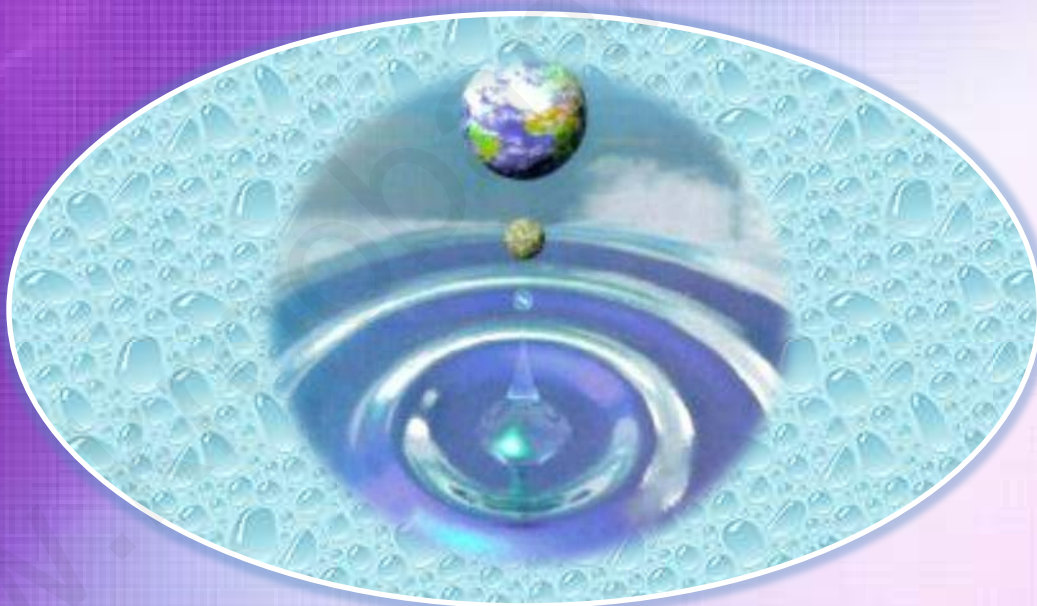


เอกสารประกอบการสอน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ค33201

เล่มที่ 1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6



นางสาวเสริมทรัพย์ ไกรดิษฐ์

ครู วิทยฐานะชำนาญการ

โรงเรียนพัทลุง

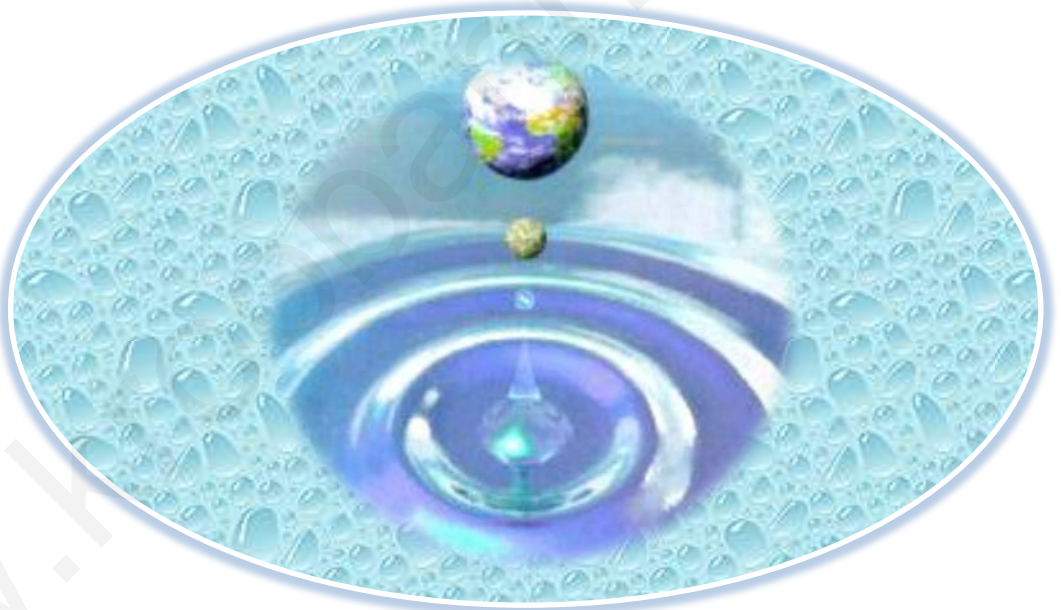
เขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 12

เอกสารประกอบการสอน

วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 ค33201

เล่มที่ 1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6



นางสาวเสริมทรัพย์ ไกรดิษฐ์

ครู วิทยฐานะชำนาญการ

โรงเรียนพัทลุง

เขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 12

คำนำ

เอกสารประกอบการสอน วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค33201 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อหา จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นเครื่องมือสำหรับปรับปรุง และพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นอกจากนี้ยังเป็นคู่มือในการสอนซ่อมเสริมแก่นักเรียนได้ด้วย โดยได้รวบรวมเนื้อหาที่เป็นความรู้จากตำรา และเอกสารทางวิชาการหลายเล่ม มีคำถามเพื่อทบทวนความรู้ความเข้าใจในบทเรียน และเมื่อเสร็จสิ้นกิจกรรมตามลำดับขั้นตอนแล้ว นักเรียนจะได้รับการทดสอบเพื่อประมวลผลการเรียนรู้ ซึ่งมีจำนวน 6 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

