$ ----- (2)

$$(1) + (2) \quad 3y = 9$$

$$y = 3$$

แทนค่า $y = 3$ ใน (1) จะได้

$$x + 3 = 8$$

$$x = 8 - 3 = 5$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(5, 3)$

ตัวอย่างที่ 2 แก้ระบบสมการ $3x + 4y = 18$, $x - 2y = -4$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y = 18 & & \text{----- (1)} \\ x - 2y = -4 & & \text{----- (2)} \\ (2) \times 3 & 3x - 6y = -12 & \text{----- (3)} \\ (1) - (3) & & \\ & 10y = 30 & \\ & y = 3 & \\ \text{แทนค่า } y = 3 & \text{ใน (2) จะได้} & \\ & x - 2(3) = -4 & \\ & x = -4 + 6 = 2 & \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ (2, 3)

ตัวอย่างที่ 3 แก้ระบบสมการ $2x - 3y = 5$, $-6x + 9y = -12$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3y = 5 & & \text{----- (1)} \\ -6x + 9y = -12 & & \text{----- (2)} \\ (1) \times 3 & 6x - 9y = 15 & \text{----- (3)} \\ (2) + (3) & 0 = 3 & \text{ซึ่งไม่จริง} \end{array}$$

ดังนั้นระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ตัวอย่างที่ 4 แก้ระบบสมการ $y = 4x - 3$, $3y - 12x = -9$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcl} y = 4x - 3 & & \text{----- (1)} \\ 3y - 12x = -9 & & \text{----- (2)} \\ \text{จาก (1)} & y - 4x = -3 & \text{----- (3)} \\ (3) \times 3 & 3y - 12x = -9 & \text{----- (4)} \end{array}$$

จะเห็นว่าสมการที่ (2) กับ (4) เป็นสมการเดียวกัน แสดงว่า (2) และ (4) เป็นสมการที่สมมูลกัน

ดังนั้นคำตอบของสมการจะมีมากมายไม่มีจำกัดรูป $(x, 4x - 3)$

การแก้ระบบสมการแทนค่า

การแก้ระบบสมการโดยการแทนค่า ใช้วิธีการแทนค่าตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งจากสมการหนึ่งในอีกสามสมการ โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 แก้ระบบสมการ $x + y = 8$, $x - y = 2$

วิธีทำ $x + y = 8$ ----- (1)

$x - y = 2$ ----- (2)

จาก (2) $x = y + 2$ ----- (3)

แทนค่า x จาก (3) ใน (1)

$$(y + 2) + y = 8$$

$$2y = 6$$

$$y = 3$$

แทนค่า $y = 3$ ใน (3)

$$x = 3 + 2 = 5$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ (5, 3)

ตัวอย่างที่ 6 $x - 3y = 5$

$$-2x + 6y = -10$$

วิธีทำ ให้ $x - 3y = 5$ ----- (1)

$-2x + 6y = -10$ ----- (2)

จาก (1) จะได้ $x = \dots\dots\dots$ ----- (3)

แทนค่า x ใน (2) จะได้

$$\dots\dots\dots = -10$$

$$\dots\dots\dots = -10$$

เนื่องจากสมการ (1) และ (2) คือสมการเดียวกัน แสดงว่า สมมูลกัน จึงหาคำตอบของระบบสมการนี้จากสมการใด สมการหนึ่งได้ดังนี้

จาก $x - 3y = 5$

$$x - 5 = 3y$$

$$\frac{x - 5}{3} = y$$

คำตอบของระบบสมการนี้มีมากมายในรูป $(x, \frac{x - 5}{3})$

ตอบ

ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

1. $5x + y = -2$

$2x + 3y = 7$

วิธีทำ ให้ $5x + y = -2$ ----- (1)

$2x + 3y = 7$ ----- (2)

จาก (1) จะได้ $y = \dots\dots\dots$ ----- (3)

แทนค่า y ใน (2) จะได้

$\dots\dots\dots = 7$

$\dots\dots\dots = 7$

$\dots\dots\dots = 13$

$x = \dots\dots\dots$

แทนค่า x ใน (3) จะได้

$y = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

คำตอบของระบบสมการ คือ $\dots\dots\dots$

ตอบ

2. $4x + y = 5$, $2x - 3y = 13$

วิธีทำ $4x + y = 5$ ----- (1)

$2x - 3y = 13$ ----- (2)

จาก (1) $y = -4x + 5$

แทนค่า y ลงใน (2)

