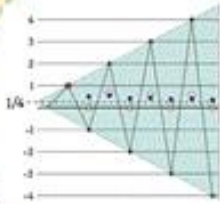
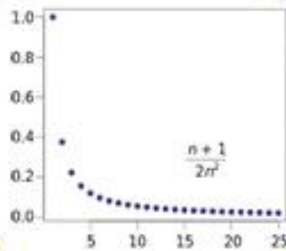


แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x}{4x^2 + 1}$$



ลิมิตของลำดับ

นางสาวอุบล ชูรัตน์

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนท่าบ่อ อำเภوتاบ่อ จังหวัดหนองคาย

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 21



คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่มนี้ จัดทำขึ้นตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือ เทคนิค TAI เป็นการเรียนที่ผสมผสานระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Cooperative Learning) และการสอนรายบุคคล (Individualization Instruction) เข้าด้วยกัน โดยให้ผู้เรียนได้ลงมือทำกิจกรรมในการเรียนได้ด้วยตนเอง ตามความสามารถของตน และส่งเสริมความร่วมมือภายในกลุ่ม มีการแลกเปลี่ยน

ประสบการณ์การเรียนรู้และปฏิสัมพันธ์ทางสังคม สมาชิกในกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน ให้นักเรียนศึกษาแบบฝึกทักษะทีละเล่ม ตามลำดับของสาระที่กำหนดไว้ ซึ่งมีทั้งหมด 8 เล่ม ประกอบด้วย

- เล่มที่ 1 ความหมายของลำดับ
- เล่มที่ 2 รูปแบบการกำหนดลำดับ
- เล่มที่ 3 ลำดับเลขคณิต
- เล่มที่ 4 ลำดับเรขาคณิต
- เล่มที่ 5 ลิมิตของลำดับ
- เล่มที่ 6 อนุกรมอนันต์
- เล่มที่ 7 ผลบวกของอนุกรมอนันต์
- เล่มที่ 8 สัญลักษณ์แทนการบวก

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะช่วยให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สูงขึ้น มีเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และจะเป็นเครื่องมือที่ใช้พัฒนาผู้เรียนให้มีผลการเรียนที่ก้าวหน้ายิ่ง ๆ ขึ้นไป ตลอดจนเป็นแนวทางในการจัดทำสื่อ/นวัตกรรม แก่ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์และผู้สนใจทั่วไปที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ตามสมควร

อุบล ชูรัตน์

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ.....	ก
สารบัญ.....	ข
คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์.....	ค
คำแนะนำสำหรับครู.....	ง
คำแนะนำสำหรับนักเรียน.....	จ
สาระ มาตรฐานและตัวชี้วัดช่วงชั้น.....	ฉ
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	1
แบบทดสอบก่อนเรียน.....	2
ใบความรู้ที่ 1.....	5
ใบความรู้ที่ 2.....	10
แบบสรุปเนื้อหา.....	18
แบบฝึกทักษะที่ 1.1.....	20
แบบฝึกทักษะที่ 1.2.....	23
แบบทดสอบหลังเรียนฉบับ A.....	25
แบบทดสอบหลังเรียนฉบับ B.....	28
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน.....	31
เฉลยแบบสรุปเนื้อหา.....	31
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1.....	33
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2.....	36
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ A.....	38
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ B.....	38
ตารางบันทึกคะแนน.....	39
บรรณานุกรม.....	40



แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่มที่ 5 ลิมิตของลำดับ ใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค TAI (Team Assisted Individualization) ในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค33202 ได้จัดสร้างขึ้นโดยกำหนดสาระการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งนักเรียนสามารถศึกษาเนื้อหาและประเมินผลการเรียนได้ด้วยตนเองตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ มีการเสริมแรงแก่นักเรียนเป็นระยะโดยใช้คะแนนของกลุ่มและความสำเร็จของกลุ่ม ซึ่งแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ มีทั้งหมด 8 เล่ม แต่ละเล่มจะเสนอเนื้อหาและตัวอย่างที่ละเอียดที่ละน้อย ทีละแบบฝึกทักษะ มีคำถามให้นักเรียนได้คิดและทำกิจกรรมหรือตอบคำถาม นักเรียนสามารถรับรู้ได้ด้วยตนเองตามความสามารถของแต่ละบุคคล โดยมีลำดับดังนี้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้
2. คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
3. แบบทดสอบก่อนเรียน
4. ใบความรู้/เนื้อหาสาระ
5. แบบสรุปเนื้อหา
6. แบบฝึกทักษะ
7. แบบทดสอบหลังเรียน

ผู้จัดกิจกรรมควรใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค TAI (Team Assisted Individualization) โดยให้นักเรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจเนื้อหา สรุปเนื้อหา และทำแบบทดสอบทั้งก่อนเรียนและหลังเรียนเพื่อประเมินและพัฒนาการจัดกิจกรรมให้บรรลุวัตถุประสงค์ของหลักสูตรต่อไป





เมื่อครูผู้สอนได้นำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ควรปฏิบัติดังนี้

1. ศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ให้เข้าใจก่อนนำไปจัดกิจกรรมการเรียนการสอน
2. ควรใช้คู่กับแผนการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค TAI
3. ชี้แจงขั้นตอนการทำกิจกรรมโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้ให้นักเรียนเข้าใจ
4. ทดสอบความรู้ก่อนเรียนของนักเรียนโดยใช้แบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อวัดความรู้พื้นฐานของนักเรียนแต่ละคน
5. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้และตัวอย่างแล้วสรุปเนื้อหาพร้อมทำแบบฝึกทักษะ ขณะปฏิบัติกิจกรรมควรดูแลนักเรียนอย่างใกล้ชิด
6. ให้นักเรียนช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และซักถามเนื้อหาที่ยังไม่เข้าใจ ครูอธิบายเพิ่มเติม
7. เมื่อนักเรียนสรุปเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้หัวหน้ากลุ่มรวบรวมส่งครูผู้สอน เพื่อตรวจสอบความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ แจงผลให้นักเรียนทราบในชั่วโมงต่อไป
8. ทดสอบความรู้หลังเรียนของนักเรียน โดยใช้แบบทดสอบหลังเรียน เพื่อนำมาประเมินผลความก้าวหน้าและนำมาเฉลี่ยเป็นคะแนนกลุ่ม
9. คะแนนกลุ่มและความสำเร็จของกลุ่มในขั้นสุดท้าย ครูผู้สอนรวบรวมคะแนนกลุ่มซึ่งได้จากคะแนนที่สมาชิกแต่ละคนได้รับจากการทำแบบทดสอบแต่ละเล่มมาหาค่าเฉลี่ยของกลุ่มโดยกลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุด 3 กลุ่มแรกจะได้รับใบประกาศเกียรติคุณและธงผ้าใส่ของคนละ 1 ธง ดังนี้
 - กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 1 จะเป็น “Super team” คือ กลุ่มยอดเยี่ยม
 - กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 2 จะเป็น “Great team” คือ กลุ่มเก่งมาก
 - กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 3 จะเป็น “Good team” คือ กลุ่มเก่ง
10. การศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้จะไม่บรรลุผลสำเร็จ ถ้านักเรียนขาดความมีวินัยในการเรียนและความซื่อสัตย์ในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์





แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
เล่มที่ 5 ลิมิตของลำดับ ใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค TAI (Team Assisted Individualization) นักเรียนควรปฏิบัติ ดังนี้

1. นักเรียนแบ่งกลุ่ม ๆ ละ 4 - 5 คน ประกอบด้วย นักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน สมาชิกแต่ละกลุ่มทำการจับคู่กันเพื่อตรวจสอบซึ่งกันและกัน
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญของการเรียนให้เข้าใจ
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เป็นข้อสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที คะแนน 10 คะแนน เสร็จแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่มด้วยตนเอง โดยครูคอยกำกับ แนะนำ การตรวจ ให้ชัดเจน ถูกต้องตรงตามเฉลย นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ห้ามเปิดดูเฉลยก่อน ทำแบบทดสอบก่อนเรียน นักเรียนบันทึกคะแนนลงในตารางบันทึกคะแนน หากมีข้อสงสัยให้ขอ คำแนะนำจากครูผู้สอน
4. ศึกษาใบความรู้ ตัวอย่าง แล้วสรุปเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอนที่ครูชี้แจง
5. เมื่อสรุปเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะในแต่ละหัวข้อที่กำหนดเสร็จแล้ว ให้หัวหน้ากลุ่ม รวบรวมส่งครู เพื่อตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์การประเมิน บันทึกและแจ้งผลให้นักเรียนทราบในชั่วโมงต่อไป ถ้าพบว่านักเรียนไม่ผ่านเรื่องใด กลุ่มจะต้องช่วยกันอธิบายให้เข้าใจ ถ้ายังไม่เข้าใจให้ขอ คำอธิบายเพิ่มเติมจากครู
6. เมื่อนักเรียนทั้งกลุ่มทำกิจกรรมตามข้อ 4 และข้อ 5 ครบถ้วนและถูกต้องแล้วให้นักเรียน ทำแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ A เสร็จแล้วให้หัวหน้ากลุ่มเป็นผู้ตรวจคำตอบตามเฉลยท้ายเล่ม โดยครู คอยกำกับ การตรวจให้ถูกต้องตรงตามเฉลย ถ้าไม่ผ่านร้อยละ 70 ให้สมาชิกในกลุ่มช่วยกันอธิบาย แก้ไขข้อบกพร่องแล้วจึงทำแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ B จนผ่านร้อยละ 70
7. เมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเสร็จแล้ว ให้หัวหน้ากลุ่มบันทึกคะแนนลงในแผ่น สรุปผลประจำกลุ่มและนำคะแนนไปเปรียบเทียบกับคะแนนฐานของแต่ละบุคคลและของแต่ละกลุ่มต่อไป
8. คะแนนกลุ่มและความสำเร็จของกลุ่มในขั้นสุดท้าย ครูผู้สอนจะรวบรวมคะแนนกลุ่มซึ่งได้จากคะแนนที่สมาชิกแต่ละคนได้รับจากการทำแบบทดสอบแต่ละเล่มมาหาค่าเฉลี่ยของกลุ่ม โดยกลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุด 3 กลุ่มแรกจะได้รับใบประกาศเกียรติคุณและถุงผ้าใส่ของคนละ 1 ถุง ดังนี้

กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 1 จะเป็น “Super team” คือ กลุ่มยอดเยี่ยม

กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 2 จะเป็น “Great team” คือ กลุ่มเก่งมาก

กลุ่มที่ได้คะแนนสูงเป็นอันดับที่ 3 จะเป็น “Good team” คือ กลุ่มเก่ง

9. การศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้จะไม่บรรลุผลสำเร็จ ถ้านักเรียนขาดความมีวินัยในการเรียนและความซื่อสัตย์ในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

สาระ มาตรฐานการเรียนรู้ และตัวชี้วัดช่วงชั้น

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐานการเรียนรู้

ค 4.1 : เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน

ตัวชี้วัดช่วงชั้น

ค 4.1ม.4-6/3 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เขียนแสดงความสัมพันธ์และฟังก์ชันในรูปต่าง ๆ เช่น ตาราง กราฟ และสมการ

สาระที่ 6 : ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐานการเรียนรู้

ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ตัวชี้วัดช่วงชั้น

- ค 6.1 ม.4-6/1 ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา
- ค 6.1 ม.4-6/2 ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม
- ค 6.1 ม.4-6/3 ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม
- ค 6.1 ม.4-6/4 ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน
- ค 6.1 ม.4-6/5 เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ
- ค 6.1 ม.4-6/6 มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์



สาระสำคัญ

ลำดับอนันต์ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = L$

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. หาลิมิตของลำดับอนันต์ โดยการพิจารณาจากกราฟได้
2. หาลิมิตอนันต์ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
3. บอกลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออกได้

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะ

ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอน ดังนี้

1. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เสร็จแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่มด้วยตนเอง
2. ศึกษาบทนิยาม ทฤษฎี หลักการที่เกี่ยวข้อง พร้อมศึกษาตัวอย่างจากใบความรู้ แล้วอภิปรายภายในกลุ่มเพื่อสร้างความเข้าใจ หากมีข้อสงสัยให้สอบถามเพื่อนสมาชิกในกลุ่ม
3. สรุปเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเองอย่างตั้งใจ หากมีข้อสงสัยให้ปรึกษาเพื่อนในกลุ่ม ห้ามเปิดดูเฉลยท้ายเล่ม นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง เมื่อทำเสร็จแล้วหัวหน้ากลุ่มรวบรวมส่งครูเพื่อตรวจสอบ บันทึกผลและแจ้งผลต่อไป
4. เมื่อทำแบบฝึกทักษะเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้ทำแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ A ด้วยตนเองเสร็จแล้วให้หัวหน้ากลุ่มตรวจคำตอบตามเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกคะแนนลงในแบบบันทึกคะแนนเพื่อเก็บคะแนนสะสมเป็นคะแนนกลุ่ม ถ้าสมาชิกในกลุ่มคนใดไม่ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 70 ต้องกลับไปศึกษาเนื้อหาอีกครั้งและทำแบบทดสอบคู่ขนานฉบับ B จนกว่าจะผ่าน
5. สมาชิกในกลุ่มร่วมกันสรุปเนื้อหา โดยครูเป็นผู้คอยแนะนำและเพิ่มเติมความรู้ในเนื้อหาให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

แบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ลิมิตของลำดับ

- คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากตัวเลือก ก, ข, ค หรือ ง แล้วเขียนเครื่องหมาย X ลงใน () ของกระดาษคำตอบ
2. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 15 นาที

ข้อ 1. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

ก. $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ข. $a_n = \frac{1}{n^{-10}}$

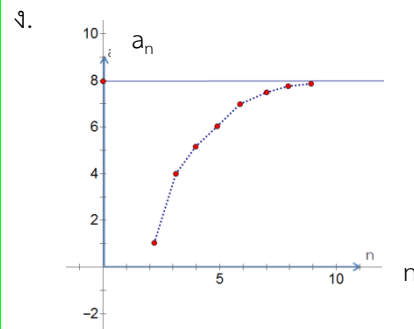
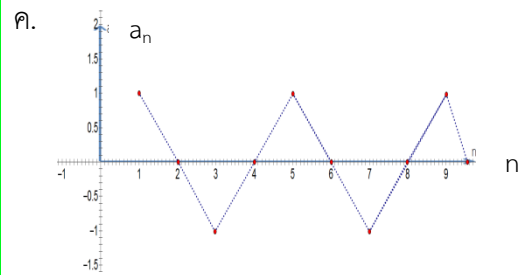
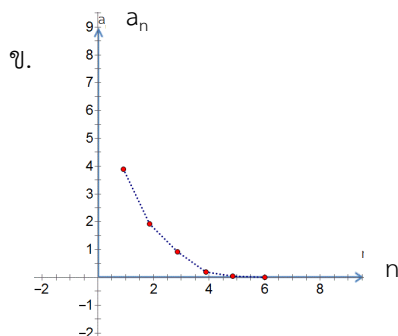
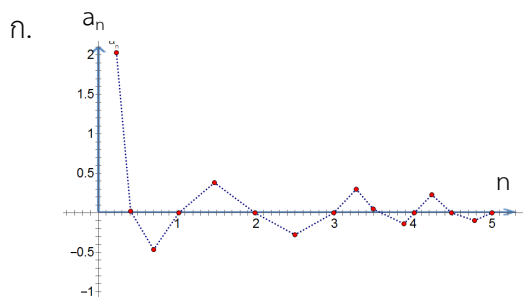
ค. $a_n = \sqrt{3}^n$ ง. $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{-n}$

ข้อ 2. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

ก. $a_n = \frac{7}{n+1}$ ข. $a_n = \frac{3n^5}{5}$

ค. $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ ง. $a_n = \frac{9}{n^3}$

ข้อ 3. กราฟของลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก



ข้อ 4. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{2}{n^3} + 5$

- ก. 7 ข. 5
ค. 2 ง. 0

ข้อ 5. จงหาลิมิตของลำดับ

$$b_n = \frac{9 + 3n - 5n^2}{3n^2 + 4}$$

- ก. $-\frac{5}{3}$ ข. $\frac{5}{3}$
ค. 3 ง. 0

ข้อ 6. จงหาลิมิตของลำดับ $C_n = \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 3n}}{4n^2 + 2}$

- ก. 0
ข. $\frac{3}{4}$
ค. $\frac{2}{3}$
ง. หาค่าไม่ได้

ข้อ 7. จงหาลิมิตของลำดับ

$$a_n = \frac{5^{n+1} + 3n - 1}{3^{n+1} + 5^{n-1}}$$

- ก. 3
ข. 5
ค. 15
ง. 25

ข้อ 8. จงหาลิมิตของลำดับ $b_n = \frac{4n^5 - 2n + 1}{6 - 5n^4}$

- ก. $-\frac{4}{5}$
ข. $\frac{4}{5}$
ค. 0
ง. หาค่าไม่ได้

ข้อ 9. จงหาลิมิตของลำดับ $b_n = \sqrt[4]{\frac{64n^2 + 3n}{4n^2}}$

- ก. 1
ข. 2
ค. 3
ง. 4

ข้อ 10. จงหาลิมิตของลำดับ

$$a_n = \frac{\sqrt{25n+9}}{\sqrt{4n} + \sqrt{25n}}$$

- ก. 0
ข. $\frac{8}{7}$
ค. $\frac{5}{7}$
ง. $\frac{5}{2}$



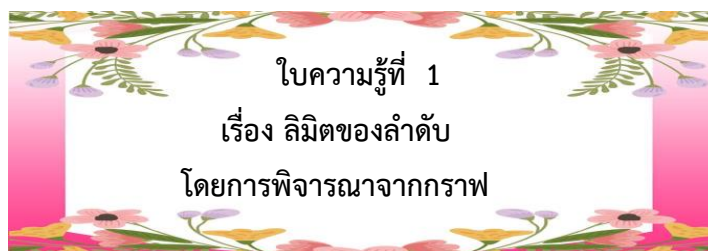


เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

ชื่อ-สกุล.....ชั้น ม.6/.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
8				
9				
10				





จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ โดยการพิจารณาจากกราฟได้
2. นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
3. นักเรียนสามารถบอกลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออกได้

สาระสำคัญ

ลำดับอนันต์ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = L$

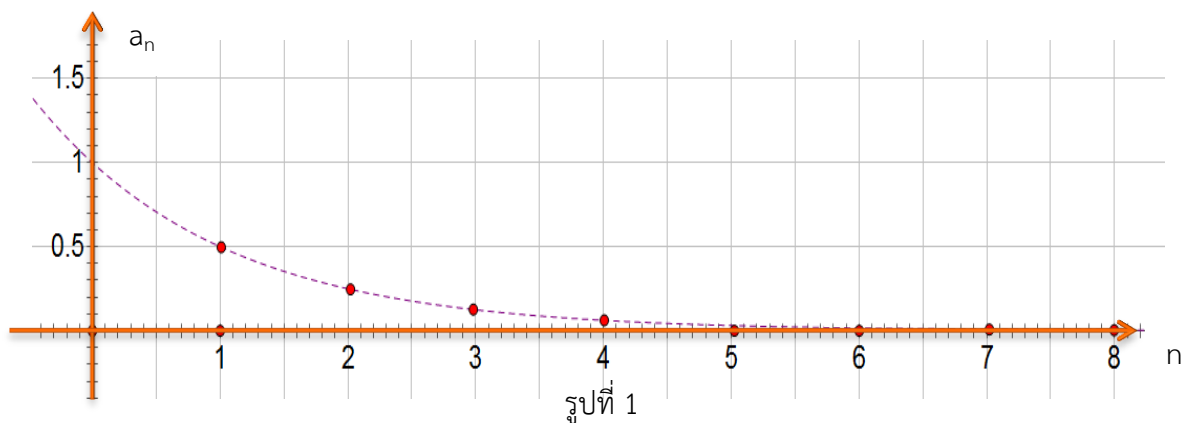
ลิมิตของลำดับ

พิจารณาลำดับอนันต์ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = L$

ลำดับอนันต์ที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่เข้า (Convergent Sequence) ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า (Divergent Sequence)

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$

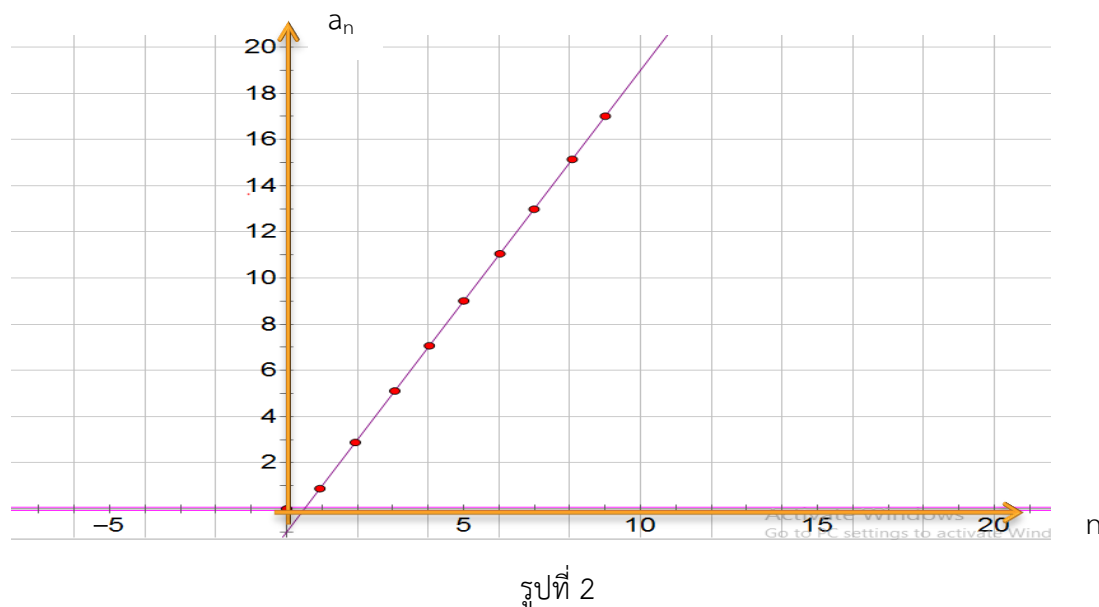
n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$...



จากกราฟรูปที่ 1 จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n มีค่าลดลงเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0 จึงกล่าวว่าลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ มีลิมิตเท่ากับ 0 หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$ และ a_n เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณาลำดับ $b_n = 2n - 1$

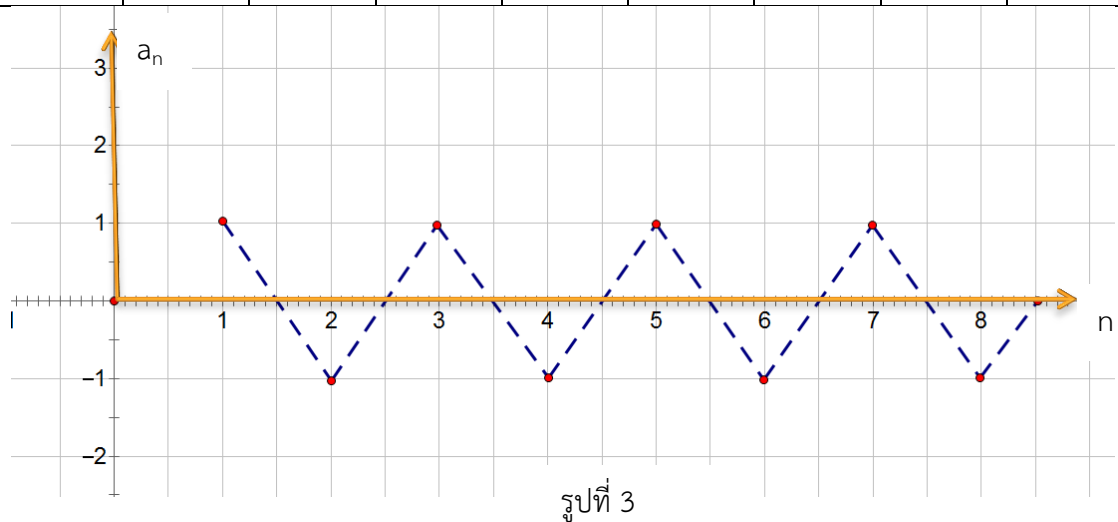
n	1	2	3	4	5	6	7	...
b_n	1	3	5	7	9	11	13	...



จากกราฟรูปที่ 2 จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว b_n ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนใดจำนวนหนึ่งเลย จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $b_n = 2n - 1$ ไม่มีลิมิต หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n$ หาค่าไม่ได้ และ b_n เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่างที่ 3 พิจารณาลำดับ $C_n = (-1)^{n+1}$

n	1	2	3	4	5	6	7
C_n	1	-1	1	-1	1	-1	1

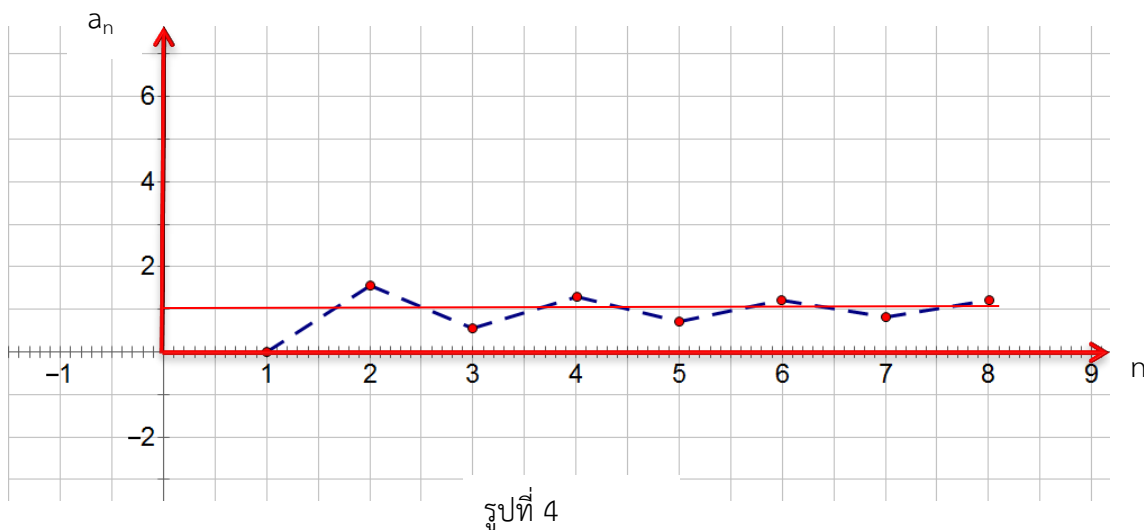


จากกราฟรูปที่ 3 จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว C_n ไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนใดจำนวนหนึ่งเลย จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $C_n = (-1)^{n+1}$ ไม่มีลิมิต หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} C_n$ หาค่าไม่ได้ และ C_n เป็นลำดับลู่ออก

