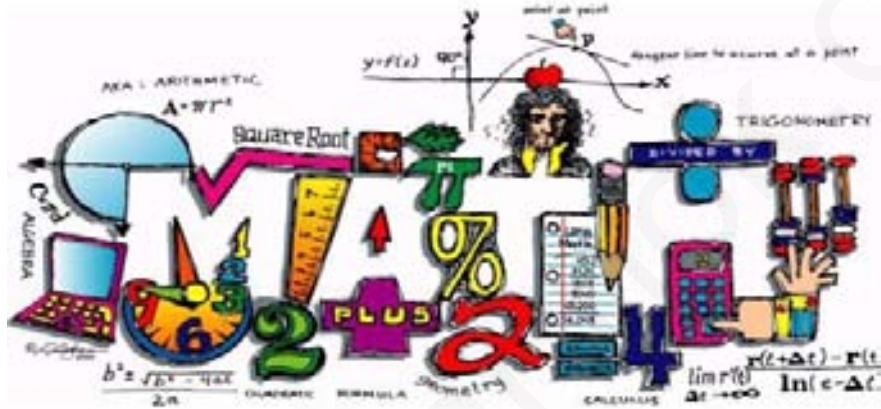




แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์
เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
ชุดที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



นายอัศเดช รักสิงห์
ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนพรานกระต่ายพิทยาคม
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

การเรียนรู้ถือเป็นปัจจัยสำคัญของการศึกษาในการจัดกระบวนการเรียนรู้
ต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ ถือว่าผู้เรียน
มีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดเรียนรู้ต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนาคตาม
ธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ

คณิตศาสตร์จัดว่าเป็นศาสตร์ที่สำคัญ และมีบทบาทศาสตร์หนึ่ง ซึ่งมีประโยชน์
ในแง่การศึกษาและการนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานสำคัญ
ในการแสวงหาความรู้ของวิชาอื่นๆ ข้าพเจ้าจึงได้พัฒนาแบบฝึกทักษะ วิชา คณิตศาสตร์
เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เพื่อนำมาใช้ในการพัฒนา
กระบวนการเรียนการสอน ซึ่งแบบฝึกทักษะที่ข้าพเจ้าพัฒนาขึ้นมีทั้งหมด จำนวน 5 ชุด

แบบฝึกทักษะชุดนี้เป็นแบบฝึกทักษะชุดที่ 1 เรื่อง **ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**
หวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะจะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนที่เรียนรู้และฝึกทักษะ
จนสามารถพัฒนากระบวนการคิด รวมถึงส่งผลให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นต่อไป

อัครเดช รักสิงห์

ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำชี้แจง	ค
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง	1
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ลิขิตของฟังก์ชัน	2
เอกสารแนบแนวทาง ลิขิตของฟังก์ชัน (1)	3
เอกสารแนบแนวทาง ลิขิตของฟังก์ชัน (2)	4
แบบฝึกทักษะที่ 1 ลิขิตของฟังก์ชัน	5
แบบฝึกทักษะที่ 2 ลิขิตของฟังก์ชัน	6
แบบฝึกทักษะที่ 3 ลิขิตของฟังก์ชัน	7
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	8
เอกสารแนบแนวทาง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	9
แบบฝึกทักษะที่ 1 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	10
แบบฝึกทักษะที่ 2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	11
แบบทดสอบเก็บคะแนน	12
บรรณานุกรม	14
ภาคผนวก	16
เฉลยแบบฝึกทักษะ	17
เฉลยแบบทดสอบ	22

คำชี้แจง

ให้นักเรียนปฏิบัติต่อไปนี้ให้เคร่งครัด

1. อ่านคำชี้แจงให้เข้าใจ
2. ศึกษาเนื้อหาในกิจกรรมตามลำดับอย่าข้ามกิจกรรมเพราะจะทำให้เนื้อหาไม่ต่อเนื่องกัน
3. ทำแบบฝึกทักษะตามลำดับห้ามข้ามขั้นตอน
4. นักเรียนสามารถตรวจคำตอบได้จากเฉลยที่อยู่ในภาคผนวกท้ายเล่ม
5. นักเรียนต้องซื้อสัปดาห์ต่อตนเองโดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน
6. ถ้าตอบผิดให้กลับไปศึกษาใหม่อีกจนเข้าใจ
7. เมื่อศึกษาเสร็จแล้วให้ทำแบบทดสอบที่อยู่ท้ายเล่มเพื่อเก็บคะแนน



จุดประสงค์การเรียนรู้

ให้นักเรียนสามารถ

1. หาสมบัติของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่
3. หาความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้



ใบความรู้ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

หลักการ

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$1. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ มีลิมิตที่ } a$$

(ลิมิตเข้าทางซ้าย เท่ากับ ลิมิตเข้าทางขวา)

$$2. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ แสดงว่า } f(x) \text{ ไม่มีลิมิตที่ } a$$