$2x - 3(\dots\dots\dots) = 13$

$\dots\dots\dots = 13$

$14x = \dots\dots\dots$

$x = \dots\dots\dots$

แทนค่า $x = \dots\dots\dots$ ใน y

$y = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ดังนั้นคำตอบคือ $\dots\dots\dots$

ตอบ

3. จงแก้ระบบสมการ

$$3x + 5y = 33 \quad \text{----- (1)}$$

$$4x - 3y = 15 \quad \text{----- (2)}$$

วิธีทำ ในที่นี้ต้องการกำจัดตัวแปร y ดังต่อไปนี้

$$(1) \times 3 \quad \text{.....} \quad \text{----- (3)}$$

$$(2) \times 5 \quad \text{.....} \quad \text{----- (4)}$$

$$(3) + (4) \quad 29x = \text{.....}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = \text{.....} \quad \text{----- (5)}$$

นำ x ที่ได้ใน (5) ไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$3(\text{.....}) + 5y = \text{.....}$$

$$\text{.....} + 5y = \text{.....}$$

$$5y = \text{.....}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y = \text{.....}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ

4. จงแก้ระบบสมการ

$$2x + 3y = 1.6 \quad \text{----- (1)}$$

$$-3x + 4y = 4.1 \quad \text{----- (2)}$$

วิธีทำ ในที่นี้จะกำจัดตัวแปร x ดังนี้

$$(1) \times 3 \quad \text{.....} \quad \text{----- (3)}$$

$$(2) \times 2 \quad \text{.....} \quad \text{----- (4)}$$

$$(3) + (4) \quad \text{.....}$$

$$\text{.....}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y = \text{.....} \quad \text{----- (5)}$$

นำค่า y ใน (5) ไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$2x + 3(\text{.....}) = \text{.....}$$

$$\text{.....}$$

$$\text{.....}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = \text{.....}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ

5. จงแก้ระบบสมการ

$$0.2x - 0.3y = 0.5 \quad \text{----- (1)}$$

$$0.5x - 0.5y = 0.7 \quad \text{----- (2)}$$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก เราจะใช้หลักการคูณทำให้ค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม ดังนี้

$$(1) \times 10 \quad \text{.....} \quad \text{----- (3)}$$

$$(2) \times 10 \quad \text{.....} \quad \text{----- (4)}$$

ต่อไปจะกำจัดตัวแปร x ดังนี้

$$(3) \times 5 \quad \text{.....} \quad \text{----- (5)}$$

$$(4) \times 2 \quad \text{.....} \quad \text{----- (6)}$$

$$(5) - (6) \quad \text{.....}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad x = 1$$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ (3) จะได้

$$\text{.....}$$

$$\text{.....}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ

แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.1

ระบบสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร

1. จงแก้ระบบสมการ $3x - 4y = 18$ และ $4x + 5y = -7$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เด็ก ๆ ทบทวนระบบ
สมการ ๒ ตัวแปรเป็นอย่างไร
ไว้อ่าว

จอร์จ ครับ การหาคำตอบของระบบสมการ ๒ ตัวแปร สามารถ
หาได้ ๓ วิธี คือ การวาดกราฟ วิธีผสมเงื่อนไขตอน ม.๓ แล้ว
การแทนค่า และการกำจัดตัวแปร ครับ

เราจะศึกษาในหน่วยที่ ๒
กับการแก้ระบบสมการ ๓ ตัวแปรกัน
เลย

ใช่เริ่มกันเลย



หน่วยที่ 2

ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

บทนิยาม

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ไม่เป็น 0 พร้อมกัน
เรียก $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = c$ ว่า สมการเชิงเส้น n ตัวแปร
โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร และ $n \geq 2$

ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

$$x + 2y + z = 5$$

$$2x - y + z = 4$$

$$3x + y + 4z = 1$$

บทนิยาม

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการเชิงเส้น
ที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการโดยที่ $m \geq 2$
คำตอบของระบบสมการนี้คือ ค่าของ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ที่ทำให้ สมการทั้ง m สมการเป็นจริง

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการโดยที่ $m \geq 2$ มีรูปแบบดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

สมการ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = c_i$

ทุก $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, c_1$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

สมการเชิงเส้นสองตัวแปรนิยามให้ x, y แทนตัวแปร คำตอบของระบบสมการคือ (x, y)

สมการเชิงเส้นสองตัวแปรนิยามให้ x, y, z แทนตัวแปร คำตอบของระบบสมการคือ (x, y, z)