จากตัวอย่างที่ 3 เราจะเรียกลำดับลู่ออกที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า ลำดับแกว่งกวัด (Oscillating sequence)

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{6}{7}$



จากกราฟรูปที่ 4 จะเห็นว่า เมื่อ a_n มีค่ากว้างแต่ลดลงเข้าใกล้ 1 เมื่อ n มีค่ามากที่สุดโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ มีลิมิต หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1$ และ a_n เป็นลำดับลู่เข้า

สรุป

พิจารณาลิมิตของลำดับ (Limit of sequence) ได้ดังนี้

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวหาว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจำเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L)
3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่เข้าส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่ออก
4. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับ เมื่อ n มากขึ้น โดยไม่มีที่สิ้นสุดเป็นลำดับอนันต์ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่

สิ้นสุด



จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ โดยการพิจารณาจากกราฟได้
2. นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
3. นักเรียนสามารถบอกลำดับอนันต์ที่เป็นลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออกได้

สาระสำคัญ

ลำดับอนันต์ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = L$

ลิมิตของลำดับ

พิจารณาลำดับอนันต์ a_n เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence) และกล่าวว่า ลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = L$

ลำดับอนันต์ที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่เข้า (convergent Sequence) ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า (divergent Sequence)

เรื่อง ลิมิตของลำดับ โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

จากการหาลิมิตของลำดับโดยพิจารณาจากกราฟ นักเรียนจะเห็นว่าค่อนข้างยุ่งยากเพราะต้องแทนค่าและนำไปลงกราฟ ซึ่งอาจจะต้องแทนค่าหลายพจน์เพื่อดูแนวโน้มของกราฟหาค่าลิมิต แต่ต่อไปนี้จะเป็นการหาลิมิตของลำดับโดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ r เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ n^r หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{n^7}$ จากทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} = 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = n^{10}$ จากทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} n^{10}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{1}{n^3 + 2n + 1} = 0$ จากทฤษฎีบทที่ 1

จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} = 0$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ r เป็นจำนวนจริง

- ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} r^n = 0$
- ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} r^n$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 5^n$ เนื่องจาก $|5| = 5 > 1$ จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า

$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^n$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n$ เนื่องจาก $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1$ จากทฤษฎีบทที่ 2

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ เนื่องจาก $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$ จากทฤษฎีบทที่ 2

จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 7 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \left(\frac{8}{7}\right)^{-n}$ เนื่องจาก $\left(\frac{8}{7}\right)^{-n} = \left(\frac{7}{8}\right)^n$ และ

$$\left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8} < 1 \text{ จากทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$$

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ a_n, b_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$$

$$(6) \text{ ถ้า } b_n \neq 0 \text{ ทุกจำนวนเต็มบวก } n \text{ และ } B \neq 0 \text{ แล้ว } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

(7) ถ้า a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และให้ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{A}$ โดยที่ $\sqrt[m]{A}$ หาค่าได้

ตัวอย่างที่ 8 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = 10$ จากทฤษฎีบทที่ 3 ข้อ 1 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} 10 = 10$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = -\frac{5}{7}$ จากทฤษฎีบทที่ 3 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{5}{7}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{5}{n^6}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^6} &= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^6} \\ &= 5(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{n^6} = 0$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{4n^3 + 3n}{2n^3}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n}{2n^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3}{2n^3} + \frac{3n}{3n^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{2n^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 2 + \frac{3}{2}(0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 3n}{2n^3} = 2$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{5n^2 + 3n}{2n^3 + 1}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n}{2n^3 + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^3 \left(2 + \frac{1}{n^3} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^3}} \right) \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}} \\ &= \frac{0 + 0}{2 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n}{2n^3 + 1} = 0$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3 + 2n - 6n^2}{2n^2 + n - 7}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n - 6n^2}{2n^2 + n - 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} - 6 \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n} - 6}{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{x \rightarrow \infty} 6}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}} \\ &= \frac{0 + 0 - 6}{2 + 0 - 0} \\ &= -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n - 6n^2}{2n^2 + n - 7} = -3$

ตัวอย่างที่ 14 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{7n^3 + 3n^2 + n - 4}{n^2 + 2n}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 3n^2 + n - 4}{n^2 + 2n} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(7 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 7 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{n^3}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{7 + 0 + 0 - 0}{0 + 0} \\ &= \frac{7}{0} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 3n^2 + n - 4}{n^2 + 2n} =$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 15 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(n^2-3) - n^3(n+1)}{(n+1)(n^2-3)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4 - 3n^2 - n^4 - n^3}{n^3 - 3n + n^2 - 3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3n^2 - n^3}{n^3 + n^2 - 3n - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(-\frac{3}{n} - 1 \right)}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{3}{n^3} \right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{n} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}} \\ &= \frac{0 - 1}{1 + 0 - 0 - 0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{n^2-3} \right) = -1$

ตัวอย่างที่ 16 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \sqrt[5]{\frac{243n^2 - 4n}{32n^2 - 3n}}$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{243n^2 - 4n}{32n^2 - 3n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(243 - \frac{4}{n} \right)}{n^2 \left(32 - \frac{3}{n} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{243 - \frac{4}{n}}{32 - \frac{3}{n}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 243 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 32 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} \\
 &= \frac{243 - 0}{32 - 0} \\
 &= \frac{243}{32}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{243n^2 - 4n}{32n^2 - 3n}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 17 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{5^{n+1} - 5^n + 3}{5^{n+1} + 1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 5^n + 3}{5^{n+1} + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 5^n - 5^n + 3}{5^n + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(5 - 1 + \frac{3}{5^n} \right)}{5^n \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^n} \right)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n}} \\
 &= \frac{4 + 0}{\frac{1}{5} + 0} \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 5^n + 3}{5^{n+1} + 1} = 20$

ตัวอย่างที่ 18 จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{2^{n+2} - 3^{n+1} + 1}{2^{n+1} + 3^{n+2}}$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 3^{n+1} + 1}{2^{n+1} + 3^{n+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n + 1}{2 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 + \frac{1}{3^n} \right)}{3^n \left(2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n + 9 \right)}$$

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - \lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}}{2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \lim_{x \rightarrow \infty} 9}$$

$$= \frac{4(0) - 3 + 0}{2(0) + 9}$$

$$= -\frac{3}{9}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 3^{n+1} + 1}{2^{n+1} + 3^{n+2}} = -\frac{1}{3}$



สรุป

การหาลิมิตของลำดับ มีขั้นตอนดังนี้

พิจารณาลิมิตของลำดับ (Limit of sequence) ได้ดังนี้

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวหาว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจำเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L)
3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่เข้า ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่ออก
4. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ r เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ n^r หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ r เป็นจำนวนจริง

- ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} r^n = 0$
- ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} r^n$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ a_n, b_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

โดยที่ $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = AB$

(6) ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$

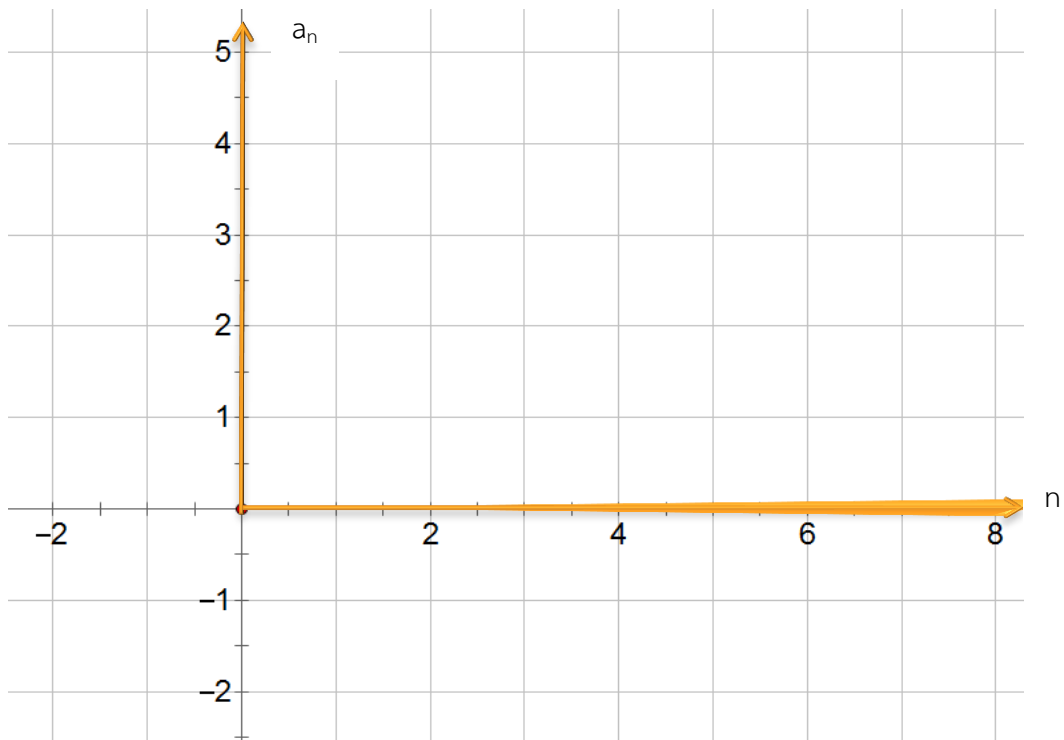
(7) ถ้า a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และให้ m เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับ 2 แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{x \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{A}$ โดยที่ $\sqrt[m]{A}$ หาค่าได้