เล่มที่ 2 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม

เล่มที่ 3 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

เล่มที่ 4 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

เล่มที่ 5 เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง

เล่มที่ 6 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการสอน วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค33201 ชุดนี้ จะมีส่วนช่วยให้ให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ง่าย และชัดเจนยิ่งขึ้น มีพัฒนาการด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และคงเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจศึกษาที่จะนำไปใช้เป็นแนวทางในการปรับปรุงการเรียนการสอน และนวัตกรรมทางการศึกษา

หากพบข้อบกพร่องในการจัดทำ ตลอดจนทั้งการนำเสนอเนื้อหา และส่วนอื่นๆ ของเอกสารประกอบการสอนนี้ กรุณาแจ้งผู้จัดทำด้วย ทั้งนี้เพื่อจะได้นำข้อเสนอแนะไปปรับปรุงเอกสารประกอบการสอนให้ดีขึ้น และสมบูรณ์ยิ่งขึ้น จึงขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้ด้วย

เสริมทรัพย์ ไกรดิษฐ์

สารบัญ

| เรื่อง | หน้า |
|--|------|
| คำนำ..... | ก |
| สารบัญ..... | ๖ |
| คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับครู..... | 1 |
| คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับนักเรียน..... | 2 |
| เนื้อหาที่ต้องศึกษา..... | 3 |
| ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ..... | 4 |
| แบบทดสอบก่อนเรียน..... | 5 |
| ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง..... | 7 |
| แบบฝึกหัดที่ 1.1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง..... | 12 |
| ใบความรู้ที่ 1.2 เรื่อง ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ..... | 15 |
| แบบฝึกหัดที่ 1.2 เรื่อง ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ..... | 17 |
| แบบทดสอบหลังเรียน..... | 19 |
| ภาคผนวก..... | 21 |
| เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง..... | 22 |
| เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.2 เรื่อง ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ..... | 28 |
| เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน..... | 32 |
| ตารางบันทึกคะแนน แบบทดสอบ เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง..... | 33 |
| บรรณานุกรม..... | 34 |

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับครู
เอกสารประกอบการสอน วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค 33201
เล่มที่ 1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

เอกสารประกอบการสอน วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค33201 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน จัดทำขึ้นเพื่อช่วยในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ในรายวิชาคณิตศาสตร์ และเป็นสื่อการสอนที่นักเรียนสามารถใช้เป็นคู่มือเพื่อเรียนรู้ด้วยตนเอง ให้บรรลุวัตถุประสงค์ และมีประสิทธิภาพ ครูผู้สอนควรดำเนินการ ดังนี้

1. ครูผู้สอนต้องศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับคู่มือครู แผนการจัดการเรียนรู้ เพื่อให้ครู นำเอกสารประกอบการสอน ไปใช้จัดกิจกรรมได้อย่างมีประสิทธิภาพต่อไป
2. ครูผู้สอนเตรียมสื่อการสอนให้พร้อม
3. ก่อนดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูต้องเตรียมเอกสารประกอบการสอนให้ เพียงพอกับจำนวนนักเรียน
4. ก่อนดำเนินการปฏิบัติกิจกรรม ครูต้องชี้แจงให้นักเรียนรู้จักบทบาทหน้าที่ของนักเรียน ในการใช้เอกสารประกอบการสอน ดังนี้

- 4.1 ศึกษาสาระสำคัญ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ให้เข้าใจ
- 4.2 ทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ
- 4.3 ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้ และตอบคำถามในแบบฝึกหัดแต่ละเรื่อง แล้วตรวจ คำตอบในภาคผนวก บันทึกคะแนนของแต่ละแบบฝึกหัดที่ได้ไว้ในแบบสรุปผลการเรียนท้ายเล่ม
- 4.4 ในกรณีที่ตอบแบบฝึกหัดไม่ถูกต้องให้กลับไปทบทวนเนื้อหาในใบความรู้ อีกครั้งหนึ่ง
- 4.5 ทำแบบทดสอบหลังเรียน จำนวน 10 ข้อ
- 4.6 ตรวจคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียน จากเฉลยคำตอบ ในภาคผนวก
- 4.7 บันทึกคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ลงใน แบบสรุปผลการเรียนรู้ เพื่อทราบผลการเรียน และการพัฒนา
- 4.8 นักเรียนต้องซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่ดูเฉลยคำตอบก่อนโดยเด็ดขาด เพราะการ ดูเฉลยคำตอบจะไม่ทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการสอนสำหรับนักเรียน
เอกสารประกอบการสอน วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 รหัสวิชา ค33201
เล่มที่ 1 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