สมการเชิงเส้นสองตัวแปรนิยามให้ x, y, z, t แทนตัวแปร คำตอบของระบบสมการคือ (x, y, z, t)

สมการเชิงเส้นสองตัวแปรนิยามให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ แทนตัวแปร คำตอบของระบบสมการ คือ $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ระบบสมการ

$$x + 2y + z = 5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y + z = 4 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$3x + y + 4z = 1 \quad \dots\dots\dots(3)$$

วิธีทำ 1. เลือกกำจัด ตัวแปรใด ตัวแปรหนึ่ง โดยทำสัมประสิทธิ์ให้เท่ากัน

เลือกกำจัดตัวแปร y ทำ y ให้เป็น 0 โดยนำ 2 คูณ สมการที่ (2) แล้วบวกสมการที่ 1

$$(2) \times 2 \quad 4x - 2y + 2z = 8 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(4) + (1) \quad 5x + 3z = 13 \quad \dots\dots\dots(5)$$

2. ทำสัมประสิทธิ์ของ y ให้เป็น 0 โดยนำสมการที่ (2) บวกสมการที่ (3)

$$(2) + (3) \quad 5x + 5z = 5 \quad \dots\dots\dots(6)$$

3. สมการที่ (5) และ (6) เหลือตัวแปร เพียง 2 ตัว เลือกกำจัด ตัวแปร x เพราะ มีสัมประสิทธิ์เท่ากัน นำ สมการที่ (6) ลบสมการที่ (5)

$$(6) - (5) \quad 2z = -8$$

$$z = -4$$

แทนค่า z ใน (5) ; $5x + 3(-4) = 13$

$$5x = 25$$

$$x = 5$$

4. นำค่า x และ z แทนในสมการที่ (1) หรือ (2) หรือ (3) เพื่อหาค่าของ y ในที่นี้แทนในสมการที่ (3) จะได้ $3(5) + y + 4(-4) = 1$

$$y = 2$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(5, 2, -4)$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ระบบสมการ

$$x + y + z = 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x - 3y - z = 1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$2x + 3y + z = 5 \quad \dots\dots\dots(3)$$

วิธีทำ เลือกกำจัดตัวแปร โดย

$$(1) + (2) \quad 2x - 2y = \dots\dots\dots$$

$$x - y = \dots\dots\dots(4)$$

$$(2) + (3)$$

$$3x = \dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots$$

แทนค่า x ใน (4);

$$2 - y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

แทนค่า x และ y ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$z = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

$$\dots\dots\dots$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้ระบบสมการ

$$2x + y - z = -3 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$3x - z = -5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$8x - y - 4z = -17 \quad \dots\dots\dots(3)$$

วิธีทำ เลือกกำจัดตัวแปร โดย

จาก (....) ปรับสมการใหม่ได้ $z = \dots\dots\dots$

ค่า $z = \dots\dots\dots$ ใน (.....) จะได้

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$y - x = \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots(4)$$

แทนค่า $z = \dots\dots\dots$ ใน (.....) จะได้

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots(5)$$

(4) + (5) จะได้ $\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$$x = \dots\dots\dots$$

แทนค่า $x = \dots\dots\dots$ ลงใน (.....) จะได้

$$3(\dots\dots\dots) - z = \dots\dots\dots$$

$$z = \dots\dots\dots$$

แทนค่า $x = \dots\dots\dots$ และ $z = \dots\dots\dots$ ใน (1) จะได้

$$2(\dots\dots\dots) + y - 2 = -3$$

$$y = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

$$\dots\dots\dots$$

ตอบ



ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

1. $x + y + z = 1$ (1)

$x - 3y - z = 1$ (2)

$2x + 3y + z = 5$ (3)

วิธีทำ (1)+(2) $2x - 2y =$

$x - y =$

(2)+(3) $3x =$

$x =$

แทนค่า x ใน (4) จะได้ $2 - y =$

$y =$

จาก (1) จะได้ $z =$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

ตอบ

2. $x + 3y + z = 1$ (1)

$2x - y - z = 6$ (2)

$5x + y + z = 1$ (3)

วิธีทำ (1)+(2) $3x + 2y = 7$ (4)

(2)+(3)

.....

แทนค่า x ใน (4) $3(1) + 2y = 7$

.....

.....