➔ กรณี ผลของ ลิมิต ออกมาในรูปของ $\frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ อาจหาค่าได้ โดยพยายามเปลี่ยนรูปของ $f(x)$ ใหม่เพื่อให้สามารถตัดทอนกันและหาค่าลิมิตได้โดยตรง

การเปลี่ยนรูปของ $f(x)$ มีวิธีการหลายวิธี ดังนี้

1. แยกตัวประกอบ

2. ใช้คอนจูเกต

(conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน (เน้น คิคุรุท)

3. กฎของโลปีตาล (L ' Hopital ' Rule)

$$4. \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

เอกสารแนะแนวทาง

ลิมิตของฟังก์ชัน (1)

ตัวอย่างที่ 1 ให้ $f(x) = 4x - 3$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x - 3) = 4(2) - 3 = 8 - 3 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 3) = 4(2) - 3 = 5$$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = |x - 3|$ จงหา (1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x)$ เป็นค่าสัมบูรณ์ ค่า x ภายในค่าสัมบูรณ์มี 2 ค่า

$$|x| = \begin{cases} +x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \quad \rightarrow \text{เข้าทางขวา, ทางด้านบวก} \\ -(x - 3), & x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \quad \rightarrow \text{เข้าทางซ้าย, ทางด้านลบ} \end{cases}$$

(1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} |x - 3| = \lim_{x \rightarrow 3^-} -(x - 3) = -(3 - 3) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} |x - 3| = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 3 - 3 = 0$$

(2) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} |x - 3| = \lim_{x \rightarrow -3^-} -(x - 3) = -(-3 - 3) = 6$

ถ้าไม่เข้าใจให้
ถามคุณครูนะคะ



เอกสารแนะแนวทาง

ลิมิตของฟังก์ชัน (2)

ตัวอย่างที่ 3 ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 1 \\ x-1 & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

วิธีทำ

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1^2 = 1$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = 0-1 = -1$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $f(x) = x^2 + 5x - 4$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x - 4) = 3^2 + 5(3) - 4 = 20$

ข้อสังเกต :: • เราจะสนใจพิจารณาลิมิตทางซ้ายหรือทางขวา เมื่อ ฟังก์ชัน เป็นแบบ

- ถ้า เป็นฟังก์ชันปกติ เราสามารถหาค่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ โดยการแทนค่าได้เลย

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $f(x) = \frac{3-x}{x-5}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ (1) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{3-x}{x-5} \right) = \frac{3-5}{5-5} = \frac{-2}{0}$ หาค่าไม่ได้

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{x-5} \right) = \frac{3-3}{3-5} = \frac{0}{-2} = 0$

แบบฝึกทักษะที่ 1

ลิมิตของฟังก์ชัน

1. ถ้า $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

วิธีทำ แทนค่า $x = 2$ ใน $f(x)$ จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. ถ้า $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ แทนค่า $x = 3$ ใน $f(x)$ จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 2

ลิมิตของฟังก์ชัน

3. ถ้า $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

วิธีทำ แทนค่า $x = 1$ ใน $f(x)$ จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. ถ้า $f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

วิธีทำ แทนค่า $x = 1$ ใน $f(x)$ จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะที่ 3
 ลิมิตของฟังก์ชัน

5. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ใบความรู้ เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

หลักการ

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชัน และ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อเป็นจริงทั้ง 3 ข้อดังนี้

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และ
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

** ถ้าเงื่อนไขข้อใด ข้อหนึ่งขาดไป แสดงว่า f ไม่ต่อเนื่อง $x = a$

ถ้าไม่เข้าใจให้
ถามคุณครูนะจ๊ะ



**เอกสารแนะแนวทาง
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน**

ตัวอย่างที่ ถ้า $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \geq 3 \\ 2x+5, & -1 \leq x < 3 \\ 3x-2, & x < -1 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกหรือไม่จงอธิบาย

1. f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$
2. f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ และ $x = 3$
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 3$
4. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$ และ $x = 3$

วิธีทำ

มี 2 จุดที่ต้องพิจารณาคือ $x = -1$ และ $x = 3$

1. พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ $x = -1$

- $f(-1) = 2(-1) + 5 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3x^2 = 3(-1)^2 = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 5) = 2(-1) + 5 = 3$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$

2. พิจารณาความต่อเนื่องของ f ที่ $x = 3$

- $f(3) = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 5) = 2(3) + 5 = 6 + 5 = 11$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 2) = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$

แสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

ตอบ ตัวเลือก 1

แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียน
เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องที่กำหนด

1. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ [.....]

2. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^3}{x}$ [.....]

3. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4-x}{x} \right) \times \left(\frac{2}{x-4} \right)$ [.....]

4. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{10}{x^2 - 4} \right) \times \left(1 - \frac{2}{x} \right)$ [.....]

5. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ [.....]

แบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียน
เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ต่อ)

6. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} |x-3|$ [.....]

7. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$ [.....]