เอกสารเล่มนี้เป็นเอกสารประกอบการสอน และเป็นเอกสารที่นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำ ทำตามคำชี้แจงแต่ละขั้นตอนตั้งแต่ต้นจนจบ นักเรียนจะได้รับความรู้อย่างครบถ้วน โดยปฏิบัติตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ เพื่อให้ทราบว่าเมื่อจบบทเรียนแต่ละบทแล้ว นักเรียนสามารถเรียนรู้อะไรได้บ้าง
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน แล้วตรวจคำตอบที่เฉลยไว้ท้ายแบบฝึกหัดของแต่ละเรื่อง เพื่อให้รู้ว่ามีพื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องที่จะศึกษามากน้อยเพียงใด
3. ศึกษาเอกสาร และทำแบบฝึกหัดตามที่กำหนดไว้ เพื่อเป็นการทบทวนให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหายิ่งขึ้น
4. ทำแบบทดสอบหลังเรียนเพื่อวัดความรู้ ความเข้าใจอีกครั้งหนึ่ง
5. นักเรียนแต่ละคนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูเฉลยก่อนเรียน-หลังเรียน และแบบเฉลยแต่ละแบบฝึกหัด
6. หากนักเรียนต้องการศึกษาเพิ่มเติมสามารถศึกษาได้จากหนังสือ และเอกสารที่แสดงไว้ในบรรณานุกรมท้ายเล่ม

เนื้อหาที่ต้องศึกษา

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อัตราการเปลี่ยนแปลง

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบท

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

อนุพันธ์อันดับสูง

การประยุกต์ของอนุพันธ์

ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดๆ ของสิ่งที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถหาความเร็ว และความเร่งในขณะเวลาใดๆ
3. นักเรียนตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้

สาระสำคัญ

อัตราการเปลี่ยนแปลง

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ความเร็ว

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาจาก t_1 ไปถึง t_2 เท่ากับ $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$, $t_2 \neq t_1$

ความเร็วขณะ t ใดๆ เท่ากับ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$

แบบทดสอบก่อนเรียน
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 (ค33201) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

จุดประสงค์ที่ใช้ทดสอบ นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงได้

คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากตัวเลือก ก, ข, ค หรือ ง แล้วเขียนเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบ

2. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 20 นาที

1. กำหนด $f(x) = -\frac{3}{x}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วง x ถึง $x + h$ คือข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{3h}{x(x+h)}$

ข. $\frac{3}{xh(x+h)}$

ค. $\frac{-3}{x(x+h)}$

ง. $\frac{3}{x(x+h)}$

2. ถ้าปริมาตรของทรงกระบอก $V = \pi r^2 h$ เมื่อ h เป็นความสูงของทรงกระบอก ($h = 10$ เซนติเมตร) และ r เป็นรัศมีของทรงกระบอก อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ V เมื่อ r เปลี่ยนจาก 5.00 เซนติเมตรเป็น 5.20 เซนติเมตร เป็นเท่าไร

ก. 100π

ข. 100.2π

ค. 101π

ง. 102π

3. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{\frac{7}{3}x^3 - 12x^{\frac{5}{3}} - 24x^{\frac{4}{3}}}{x^2}$ ค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $x = 8$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

4. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $S = 49t^2$ เมื่อ S เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นเมตร และเวลา t วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ S เทียบกับ t เมื่อ t เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.5

ก. 444.5 เมตรต่อวินาที

ข. 436.5 เมตรต่อวินาที

ค. 416.5 เมตรต่อวินาที

ง. 405.5 เมตรต่อวินาที

5. ในการโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศมีสมการของการเคลื่อนที่ $S = 32t - 4t^2$ เมื่อ S แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ S เทียบกับ t ในช่วง $t = 1$ ถึง $t = 3$ มีค่ามากกว่าอัตรา
การเปลี่ยนแปลงของ S เทียบกับ t ในขณะ $t = 2.5$ วินาที

2) ลูกบอลจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง 64 เมตร จากพื้น

ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ถูก

ข. ข้อ 1 ถูก และ ข้อ 2 ผิด

ค. ข้อ 1 ผิด และ ข้อ 2 ถูก

ง. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ผิด

6. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ และ

a แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

b แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $a = 7$, $b = 10$

ข. $a = 10$, $b = 7$

ค. $a = \frac{7}{2}$, $b = 10$

ง. $a = \frac{7}{2}$, $b = 7$

7. กำหนด $f(t) = t^3 + 2t - 4$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(t)$ เมื่อเทียบกับ t

จาก $t = -1$ ถึง $t = 0$

ก. -3

ข. 3

ค. -10

ง. 10

8. กำหนด $y = x^2 - 2x + 8$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 4 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับหรือน้อยกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 4$

ก. เท่ากัน

ข. น้อยกว่าอยู่ 2

ค. มากกว่าอยู่ 4

ง. มากกว่าอยู่ 2

9. กำหนด $y = 3x - 8$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$

ก. 3

ข. $3h$

ค. x

ง. $h - 8$

10. กำหนด $f(t) = 2t^3 - 5t - 6$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(t)$ เมื่อเทียบกับ t

จาก $t = -2$ ถึง $t = -1$

ก. -15

ข. -5

ค. 6

ง. 9

ใบความรู้ที่ 1.1

เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของลูกบอลเมื่อปล่อยลูกบอลจากตึกสูงสู่พื้นดิน ถ้าปัญหาที่น่าสนใจคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ของลูกบอลว่าหลังจากปล่อยลูกบอลไปแล้ว ขณะวินาทีที่ 3 ลูกบอลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าใด เป็นต้น

โดยทั่วไปในการศึกษาอะไรสักอย่างมักจะมีความสัมพันธ์หรือมีปัจจัยที่เกี่ยวข้องกับอีกสิ่งหนึ่งเป็นพื้นฐาน เช่น