แบบสรุปรูปเนื้อหา เรื่อง ลิมิตของลำดับ

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปรูปเนื้อหาเรื่องลิมิตของลำดับตามหัวข้อต่อไปนี้

1. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ โดยการเขียนกราฟ

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n								



.....

.....

.....

.....

2. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. การหาลิมิตของลำดับ มีขั้นตอนดังนี้

.....

.....

.....

.....

.....

.....



สรุปผลการเรียน

.....คะแนน

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน

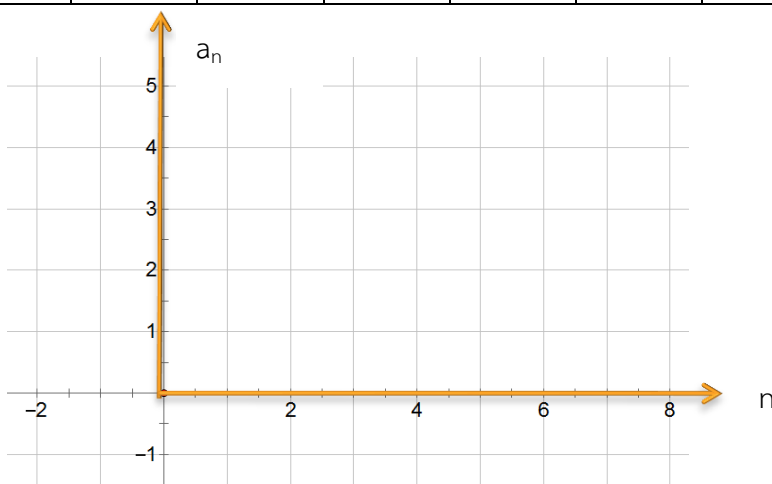
วันที่...../...../.....

แบบฝึกทักษะที่ 5.1 เรื่อง ลิมิตของลำดับโดยการพิจารณาจากกราฟ

คำชี้แจง จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบดูว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออกพร้อมทั้งหารลิมิตของลำดับ

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$

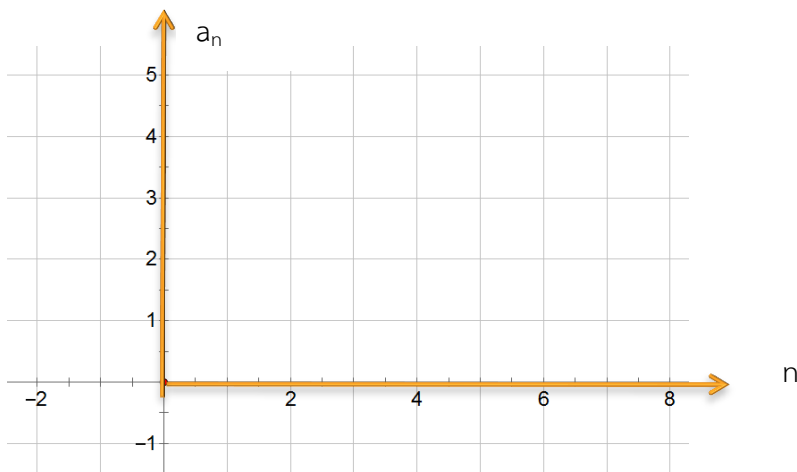
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n								



ตอบ.....

2. $a_n = n(1 + (-1)^n)$

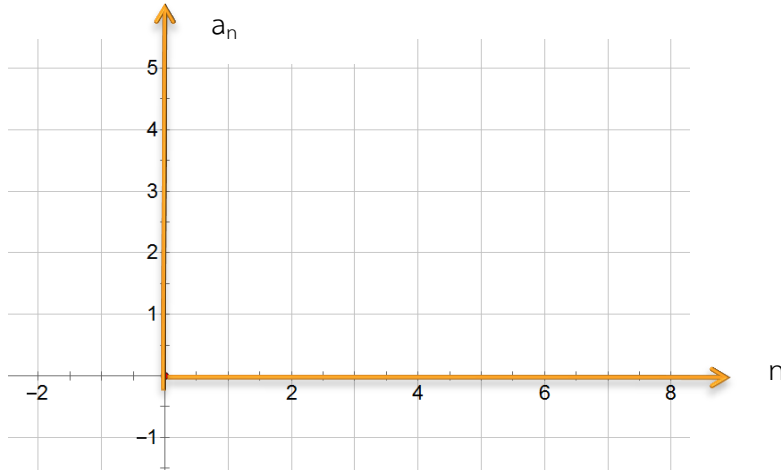
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n								



ตอบ.....

3. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

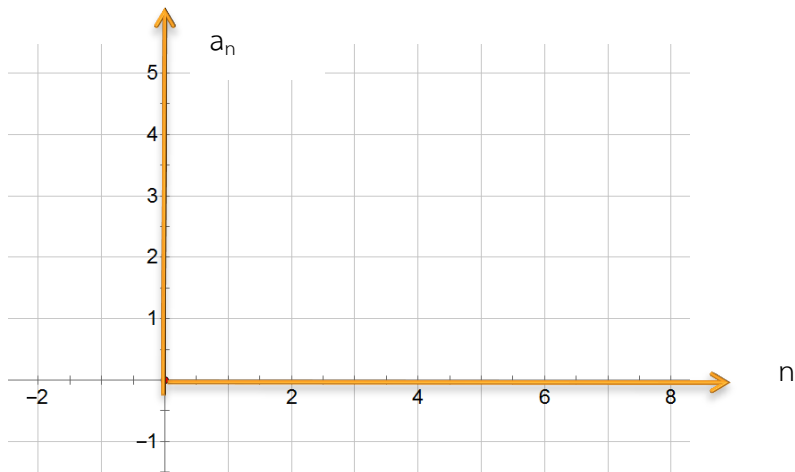
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n								



ตอบ.....

4. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

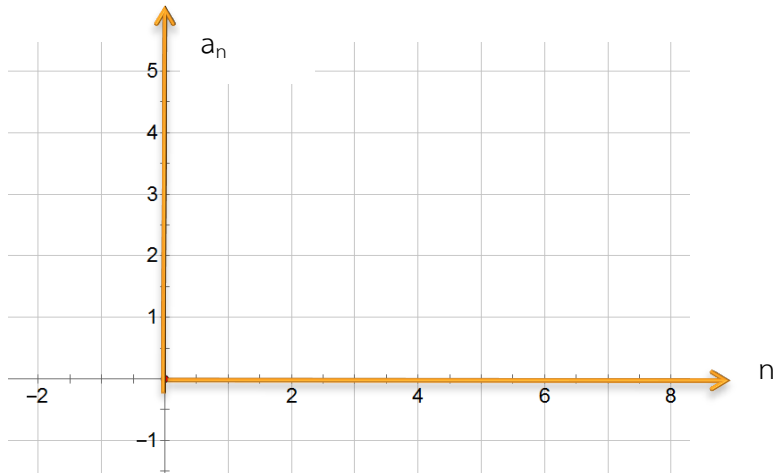
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n								



ตอบ.....

5. $a_n = 3 - \left(\frac{1}{2^n}\right)$

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n								



ตอบ.....



สรุปผลการเรียน

.....คะแนน

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน
วันที่...../...../.....