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{เมื่อ } x < -2 \\ mx+8 & , \text{เมื่อ } x \geq -2 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = -2$ แล้ว m มีค่าเท่ากับเท่าใด [.....]

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 3-5x & , \text{เมื่อ } x \neq -3 \\ -3x & , \text{เมื่อ } x = -3 \end{cases}$

จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ [.....]

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}a & , \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{x^2-1} & , \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด [.....]

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1.

กรุงเทพฯ. : ฐานบัณฑิต, 2544.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6) เล่มที่ 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1. กรุงเทพฯ. : บอัสการพิมพ์, 2548.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.

กรุงเทพฯ. : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2545.

_____. คู่มือครู วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2545.

_____. หนังสือเรียน วิชา คณิตศาสตร์ ค 013 ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. กรุงเทพฯ :

โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2536.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัพน์ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์ 3 พื้นฐาน + เพิ่มเติม ช่วงชั้นที่ 4

(ม.4 – ม.6) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ. : ธีระพงษ์การพิมพ์, 2544.

ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกทักษะ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2
ลิมิตของฟังก์ชัน

1. ถ้า $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

วิธีทำ นำ $x = 1$ แทนใน $f(x)$ จะได้ $f(1) = \frac{1^2 - 1}{2(1^2) - 1 - 1} = \frac{0}{0}$

เปลี่ยนรูปโดยการแยกตัวประกอบ $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$$2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(2x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)}{(2x + 1)} = \frac{1 + 1}{2(1) + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{2}{3}$

2. ถ้า $f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x}$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

วิธีทำ นำ $x = 0$ แทนใน $f(x)$ จะได้ $f(0) = \frac{\sqrt{4+0} - 2}{0} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$

เปลี่ยนรูปโดยใช้คอนจูเกต (conjugate) คูณทั้งเศษและส่วน \rightarrow **ติครูท คอนจูเกต ทันที**

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \times \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{4+x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4+0} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \frac{1}{4}$

เคล็ดลับฝึกทักษะที่ 3
ลิมิตของฟังก์ชัน

3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5x}{x} &= \frac{5}{5} \times \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5 \sin 5x}{5x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \times \frac{\sin 5x}{5x} \\ &= 5 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5(1) = 5 \end{aligned}$$

4. ถ้า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{\sin x^2}{x} &= \frac{x}{x} \times \frac{\sin x^2}{x} = \frac{x \sin x^2}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x^2}{x^2} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 0} x \right] \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \right] = (0)(1) = 0 \\ \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} &= 0 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

$$\text{จงพิจารณาเมื่อกำหนด } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3x+1} & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกพร้อมทั้งแสดงวิธีทำ

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. ก ถูก และ ข ถูก | 2. ก ถูก และ ข ผิด |
| 3. ก ผิด และ ข ถูก | 2. ก ผิด และ ข ผิด |

วิธีทำ พิจารณาความต่อเนื่องที่ $x = 1$

1. $f(1) = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3(1)+1} = \frac{1}{4}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-\sqrt{5-x}}{x-1} \times \frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4-(5-x)}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(2+\sqrt{5-x})} = \frac{1}{(2+\sqrt{5-1})} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

สรุป ก. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ถูก.....

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$

ผิด.....

ดังนั้น ก ถูก และ ข ผิด

ตอบ ตัวเลือก 2

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x > 1 \\ x-1 & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x-1)$ มีค่าเท่าใด

วิธีทำ \rightarrow พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2)$ จาก $x \rightarrow 0^-$ จะได้ $x^2 \rightarrow 0^+$
แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = \lim_{x^2 \rightarrow 0^+} f(x^2) = \lim_{x^2 \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$

\rightarrow พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x-1)$ จาก $x \rightarrow 1^+$ จะได้ $x-1 \rightarrow 0^+$
แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x-1) = \lim_{(x-1) \rightarrow 0^+} f(x-1) = \lim_{(x-1) \rightarrow 0^+} [(x-1) - 1]$
 $= 0 - 1 = -1$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x-1) = -1 - 1 = -2$

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนน

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียน
เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องที่กำหนด

1. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$ [2]

2. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^3}{x}$ [-3]

3. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4-x}{x} \right) \times \left(\frac{2}{x-4} \right)$ [$-\frac{1}{2}$]

4. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{10}{x^2 - 4} \right) \times \left(1 - \frac{2}{x} \right)$ [$\frac{5}{4}$]

5. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ [$\frac{4}{5}$]

เฉลยแบบทดสอบเก็บคะแนนหลังเรียน
เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ต่อ)

6. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} |x-3|$ [6]

7. จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$ [$\frac{1}{6}$]

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \text{เมื่อ } x < -2 \\ mx+8 & , \text{เมื่อ } x \geq -2 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = -2$ แล้ว m มีค่าเท่ากับเท่าใด [8]

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 3-5x & , \text{เมื่อ } x \neq -3 \\ -3x & , \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$ จงหาค่า $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ [18]

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}a & , \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \frac{x^3-1}{x^2-1} & , \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด [2]