- ✚ ศึกษาระยะทางในการเคลื่อนที่กับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่
- ✚ ศึกษาปริมาตรของกรวยกับรัศมีของกรวย
- ✚ ศึกษาพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับความยาวด้าน

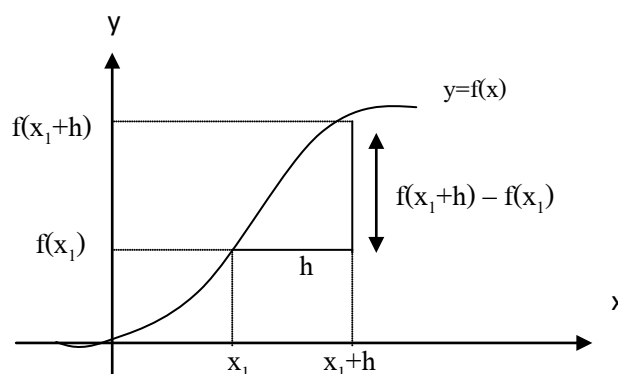
ซึ่งบางครั้งต้องการศึกษาการเปลี่ยนแปลงของสิ่งๆ หนึ่งเมื่อเทียบกับสิ่งหนึ่งที่มีความสัมพันธ์กัน เช่น พิจารณา

- ✚ การเปลี่ยนแปลงของระยะทางเมื่อเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงไป
- ✚ การเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกรวยเมื่อเทียบกับรัศมีของกรวยที่เปลี่ยนแปลงไป
- ✚ การเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเมื่อเทียบกับความยาวด้าน

ที่เปลี่ยนแปลงไป

ดังนั้นจึงกำหนดฟังก์ชันหรือความสัมพันธ์ของ y กับ x ด้วย $y = f(x)$ ให้ (x_1, y_1) เป็นจุดหนึ่งที่สอดคล้องกับ $y = f(x)$ นั่นคือ $y_1 = f(x_1)$ ให้ (x_2, y_2) เป็นอีกจุดหนึ่งที่สอดคล้องกับ $y = f(x)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ ดังนั้น $y_2 = f(x_2)$ เรียก $x_1 \neq x_2$ ว่าการเปลี่ยนแปลงของ x จาก x_1 ถึง x_2

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = f(x)$ ซึ่งหมายถึง y เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x



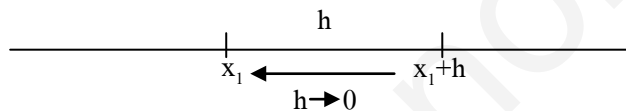
รูปที่ 1

ถ้า y มีความต่อเนื่องทุกค่าของ x อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง x_1+h คือ

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงนี้เรียกว่าความชัน (Slope) ของกราฟ กรณีที่กราฟเป็นเส้นตรงหรือ y มีการเปลี่ยนแปลงเป็นเชิงเส้นกับค่า x ความชันจะคงที่ แต่ถ้า y ไม่เป็นเชิงเส้นกับ x หรือกราฟเป็นเส้นโค้งดังรูปที่ 1 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ในช่วง x_1 ถึง x_1+h เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ย

แต่ถ้าให้ช่วงจาก x_1 ถึง x_1+h แคบเข้า นั่นคือให้ h เข้าใกล้ 0 อัตราการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวก็จะเข้าใกล้อัตราการเปลี่ยนแปลง ณ ตำแหน่ง $x = x_1$



นั่นคือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ $x = x_1$

กรณีทั่วไป

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y หรือ $f(x)$ ณ ค่า x ใดๆ

ซึ่งหมายถึง ความชันของกราฟหรือฟังก์ชันที่จุด x ใดๆ นั่นเอง

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x + h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x + h)$ แล้ว

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ คือ $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ x มีค่าใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดฟังก์ชัน $y = x^2 + 1$ จงหา

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x จาก $x = 2$ ถึง $x = 4$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$

วิธีทำ กำหนด $f(x) = x^2 + 1$

ก. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x จาก $x = 2$ ถึง $x = 4 = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2}$

$$= \frac{[4^2 + 1] - [2^2 + 1]}{2}$$
$$= \frac{17 - 5}{2}$$
$$= 6$$

ข. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะที่ x ใดๆ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - [x^2 + 1]}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

แทน $h = 0$

$$= 2x$$

ดังนั้น เมื่อ $x = 3$ อัตราการเปลี่ยนแปลง คือ $2(3) = 6$

ตัวอย่างที่ 3 วงกลมรัศมียาว r เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของความยาวรอบวงเทียบกับรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก $r = 5$ ถึง $r = 7$

วิธีทำ

ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม

$f(r)$ = ความยาวของเส้นรอบวง

จะได้ว่า $f(r) = 2\pi r$

$f(5) = 2\pi \times 5 = 10\pi$

$f(7) = 2\pi \times 7 = 14\pi$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของความยาวรอบวงเทียบกับรัศมี คือ

$$\begin{aligned} &= \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} \\ &= \frac{14\pi - 10\pi}{2} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของความยาวรอบวงเทียบกับรัศมี เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก $r = 5$ ถึง $r = 7$ คือ 2π

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดฟังก์ชัน $y = 2x^2 - x$ จงหา

- 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$
- 2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ

วิธีทำ 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย $= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \frac{[2(x+h)^2 - (x+h)] - [2x^2 - x]}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - x - h - 2x^2 + x}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 - h}{h} \\ &= 4x + 2h - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ เท่ากับ

$$4x + 2h - 1$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ } y \text{ เทียบกับ } x \text{ ขณะ } x \text{ มีค่าใดๆ} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - 1) \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ เท่ากับ $4x - 1$

แบบฝึกหัดที่ 1.1
เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกข้อ

1. กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อเทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนด $f(x) = 8x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ในช่วง x ถึง $x+h$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนด $f(x) = -\frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ทรงกลมรัศมียาว r เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของทรงกลมเทียบกับรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยาเปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{3}{t+1}$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t=2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. กรวยกลมตรงมีรัศมีของฐานเท่ากับครึ่งหนึ่งของส่วนสูง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาตรเทียบกับส่วนสูงขณะที่ส่วนสูงเป็น 3 เซนติเมตร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{เมื่อ } x \leq 3 \\ 6x - 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในกรณีที่

(1) $x = 0$

(2) $x = 3$

(3) $x = 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตั้งใจทำหน่อยนะ
ไม่จากเกินไป



ใบความรู้ที่ 1.2

เรื่อง ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

การเคลื่อนที่ของวัตถุ

ในเรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงจะเกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย โดยมีการกำหนดชื่อลงไปในการเคลื่อนที่ $s = f(t)$ หรือเขียนด้วย $s(t)$

s แทนด้วยระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุมีหน่วยเป็นเมตร

t เป็นเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นวินาที

ซึ่งระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ (s) มีความสัมพันธ์กับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ (t)

นักฟิสิกส์ได้กำหนดชื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของระยะทางเทียบกับเวลาจาก t_1 ถึง t_2

ด้วย “ความเร็วเฉลี่ย” ในช่วง t_1 ถึง t_2 ซึ่งเขียนแทนด้วย v_{ave} หรือ $v_{เฉลี่ย}$ ดังนี้

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาจาก } t_1 \text{ ถึง } t_2 \text{ เท่ากับ } \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

สำหรับความเร็วขณะเวลา t ใดๆ ย่อมน้อยกว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่เริ่มนับจากเวลานั้นเป็นต้นไป เช่นความเร็วขณะวินาทีที่ 3 ย่อมน้อยกว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 3 ถึงวินาทีที่ 4 ดังนี้

$$\text{ความเร็วขณะ } t \text{ ใดๆ เท่ากับ } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = 5t^2$ เมื่อ s เป็นระยะทางที่วัดจากจุดเริ่มต้น (หน่วยเป็นเมตร) t เป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ (หน่วยเป็นวินาที) จงหาความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 3 ถึงวินาทีที่ 5

วิธีทำ ความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 3 ถึงวินาทีที่ 5

$$= \frac{5(5^2) - 5(3^2)}{5 - 3}$$

$$= \frac{125 - 45}{2}$$

$$= 40 \text{ เมตร/วินาที}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = 5t^2$ เมื่อ s เป็นระยะทางที่วัดจากจุดเริ่มต้น (หน่วยเป็นเมตร) t เป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ (หน่วยเป็นวินาที) จงหาความเร็วขณะเวลา t ใดๆ และความเร็วขณะเวลา $t = 3$

วิธีทำ

จาก $S = f(t)$

ดังนั้น $f(t) = 5t^2$

$f(t+h) = 5(t+h)^2$

1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

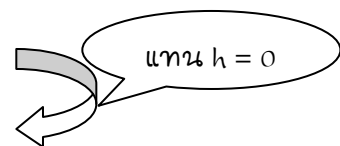
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(t+h)^2 - 5t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 10th + 5h^2 - 5t^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (10t + 5h)$$

$$= 10t \text{ เมตร/วินาที}$$



2) ความเร็วขณะเวลา $t = 3$

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ คือ $10t$ เมตร/วินาที

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา $t = 3$ คือ

$$10(3) = 30 \text{ เมตร/วินาที}$$

แบบฝึกหัดที่ 1.2

เรื่อง ความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกข้อ

1. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = t^2 - 3t$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที
จงหาความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t + h$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = 2t^3 - 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที
จงหาความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. กำหนดให้ $s = t^2 - 3t + 8$ จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. เมื่อเวลา t วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 4t^2 + 2t - 3$ เมตร จงหา

1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

2) ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 5 วินาที ถึง 7 วินาที

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. ถ้าอนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $5 + 3t - t^2$ เมตร โดยใช้เวลา t วินาที จงหา

1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

2) ความเร็วขณะเวลา $t = 2$

.....

.....

.....

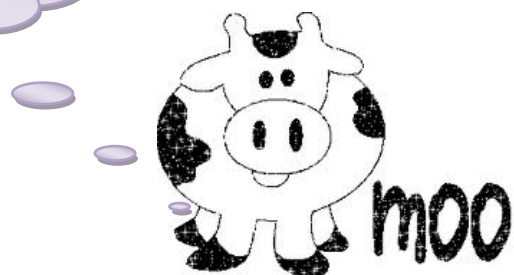
.....

.....

.....

.....