แบบฝึกทักษะที่ 5.2 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

คำชี้แจง จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่
ออก พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ

1. $a_n = \frac{7}{9}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{9} = \dots\dots\dots$

2. $a_n = \frac{10}{3n}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{3n} = \dots\dots\dots$

3. $a_n = 1 + (-1)^n$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1 + (-1)^n = \dots\dots\dots$

4. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = \dots\dots\dots$

5. $a_n = \left(-\frac{7}{5}\right)^n$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{7}{5}\right)^n = \dots\dots\dots$

6. $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \dots\dots\dots$

7. $a_n = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = \dots\dots\dots$

8. $a_n = 5 - \frac{1}{n^3}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \frac{1}{n^3} = \dots\dots\dots$

9. $a_n = \frac{6n-2}{3n}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6n-2}{3n} = \dots\dots\dots$

10. $a_n = \frac{n+2}{3}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3} = \dots\dots\dots$

11. $a_n = \frac{6-7n^5}{4n^6-3n^5}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-7n^5}{4n^6-3n^5} = \dots\dots\dots$

12. $a_n = \frac{8n^3+2n^2+5}{6n^3-5n+3}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8n^3+2n^2+5}{6n^3-5n+3} = \dots\dots\dots$

13. $a_n = \frac{7 - 4n^3}{5 + 2n - n^3}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4n^3}{5 + 2n - n^3} = \dots\dots\dots$
14. $a_n = \frac{3^{n+2} + 3}{3^n + 2}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 3}{3^n + 2} = \dots\dots\dots$
15. $a_n = \frac{5^{n-1} + 2^{n+1} + 1}{5^{n+1} + 3}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1} + 2^{n+1} + 1}{5^{n+1} + 3} = \dots\dots\dots$
16. $a_n = \frac{6^{n+2} + 2^{n+1} + 4}{2^n \cdot 3^{n+1} + 2}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^{n+2} + 2^{n+1} + 4}{2^n \cdot 3^{n+1} + 2} = \dots\dots\dots$
17. $a_n = \sqrt{\frac{8n + 1}{1 - 2n}}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8n + 1}{1 - 2n}} = \dots\dots\dots$
18. $a_n = \sqrt[3]{\frac{72n^2 + 3n}{9n^2 - 1}}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{72n^2 + 3n}{9n^2 - 1}} = \dots\dots\dots$
19. $a_n = \frac{\sqrt{4n + 1}}{\sqrt{n + 1}}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n + 1}}{\sqrt{n + 1}} = \dots\dots\dots$
20. $a_n = \frac{n^2}{2n + 1} - \frac{n^2}{2n - 1}$ เป็นลำดับ..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n + 1} - \frac{n^2}{2n - 1} = \dots\dots\dots$



สรุปผลการเรียน
.....คะแนน

ลงชื่อ.....ผู้ประเมิน
วันที่...../...../.....

แบบทดสอบหลังเรียน ฉบับ A เรื่อง ลิมิตของลำดับ

- คำชี้แจง** 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากตัวเลือก ก, ข, ค หรือ ง แล้วเขียนเครื่องหมาย X ลงใน () ของกระดาษคำตอบ
2. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 15 นาที

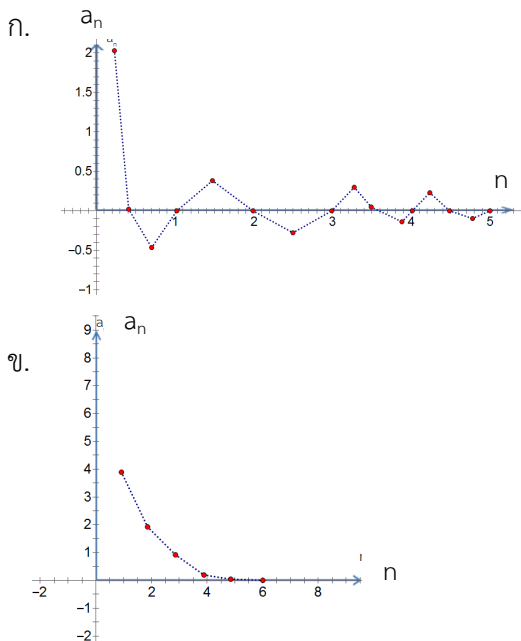
ข้อ 1. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

ก. $a_n = \frac{7}{n+1}$ ข. $a_n = \frac{3n^5}{5}$
 ค. $a_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ ง. $a_n = \frac{9}{n^3}$

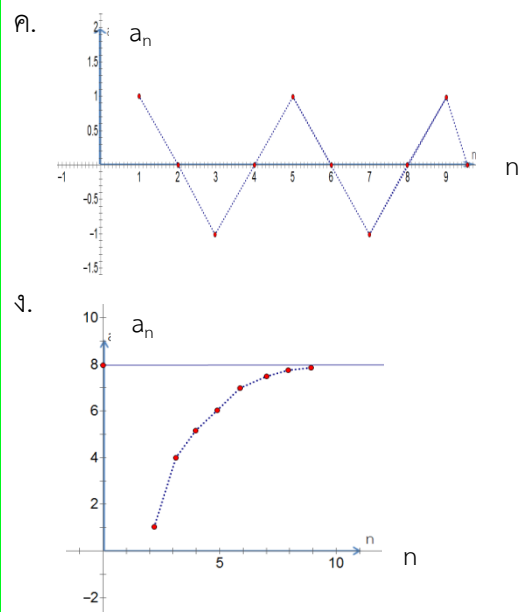
ข้อ 2. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

ก. $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ ข. $a_n = \frac{1}{n^{-10}}$
 ค. $a_n = \sqrt{3^n}$ ง. $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^{-n}$

ข้อ 3. กราฟของลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก



ข้อ 6. จงหาลิมิตของลำดับ



ข้อ 4. จงหาลิมิตของลำดับ

$$b_n = \frac{9 + 3n - 5n^2}{3n^2 + 4}$$

ก. $-\frac{5}{3}$ ข. $\frac{5}{3}$
 ค. 3 ง. 0

ข้อ 5. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{2}{3^n} + 5$

ก. 7 ข. 5
 ค. 2 ง. 0

ข้อ 8. จงหาลิมิตของลำดับ

$$a_n = \frac{5^{n+1} + 3n - 1}{3^{n+1} + 5^{n-1}}$$

- ก. 3 ข. 5
ค. 15 ง. 25

ข้อ 7. จงหาลิมิตของลำดับ

$$c_n = \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 3n}}{4n^2 + 2}$$

- ก. 0 ข. $\frac{3}{4}$
ค. $\frac{2}{3}$ ง. หาค่าไม่ได้

$$a_n = \frac{\sqrt{25n+9}}{\sqrt{4n} + \sqrt{25n}}$$

- ก. 0 ข. $\frac{8}{7}$
ค. $\frac{5}{7}$ ง. $\frac{5}{2}$

ข้อ 9. จงหาลิมิตของลำดับ

$$b_n = \frac{4n^5 - 2n + 1}{6 - 5n^4}$$

- ก. $-\frac{4}{5}$ ข. $\frac{4}{5}$
ค. 0 ง. หาค่าไม่ได้

ข้อ 10. จงหาลิมิตของลำดับ

$$b_n = \sqrt[4]{\frac{64n^2 + 3n}{4n^2}}$$

- ก. 1 ข. 2
ค. 3 ง. 4



ความพยายามอยู่ที่ไหน ความสำเร็จอยู่ที่นั่น

กระดาษคำตอบ
ทดสอบหลังเรียนฉบับ A

เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

ชื่อ-สกุล.....ชั้น ม.6/.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ไม่ยากอย่างที่คิด
เลยใช่ไหม



แบบทดสอบหลังเรียน ฉบับ B เรื่อง ลิมิตของลำดับ

- คำชี้แจง** 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากตัวเลือก ก, ข, ค หรือ ง แล้วเขียนเครื่องหมาย X ลงใน () ของกระดาษคำตอบ
2. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ
คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 15 นาที

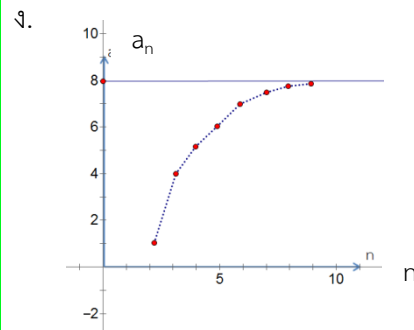
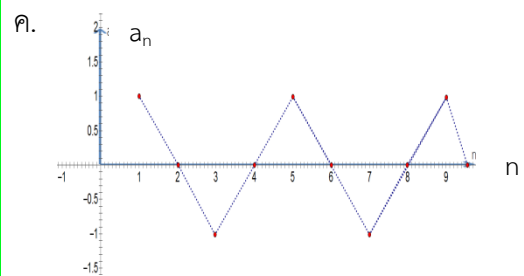
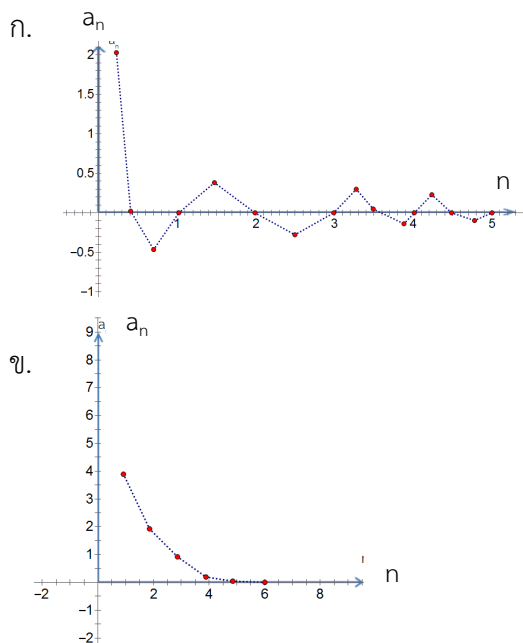
ข้อ 1. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