แทนค่า x และ y ใน (1) จะได้

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

ตอบ

3. $x + y + z = 1$ (1)

$x + 2y - z = -3$ (2)

$2x + 5y + z = 5$ (3)

วิธีทำ

(1) + (2)(4)

(2) + (3)(5)

(4) × 7(6)

(5) × 3(7)

(6) - (7)

$x =$

แทนค่า x ใน (4)

.....

$y =$

แทนค่า x และ y ใน (1) จะได้ $z =$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

ตอบ

4. $x - y - z = 0$ (1)

$x - 2y + 3z = 2$ (2)

$-2x + 3y + 2z = 2$ (3)

วิธีทำ

(1) × 3 จะได้(4)

(2) + (4)(5)

(1) × 2(6)

(3) + (6)

แทนค่า y ใน (5)

.....

แทนค่า x และ y ใน (1) จะได้

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ

ตอบ

ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

คำชี้แจง จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

1. $x + y + z = 6$ (1)
 $x - y + z = 2$ (2)
 $x + y - z = 0$ (3)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. $x + 2y - z = 3$ (1)
 $3x + y = 6$ (2)
 $2x + y = 1$ (3)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. $x + y = 2$ (1)

$x + 3y + z = 5$ (2)

$3x + y - z = 3$ (3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

www.kroobannok.com

ก็ไม่เห็นยากเลย เนืองแต่ทำซ้ำทีละตัว โดยเริ่มจาก ๒ สมการก่อน ทำซ้ำ
ตัวที่ 1 และเหลือ อีก ๒ ตัว ก็ทำเหมือนกับหน่วยที่ หนึ่ง แต่ใครยังงงอยู่
ก็ไปทบทวน อีกครั้งก่อนนะจ๊ะ

แต่ถ้าใครท้อมแล้วก็ เตรียมสอบหลังเรียน เมื่อทดสอบ
ว่ารู้จริงปะ
ก่อนตรวจแจกกระดาษคำตอบและนำตามนะจ๊ะ
แล้วพบกันใหม่เล่มที่ ๒ จะได้รู้จักที่ เมทริกซ์เน้อ



แบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

คำชี้แจง

- แบบทดสอบหลังเรียน แบบฝึกทักษะ เรื่อง เมทริกซ์ เล่ม 1 ระบบสมการ ใช้ทดสอบความรู้ของนักเรียนหลังเรียนเล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น มีจำนวนทั้งหมด 15 ข้อ
- การตอบแบบทดสอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในช่อง ได้ตัวเลข 1, 2, 3, 4 หรือ 5 ที่เป็นคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

1. คำตอบของระบบสมการ $4(x-2y) - (5x+3y) =$

30 และ $3(3x+7y)+[-2(x+9y)] = 12$ คือข้อใด

- 1) (-3, 2)
- 2) (3, -3)
- 3) (2, -3)
- 4) (2, 3)
- 5) (3, 3)

2. คำตอบของระบบสมการ $x + y = 2$ และ

$2x - 3y = 1$ คือข้อใด

- 1) (1, 1)
- 2) (0, 0)
- 3) $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$
- 4) $\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right)$
- 5) (-1, 0)

3. กราฟของสมการในข้อใดขนานกับแกน x

และตัดแกน y ที่จุด (0, 3)

- 1) $y + 3 = 0$
- 2) $y - 3 = 0$
- 3) $x + 3 = 0$
- 4) $x = -3$
- 5) $x - 3 = 0$

4. ผลบวกของคำตอบระบบสมการ

$2x - 4y - z = 4$, $3x - 3y + 2z = 2$ และ

$x + 2y + 3z = -1$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 4
- 2) 2
- 3) 0
- 4) -2
- 5) -4

5. คำตอบระบบสมการ $x + y + z = 10$

, $3x + z = 13$ และ $2x + y - z = 9$

มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $(-\frac{5}{8}, \frac{15}{8}, -\frac{25}{8})$
- 2) $(\frac{15}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{29}{7})$
- 3) $(\frac{15}{8}, -\frac{25}{8}, -\frac{5}{8})$
- 4) $(\frac{25}{7}, \frac{29}{7}, \frac{16}{7})$
- 5) $(-\frac{25}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{29}{7})$