คิดซักนิดนะ



แบบทดสอบหลังเรียน
วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 (ค33201) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

จุดประสงค์ที่ใช้ทดสอบ นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงได้

คำชี้แจง 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวจากตัวเลือก ก, ข, ค หรือ ง แล้วเขียนเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบ

2. แบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 20 นาที

1. กำหนด $f(x) = -\frac{3}{x}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วง x ถึง $x + h$ คือข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{3h}{x(x+h)}$

ข. $\frac{3}{xh(x+h)}$

ค. $\frac{-3}{x(x+h)}$

ง. $\frac{3}{x(x+h)}$

2. ถ้าปริมาตรของทรงกระบอก $V = \pi r^2 h$ เมื่อ h เป็นความสูงของทรงกระบอก ($h = 10$ เซนติเมตร) และ r เป็นรัศมีของทรงกระบอก อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ V เมื่อ r เปลี่ยนจาก 5.00 เซนติเมตรเป็น 5.20 เซนติเมตร เป็นเท่าไร

ก. 100π

ข. 100.2π

ค. 101π

ง. 102π

3. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^{\frac{7}{2}} - 12x^{\frac{5}{2}} - 24x^{\frac{4}{2}}}{x^2}$ ค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ เมื่อ $x = 8$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

4. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $S = 49t^2$ เมื่อ S เป็นระยะทางของการเคลื่อนที่มีหน่วยเป็นเมตร และเวลา t วินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ S เทียบกับ t เมื่อ t เปลี่ยนจาก 4 เป็น 4.5

ก. 444.5 เมตรต่อวินาที

ข. 436.5 เมตรต่อวินาที

ค. 416.5 เมตรต่อวินาที

ง. 404.5 เมตรต่อวินาที

5. ในการโยนลูกบอลขึ้นไปในอากาศมีสมการของการเคลื่อนที่ $S = 32t - 4t^2$ เมื่อ S แทน ระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ S เทียบกับ t ในช่วง $t = 1$ ถึง $t = 3$ มีค่ามากกว่าอัตรา การเปลี่ยนแปลงของ S เทียบกับ t ในขณะ $t = 2.5$ วินาที

2) ลูกบอลจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง 64 เมตร จากพื้น

ก. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ถูก

ข. ข้อ 1 ถูก และ ข้อ 2 ผิด

ค. ข้อ 1 ผิด และ ข้อ 2 ถูก

ง. ข้อ 1 และ ข้อ 2 ผิด

6. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ และ

a แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

b แทน อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $a = 7$, $b = 10$

ข. $a = 10$, $b = 7$

ค. $a = \frac{7}{2}$, $b = 10$

ง. $a = \frac{7}{2}$, $b = 7$

7. กำหนด $f(t) = t^3 + 2t - 4$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(t)$ เมื่อเทียบกับ t

จาก $t = -1$ ถึง $t = 0$

ก. -3

ข. 3

ค. -10

ง. 10

8. กำหนด $y = x^2 - 2x + 8$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 4 มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับหรือน้อยกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 4$

ก. เท่ากัน

ข. น้อยกว่าอยู่ 2

ค. มากกว่าอยู่ 4

ง. มากกว่าอยู่ 2

9. กำหนด $y = 3x - 8$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย ของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$

ก. 3

ข. $3h$

ค. x

ง. $h - 8$

10. กำหนด $f(t) = 2t^3 - 5t - 6$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(t)$ เมื่อเทียบกับ t

จาก $t = -2$ ถึง $t = -1$

ก. -15

ข. -5

ค. 6

ง. 9

ภาคผนวก

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1

เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกข้อ

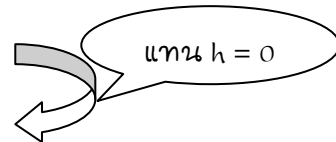
1. กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อเทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

วิธีทำ $f(x) = x^2 + 2x - 2$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 2(x+h) - 2$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อเทียบกับ x ขณะ x ใด ๆ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 2(x+h) - 2] - [x^2 + 2x - 2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 2 - x^2 - 2x + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 2) \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$



2. กำหนด $f(x) = 8x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$ เมื่อ $x = 1$ ถึง $x = 3$

$$\begin{aligned} \frac{f(3) - f(1)}{h} &= \frac{(8 \times 3^2 + 1) - (8 \times 1^2 + 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{73 - 9}{2} \\ &= 32 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x จาก $x = 1$ ถึง $x = 3$ เท่ากับ 32

3. กำหนดให้ $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$

วิธีทำ $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$

$$f(x+h) = 1 - \frac{1}{x+h-1}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\left(1 - \frac{1}{x+h-1}\right) - \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)}{h} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{x+h-1} - 1 + \frac{1}{x-1}}{h} \\ &= \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+h-1}}{h} \\ &= \frac{\frac{(x+h-1) - (x-1)}{(x-1)(x+h-1)}}{h} \\ &= \frac{\frac{h}{(x-1)(x+h-1)}}{h} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+h-1)} \end{aligned}$$

4. กำหนด $f(x) = -\frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$

วิธีทำ $f(x) = -\frac{1}{x}$

$$f(x+h) = -\frac{1}{x+h}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\left(-\frac{1}{x+h}\right) - \left(-\frac{1}{x}\right)}{h} \\ &= \frac{-\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x}}{h} \\ &= \frac{\frac{-x + (x+h)}{x(x+h)}}{h} \\ &= \frac{h}{h x(x+h)} \\ &= \frac{1}{x(x+h)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{h}{x(x+h)} \\
 &= \frac{1}{x(x+h)}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง $x+h$ เท่ากับ $\frac{1}{x(x+h)}$