- ก. $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ข. $a_n = \frac{1}{n^{10}}$
 ค. $a_n = \sqrt{3^n}$ ง. $a_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n$

ข้อ 2. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก

- ก. $a_n = \frac{1}{2n+1}$ ข. $a_n = n^5$
 ค. $a_n = \frac{1}{n}$ ง. $a_n = \frac{9}{n^3}$

ข้อ 3. กราฟของลำดับในข้อใดเป็นลำดับลู่ออก



ข้อ 4. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{2}{n^3}$

- ก. 7 ข. 5
 ค. 2 ง. 0

ข้อ 5. จงหาลิมิตของลำดับ

$$b_n = \frac{9 + 3n - 5n^3}{3n^4 + 4}$$

- ก. $-\frac{5}{3}$ ข. $\frac{5}{3}$
 ค. 3 ง. 0

กระดาษคำตอบ
ทดสอบหลังเรียนฉบับ B

เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

ชื่อ-สกุล.....ชั้น ม.6/.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				



ตั้งใจ มีสมาธิ มุ่งมั่น
เราทุกคนทำได้

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ลิมิตของลำดับ

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

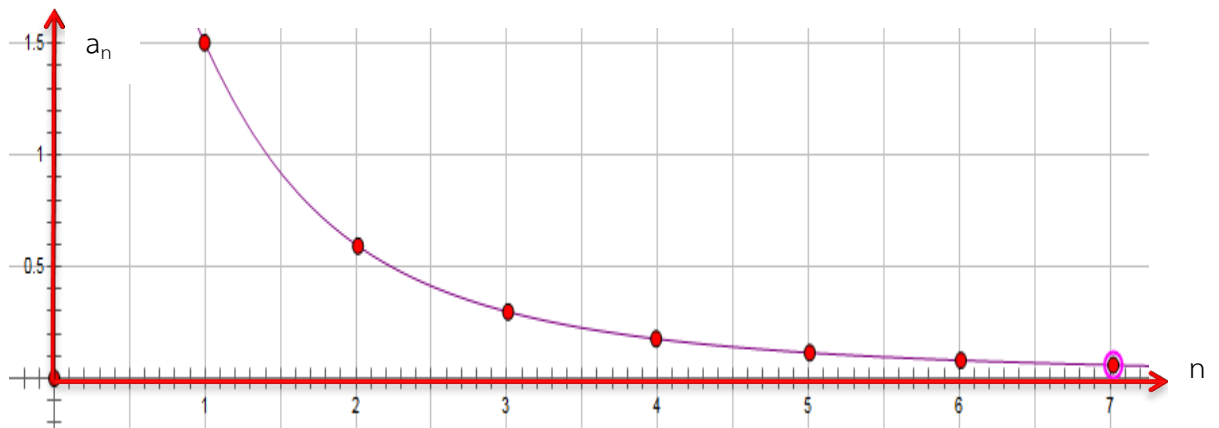
- 1) ง 2) ข 3) ค 4) ข 5) ก
6) ก 7) ง 8) ง 9) ข 10) ค

เฉลยแบบสรุปเนื้อหา เรื่อง ลิมิตของลำดับ

คำชี้แจง ให้นักเรียนสรุปเนื้อหาเรื่องลิมิตของลำดับตามหัวข้อต่อไปนี้

1. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ โดยการเขียนกราฟ

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{3}{26}$	$\frac{3}{37}$	$\frac{3}{50}$	



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n มีค่าลดลงเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

จึงกล่าวว่ลำดับ $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ มีลิมิตเท่ากับ 0 หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 0$ และ a_n เป็นลำดับลู่เข้า

2. จงหาลิมิตของลำดับ $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับ

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{3 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{3(0)}{1 + 0}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 0$

3. การหาลิมิตของลำดับ มีขั้นตอนดังนี้

สรุป การหาลิมิตของลำดับ...มีขั้นตอนดังนี้

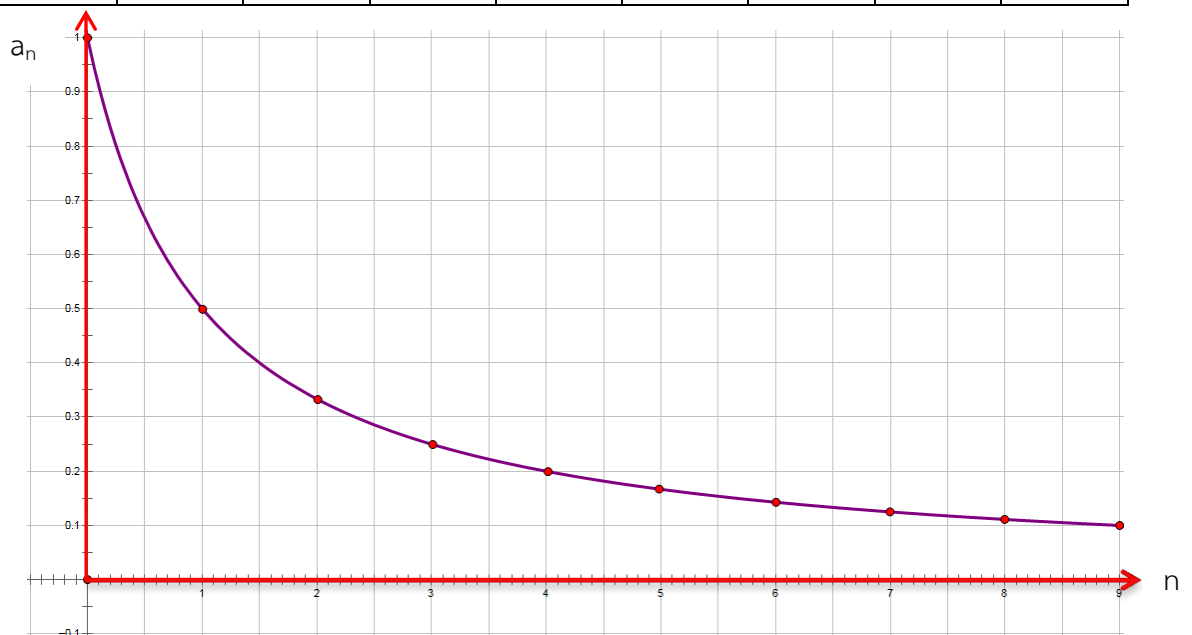
1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวหาว่า...L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจำเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L.)
3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่เข้า ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิตเรียกว่า ลำดับลู่ออก
4. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยใช้ทฤษฎีบท

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.1 เรื่อง ลิมิตของลำดับโดยการพิจารณา จากกราฟ

คำชี้แจง จงเขียนกราฟเพื่อตรวจสอบดูว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$

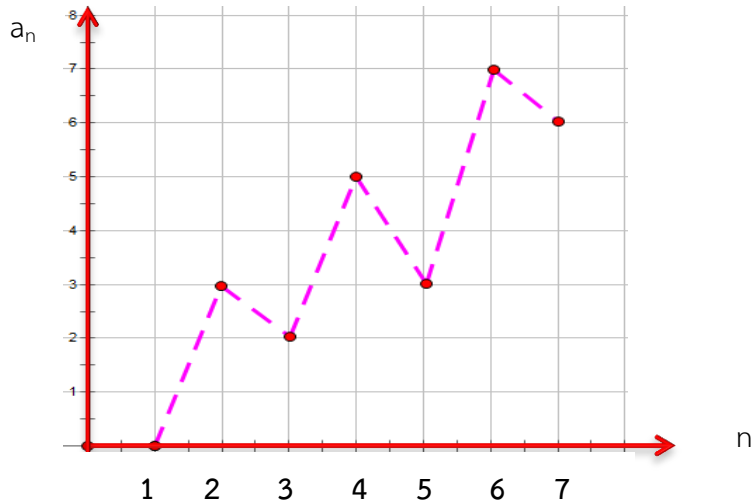
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$...