6. ถ้า x และ y แทนจำนวนเต็มบวก แล้ว

$x + y = 10$ จะมีคำตอบทั้งสิ้นกี่คำตอบ

- 1) 11
- 2) 10
- 3) 9
- 4) มีมากมายนับไม่ถ้วน
- 5) ไม่มีคำตอบ

7. ระบบสมการในข้อใดมีคำตอบมากมาย ไม่

จำกัดในรูป $(x, \frac{x-1}{2})$

- 1) $2x - 2y = 2$; $2x - 4y =$
- 2) $x - 2y = 1$; $x - 2y = 1$
- 3) $3x + 4y = -3$; $x + 2y = 1$
- 4) $2x - 4y = 2$; $x + 2y = 1$
- 5) $4x - 2y = 1$; $x - 2y = 1$

8. ค่า y จากระบบสมการ $x + y = 3$

$y + z = 1$, $x + z = 4$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 0
- 2) 1
- 3) 2
- 4) 3
- 5) 4

9. คำตอบของระบบสมการ $3x - y = 2.4$ และ

$0.6x + 0.4y = 0$ คือข้อใด

- 1) (0.6, 0.3)
- 2) (-0.5, 0.6)
- 3) (-0.3, 0.6)
- 4) (0.5, -0.6)
- 5) (0.4, -0.6)

10. คำตอบของระบบสมการ $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$ หรือ

$8x + 9y = 7$ คือข้อใด

- 1) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$
- 2) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
- 3) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
- 4) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$
- 5) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

11. ถ้า z จากระบบสมการ $4x + 3y + 2z = 5$

$$, -x + 2y + z = 1, 3x - y - z = 6$$

มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $-\frac{5}{4}$
- 2) $-\frac{1}{4}$
- 3) $-\frac{27}{4}$
- 4) $\frac{1}{8}$
- 5) $\frac{13}{8}$

12. ระบบสมการใดไม่มีคำตอบ

- 1) $x + y = 5$; $2x - y = 5$
- 2) $2x + y = 5$; $x - y = 5$
- 3) $4x - 2y = 10$; $x + y = 3$
- 4) $-x + y = 15$; $2x - y = 5$
- 5) $x - y = 5$; $2x + y = 5$

13. ถ้า $(3, a)$ เป็นคำตอบของสมการ $2x - y =$

2 จงหาค่า a

- 1) -4
- 2) -3
- 3) 0
- 4) 3
- 5) 4

14. ข้อใดเป็นคำตอบของระบบสมการ

$$y = \frac{1}{2}x + 5 \text{ และ } 2(x-3) = y + 4$$

- 1) $(8, -10)$
- 2) $(10, -10)$
- 3) $(8, 8)$
- 4) $(10, 10)$
- 5) $(-8, -10)$

15. ผลบวกของคำตอบระบบสมการ

$$x - 3y - 3z = -2, 2x + y - z = 5$$

และ $3x - 2y + 2z = -3$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 9
- 2) 5
- 3) 4
- 4) 2
- 5) 0

ผมมักจะเลือก คนที่ “ขี้เกียจ” (แต่มีความรับผิดชอบ)
ให้เขาได้ทำงาน ที่ยากๆเสมอ
เพราะเขามักจะหาหนทางที่ “ง่าย” ที่สุดเพื่อทำให้งานสำเร็จ
(Bill Gates)

“I will always chose a lazy person
to do a difficult job, because,
he will find and easy way to do it.

บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล และระนชัย มาเจริญทรัพย์. **แบบฝึกหัดและประเมินผล คณิตศาสตร์**

ม.5 ค013. กรุงเทพมหานคร : รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์ . 2542

กวีญา นาวประทีป. **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ เมทริกซ์** . กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์
ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ . 2547 .

เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. **คู่มือและเทคนิคคิดลัดโจทย์ คณิตศาสตร์ ค013**

ม.5 เล่ม 3. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER .

ทรงวิทย์ สุวรรณชาติ. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 4 ภาคเรียนที่ 2** . กรุงเทพมหานคร :

หจก. วิเจ 프린ติ้ง .2548

ฝ่ายดอกหญ้าวิชาการ . **แบบฝึกหัดเข้มข้น คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 เล่ม 2** . กรุงเทพมหานคร :

สำนักพิมพ์ดอกหญ้าวิชาการ . 2553

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน . **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม**

คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 . กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค.

ลาดพร้าว. 2552

สมัย เหล่าวานิช , รองศาสตราจารย์ และ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2** .

กรุงเทพมหานคร : บริษัท ไทเนรมิตกิจ อินเตอร์ โปรเกรสซิฟ จำกัด.

อนุก หิรัญ . **ค013 คณิตศาสตร์** . กรุงเทพมหานคร : หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

2538.