5. ทรงกลมรัศมียาว r เซนติเมตร จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของทรงกลมเทียบกับรัศมี ขณะรัศมียาว r เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม

$f(r)$ แทน ปริมาตรของทรงกลม

$$\text{จะได้ว่า } f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรงกลมเทียบกับรัศมี

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rh + h^2) \\
 &= \frac{4}{3}\pi(3r^2) \\
 &= 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

6. ปริมาณของสาร N กรัม ในน้ำยาเปลี่ยนไปตามเวลา t ตามสมการ $N = \frac{3}{t+1}$ เมื่อ t มีหน่วย

เป็นนาฬิกา จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 2$

วิธีทำ ให้ $N = f(t)$

$$\text{ดังนั้น } f(t) = \frac{3}{t+1}$$

$$f(t+h) = \frac{3}{t+h+1}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ t คือ

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{t+h+1} - \frac{3}{t+1} \right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3t+3-3t-3h-3}{h(t+h+1)(t+1)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3)}{(t+h+1)(t+1)} \\
 &= \frac{-3}{(t+1)^2} \quad \text{กรัณ/นาที่}
 \end{aligned}$$

แทน $h = 0$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ N เทียบกับ t ขณะ $t = 2$ เท่ากับ $\frac{-3}{(t+1)^2} = -\frac{1}{3}$

7. กรวยกลมตรงมีรัศมีของฐานเท่ากับครึ่งหนึ่งของส่วนสูง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาตรเทียบกับส่วนสูงขณะที่ส่วนสูงเป็น 3 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของฐานกรวยกลม

กรวยกลมสูง h

$$\text{กำหนด } r = \frac{h}{2}$$

ให้ $f(h)$ แทนปริมาตรของกรวยกลม

$$\begin{aligned}
 f(h) &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 h \\
 &= \frac{1}{12} \pi h^3 \\
 f(h+4h) &= \frac{1}{12} \pi (h+4h)^3
 \end{aligned}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับส่วนสูง คือ

$$\begin{aligned}\lim_{4h \rightarrow 0} \frac{f(h+4h) - f(h)}{4h} &= \lim_{4h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{12}\pi(h+4h)^3 - \frac{1}{12}\pi(h)^3}{4h} \\ &= \frac{1}{4}\pi h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรเทียบกับส่วนสูงขณะที่ส่วนสูงเป็น 3 เซนติเมตร} &= \frac{1}{4}\pi(3^2) \\ &= \frac{9}{4}\pi \text{ ลบ.ซม./ซม.}\end{aligned}$$

8. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{เมื่อ } x \leq 3 \\ 6x - 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในกรณีที่

(1) $x = 0$ (2) $x = 3$ (3) $x = 5$

วิธีทำ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ใดๆ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2 + 5) - (0^2 + 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= 0\end{aligned}$$

(แทน $h = 0$)

(2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$ คือ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h)^2 + 5 - (3^2 + 5)}{h} &\text{ และ } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[6(3+h) - 2] - (3^2 + 5)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} [6+h] &\text{ และ } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{6h+2}{h}\end{aligned}$$

แต่ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + 2}{h}$ ไม่มีลิมิต

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x=3$ ไม่มี

(3) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะที่ $x = 5$ คือ

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[6(5+h) - 2] - [6(5) - 2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\ &= 6\end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.2

เรื่อง ความเร็วเฉลี่ยและความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำลงในที่ว่างที่กำหนดให้ทุกข้อ

1. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = t^2 - 3t$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

จงหาความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t+h$

วิธีทำ จาก $s = t^2 - 3t$

$$\text{ดังนั้น } f(t) = t^2 - 3t$$

$$f(t+h) = (t+h)^2 - 3(t+h)$$

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t+h$

$$\begin{aligned} &= \frac{f(t+h) - f(t)}{t+h-t} \\ &= \frac{[(t+h)^2 - 3(t+h)] - [t^2 - 3t]}{h} \\ &= \frac{t^2 + 2th + h^2 - 3t - 3h - t^2 + 3t}{h} \\ &= \frac{2th + h^2 - 3h}{h} \\ &= 2t + h - 3 \text{ เมตร/วินาที} \end{aligned}$$

2. กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s = 2t^3 - 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหา

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

วิธีทำ จาก $s = 2t^3 - 4$

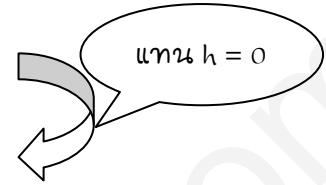
$$\text{ดังนั้น } f(t) = 2t^3 - 4$$

$$f(t+h) = 2(t+h)^3 - 4$$

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2(t+h)^3 - 4] - [2t^3 - 4]}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2t^3 + 6t^2h + 6th^2 + 2h^3 - 4 - 2t^3 + 4}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6t^2h + 6th^2 + 2h^3}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (6t^2 + 6th + 2h^2) \\
&= 6t^2 \text{ เมตร/วินาที}
\end{aligned}$$



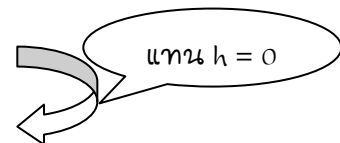
3. กำหนดให้ $s = t^2 - 3t + 8$ จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