ตอบ.....ลำดับลู่เข้าและลิมิต $a_n = 0$

2. $a_n = n(1 + (-1)^n)$

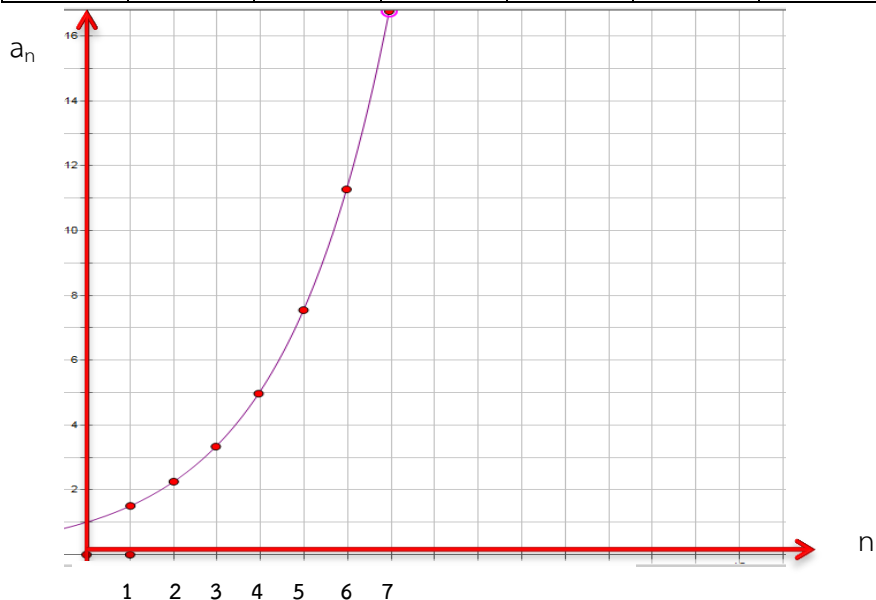
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	3	2	5	4	6	5	



ตอบ.....ลำดับลู่ออก.....

3. $a_n = \left(\frac{3}{-2}\right)^n$

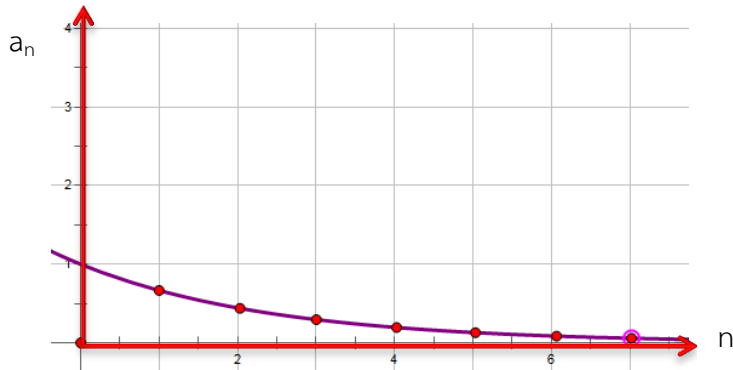
n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{2187}{128}$



ตอบ.....ลำดับลู่ออก.....

4. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

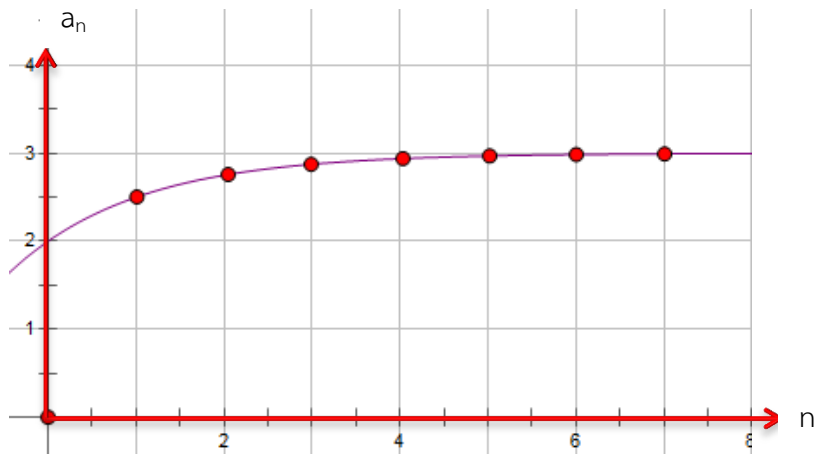
n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{279}$	$\frac{128}{2187}$...



ตอบ.....ลำดับลู่เข้าและลิมิต $a_n = 0$

5. $a_n = 3 - \left(\frac{1}{2^n}\right)$

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{23}{8}$	$\frac{47}{16}$	$\frac{95}{32}$	$\frac{191}{64}$	$\frac{383}{128}$...



ตอบ.....ลำดับลู่เข้าและลิมิต $a_n = 3$

แบบฝึกทักษะที่ 5.2 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

คำชี้แจง จงใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของลำดับเพื่อตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ

$$1. a_n = \frac{7}{9} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right)$$

$$2. a_n = \frac{10}{3n} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10}{3n} = 0$$

$$3. a_n = 1 + (-1)^n \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่ออก.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1 + (-1)^n = \text{หาค่าไม่ได้}$$

$$4. a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

$$5. a_n = \left(-\frac{7}{5}\right)^n \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่ออก.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{7}{5}\right)^n = \text{หาค่าไม่ได้}$$

$$6. a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

$$7. a_n = \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{5^{n+2}} = 0$$

$$8. a_n = 5 - \frac{1}{n^3} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \frac{1}{n^3} = 5$$

$$9. a_n = \frac{6n-2}{3n} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6n-2}{3n} = 2$$

$$10. a_n = \frac{n+2}{3} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่ออก.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3} = \text{หาค่าไม่ได้}$$

$$11. a_n = \frac{6-7n^5}{4n^6-3n^5} \quad \text{เป็นลำดับ.....ลู่เข้า.....} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-7n^5}{4n^6-3n^5} = \left(\frac{7}{3}\right)$$

12. $a_n = \frac{8n^3 + 2n^2 + 5}{6n^3 - 5n + 3}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 2n^2 + 5}{6n^3 - 5n + 3} = \left(\frac{4}{3} \right)$
13. $a_n = \frac{7 - 4n^3}{5 + 2n - n^3}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 4n^3}{5 + 2n - n^3} = 4$
14. $a_n = \frac{3^{n+2} + 3}{3^n + 2}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2} + 3}{3^n + 2} = 9$
15. $a_n = \frac{5^{n-1} + 2^{n+1} + 1}{5^{n+1} + 3}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1} + 2^{n+1} + 1}{5^{n+1} + 3} = \frac{1}{25}$
16. $a_n = \frac{6^{n+2} + 2^{n+1} + 4}{2^n \cdot 3^{n+1} + 2}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^{n+2} + 2^{n+1} + 4}{2^n \cdot 3^{n+1} + 2} = 12$
17. $a_n = \sqrt{\frac{8n+1}{1-2n}}$ เป็นลำดับ...ลู่ออก..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8n+1}{1-2n}} = \text{หาค่าไม่ได้}$
18. $a_n = \sqrt[3]{\frac{72n^2 + 3n}{9n^2 - 1}}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า.....
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{72n^2 + 3n}{9n^2 - 1}} = 2$
19. $a_n = \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1}} = 2$
20. $a_n = \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1}$ เป็นลำดับ...ลู่เข้า..... $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1} = \left(-\frac{1}{2} \right)$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ A เรื่อง ลิมิตของลำดับ

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1) ข | 2) ง | 3) ค | 4) ก | 5) ข |
| 6) ง | 7) ก | 8) ค | 9) ง | 10) ข |

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียนฉบับ B เรื่อง ลิมิตของลำดับ

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1) ข | 2) ข | 3) ค | 4) ง | 5) ง |
| 6) ข | 7) ก | 8) ง | 9) ก | 10) ค |



ตารางบันทึกคะแนน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ

ชื่อ-สกุล ชั้น..... เลขที่.....

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ผู้บันทึกคะแนน
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ ก่อนเรียน เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์			
แบบทดสอบก่อนเรียนแบบฝึกทักษะ เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ			
แบบสรุบน้ำเนื้อหา			
แบบฝึกทักษะที่ 1.1			
แบบฝึกทักษะที่ 1.2			
แบบทดสอบหลังเรียนแบบฝึกทักษะ เล่มที่ 5 เรื่อง ลิมิตของลำดับ			

ลงชื่อ

(นางสาวอุบล ชูรัตน์)

ครูผู้สอน



บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2555). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 6**.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2551). **คัมภีร์คณิตศาสตร์ ม 4-5-6**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เพิ่มทรัพย์
การพิมพ์.
- จีระ เจริญสุขวิมลและวินิจ วงศ์รัตน์. (ม.ป.ป). **สรุปสูตรคณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5-6**. กรุงเทพฯ:
ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- เทพฤทธิ์ ยอดใส และคณะ. (2556). **กฎแจกคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ:
พ.ศ.พัฒนา.
- ธนากาญจน์ ภัทรากาญจน์. (2552). **คณิตสาระ ม.ปลาย : แคลคูลัส**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่ง
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม 4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**.
กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สมัย เหล่าวานิชย์และพัชรพรณ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015**.
กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- ทำบ่อ. โรงเรียน. (2559). **หลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนทำบ่อ ปรับปรุง
ปีการศึกษา 2559**. หนองคาย: งานบริหารวิชาการ.