วิธีทำ จาก $s = t^2 - 3t + 8$

$$\text{ดังนั้น } f(t) = t^2 - 3t + 8$$

$$f(t+h) = (t+h)^2 - 3(t+h) + 8$$

$$\begin{aligned}
\text{ความเร็วขณะเวลา } t \text{ ใดๆ} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(t+h)^2 - 3(t+h) + 8] - [t^2 - 3t + 8]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^2 + 2th + h^2 - 3t - 3h + 8 - t^2 + 3t - 8}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2th + h^2 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2t + h - 3) \\
&= 2t - 3 \text{ เมตร/วินาที}
\end{aligned}$$



4. เมื่อเวลา t วินาที วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s = 4t^2 + 2t - 3$ เมตร จงหา

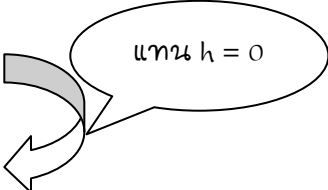
1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

2) ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 5 วินาที ถึง 7 วินาที

วิธีทำ จาก $s = 4t^2 + 2t - 3$

ดังนั้น $f(t) = 4t^2 + 2t - 3$

$$f(t+h) = 4(t+h)^2 + 2(t+h) - 3$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ ความเร็วขณะเวลา } t \text{ ใดๆ} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(t+h)^2 + 2(t+h) - 3] - [4t^2 + 2t - 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4t^2 + 8th + 4h^2 + 2t + 2h - 3 - 4t^2 - 2t + 3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8th + 4h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (8t + 4h + 2) \\ &= 8t + 2 \quad \text{เมตร/วินาที} \end{aligned}$$


2) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงในช่วง 5 วินาที ถึง 7 วินาที

$$\begin{aligned} &= \frac{[4(7)^2 + 2(7) - 3] - [4(5)^2 + 2(5) - 3]}{7 - 5} \\ &= \frac{207 - 107}{2} \\ &= 50 \text{ เมตร/วินาที} \end{aligned}$$

5. ถ้าอนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $5 + 3t - t^2$ เมตร โดยใช้เวลา t วินาที จงหา

1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

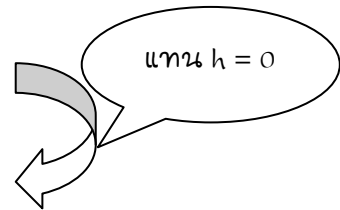
2) ความเร็วขณะเวลา $t = 2$

วิธีทำ จาก $s = 5 + 3t - t^2$

$$\text{ดังนั้น } f(t) = 5 + 3t - t^2$$

$$f(t+h) = 5 + 3(t+h) - (t+h)^2$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ ความเร็วขณะเวลา } t \text{ ใดๆ} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5 + 3(t+h) - (t+h)^2] - [5 + 3t - t^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5 + 3t + 3h - t^2 - 2th - h^2 - 5 - 3t + t^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 2th - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 2t - h) \\ &= 3 - 2t \quad \text{เมตร/วินาที} \end{aligned}$$



2) ความเร็วขณะเวลา $t = 2$

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ คือ $3 - 2t$ เมตร/วินาที

ดังนั้น ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ คือ

$$3 - 2(2) = -1 \quad \text{เมตร/วินาที}$$

เฉลยแบบทดสอบ
ก่อนเรียน – หลังเรียน

| แบบทดสอบก่อนเรียน | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|
| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
| 1 | | | | × |
| 2 | | | | × |
| 3 | | × | | |
| 4 | | | × | |
| 5 | × | | | |
| 6 | × | | | |
| 7 | | × | | |
| 8 | | | × | |
| 9 | × | | | |
| 10 | | | | × |

| แบบทดสอบหลังเรียน | | | | |
|-------------------|---|---|---|---|
| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
| 1 | | | | × |
| 2 | | | | × |
| 3 | | × | | |
| 4 | | | × | |
| 5 | × | | | |
| 6 | × | | | |
| 7 | | × | | |
| 8 | | | × | |
| 9 | × | | | |
| 10 | | | | × |

ตารางบันทึกคะแนน
แบบทดสอบ เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง

ชื่อ.....
 ชั้น..... เลขที่.....

| แบบทดสอบ | คะแนนเต็ม | คะแนนที่ได้ | หมายเหตุ |
|------------|-----------|-------------|----------|
| ก่อนเรียน | 10 | | |
| หลังเรียน | 10 | | |
| ผลการพัฒนา | | | |

บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล และธณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2548.

กมล เอกไทยเจริญ. แคลคูลัส 1. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง, 2537.

กวิยา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2555.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คู่มือสาระการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 6. กรุงเทพฯ : พ.ศ. พัฒนา, 2555.

จรัส อินสม. คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพฯ : แม็ค, 2547.

จีระ เจริญสุขวิมล และวินิจ วงศ์รัตนะ. สรุปสูตรหลัก & สูตร คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 – 6. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง จำกัด, ไม่ปรากฏปีที่พิมพ์.

ธนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล. คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4, 5, 6) เล่ม 6 สำหรับ
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง, 2537

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือครูสาระ
การเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.

สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชพรรณ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ด
พับลิชชิง จำกัด, ไม่ปรากฏปีที่พิมพ์.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา. แคลคูลัส 1 ฉบับเสริมประสบการณ์. กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์, 2555.