

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จัดทำขึ้นเพื่อเป็นสื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้ประสบผลสำเร็จ ประกอบด้วย แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และแบบทดสอบหลังเรียน นักเรียนสามารถศึกษาและเรียนรู้ได้ด้วยตนเอง ตามคำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ โดยครูเป็นผู้คอยอำนวยความสะดวกให้คำปรึกษา ตลอดจนติดตามผลการศึกษา แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ทั้งหมด จำนวน 14 ชุด ดังนี้

- ชุดที่ 1 1 LIMIT ของฟังก์ชัน
- ชุดที่ 2 2 การหา LIMIT ของฟังก์ชัน
- ชุดที่ 3 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
- ชุดที่ 4 4 อัตราการเปลี่ยนแปลง
- ชุดที่ 5 5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยาม
- ชุดที่ 6 6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- ชุดที่ 7 7 ความชันของเส้นโค้ง
- ชุดที่ 8 8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- ชุดที่ 9 9 อนุพันธ์อันดับสูง
- ชุดที่ 10 10 การประยุกต์ของอนุพันธ์
- ชุดที่ 11 11 ปริยานุพันธ์
- ชุดที่ 12 12 ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- ชุดที่ 13 13 ปริพันธ์จำกัดเขต
- ชุดที่ 14 14 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้ เป็นชุดที่ 1 LIMIT ของฟังก์ชัน ซึ่งผู้จัดทำหวังว่าจะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้มีความสนใจ ในการนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ทางการศึกษาต่อไป

ขอขอบคุณผู้เชี่ยวชาญ ผู้บริหารโรงเรียนนารีรัตน์จังหวัดแพร่ บุคลากรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์โรงเรียนนารีรัตน์จังหวัดแพร่ ที่ให้คำชี้แนะ ส่งเสริม และสนับสนุน การจัดทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

สศศรี แสงแก้ว

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	๖
คำชี้แจงสำหรับครู	1
คำชี้แจงสำหรับครู	2
มาตรฐานการเรียนรู้	3
ผลการเรียนรู้	3
จุดประสงค์การเรียนรู้	4
แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 1 ผลิตของฟังก์ชัน	5
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	7
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ผลิตของฟังก์ชัน	8
แบบฝึกทักษะที่ 1.1	18
แบบฝึกทักษะที่ 1.2	20
แบบฝึกทักษะที่ 1.3	28
แบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 1 ผลิตของฟังก์ชัน	30
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	32
ภาคผนวก	33
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 1 ผลิตของฟังก์ชัน	34
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1	35
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2	37
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3	45
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 1 ผลิตของฟังก์ชัน	47
เอกสารอ้างอิง	48



คำชี้แจงสำหรับครู

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ครูผู้สอนเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์ ครูผู้สอนจึงควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะ ดังนี้

1. ครูต้องศึกษาแบบฝึกทักษะและอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกชุดก่อนการใช้งาน
2. ครูตรวจแบบฝึกทักษะให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผลและประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอนและวิธีสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะอย่างชัดเจน และประโยชน์ที่จะได้รับจากการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะ
5. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียน ในการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะให้เข้าใจ และเน้นย้ำเรื่องความซื่อสัตย์โดยไม่ลอกเพื่อน ไม่ให้เพื่อนทำ หรือไม่ดูเฉยก่อนลงมือทำด้วยตนเอง
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อประเมินความรู้เดิมของนักเรียน
7. แจกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
8. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1
9. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามเฉลย
10. ครูสังเกตความตั้งใจของนักเรียน ความสนใจในการเรียน การทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มของนักเรียนทุกกลุ่มอย่างใกล้ชิด ถ้ากลุ่มใดมีปัญหาครูจะได้ทำการช่วยเหลือได้ทันที
11. การจัดชั้นเรียนแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็น 6 กลุ่มๆละ 7 คนคละเพศและความสามารถ คือนักเรียนที่เรียนเก่ง 2 คน ปานกลาง 3 คน และนักเรียนที่เรียนอ่อน 2 คน (ใช้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในภาคเรียนที่ 1) ปฏิบัติกิจกรรมร่วมกัน สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน มีการยอมรับซึ่งกันและกัน สำนึกในความรับผิดชอบร่วมกัน เพื่อความสำเร็จของตัวเองและกลุ่ม
12. เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะของนักเรียนแต่ละคนแต่ละกลุ่ม อาจจะไม่เท่ากัน ครูควรยืดหยุ่นตามความเหมาะสมและสถานการณ์
13. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
14. การสรุปบทเรียนควรเป็นกิจกรรมร่วมกันของนักเรียนทุกกลุ่ม หรือแต่ละกลุ่ม ส่งตัวแทนมาร่วมอภิปรายเรื่องที่เรียนมา



คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

ในการศึกษาโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น สำหรับนักเรียน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นักเรียนควรปฏิบัติตามคำแนะนำ ดังนี้

1. อ่านคำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะ และคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน
ให้เข้าใจก่อนลงมือทำงานหรือทำการศึกษาทุกครั้ง
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อประเมินความรู้เดิม
3. ศึกษาเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 ถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ให้ศึกษา
เนื้อหาใหม่อีกครั้ง ศึกษาตัวอย่าง หรือปรึกษาครูผู้สอน
4. เปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกทักษะตามเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ จากนั้นร่วมกันสรุป
องค์ความรู้ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางและอธิบายเพิ่มเติม
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของตนเองจากการศึกษาแบบฝึก
ทักษะ คณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 จบแล้ว
6. ในการทำแบบฝึกทักษะ แบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน ให้นักเรียนพยายามทำด้วย
ความตั้งใจและมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองให้มากที่สุด โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน
7. ประเมินผลว่านักเรียนผ่านเกณฑ์หรือไม่
 - ผ่านเกณฑ์การประเมินให้ศึกษาแบบฝึกทักษะชุดต่อไป
 - ไม่ผ่านเกณฑ์การประเมินให้ย้อนกลับไปศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหาจาก
ใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเองใหม่



มาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 4 พืชคณิต

- มาตรฐาน ค4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน
- มาตรฐาน ค4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟและตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่นๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะ/ กระบวนการทางคณิตศาสตร์

- มาตรฐาน ค6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

หาสมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวาของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ในรูปตาราง
3. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวาของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ในรูป กราฟ
4. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวาของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ในรูปสมการ

ด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ (P)

1. นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา
2. นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล
3. นักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A)

1. นักเรียนมีวินัย
2. นักเรียนมีความใฝ่เรียนรู้
3. นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต
4. นักเรียนมีความมุ่งมั่นในการทำงาน

แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่อง แคลคูลัส

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค30206

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

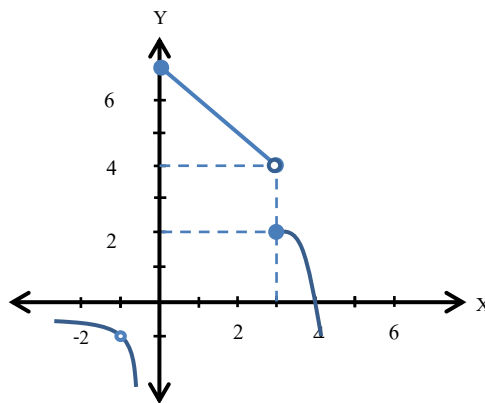
ชุดที่ 1 ติ่มของฟังก์ชัน

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

เวลา 15 นาที

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ทับตัวอักษร ก, ข, ค หรือ ง หน้าคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จากกราฟ $y = f(x)$ ข้อใดต่อไปนี้ **สรุปไม่ถูกต้อง**



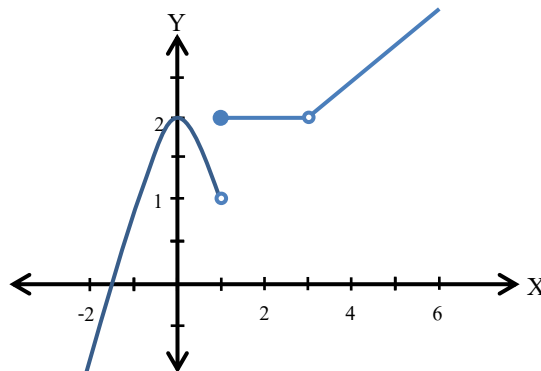
ก. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$

ข. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$

ค. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ง. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้

กราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 2 – 5



2. ค่าของ $f(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -6

ข. -2

ค. 2

ง. 6

3. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. 3

4. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 4 ข. 2

ค. 0 ง. หาค่าไม่ได้

5. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 4 ข. 2

ค. 1 ง. หาค่าไม่ได้

6. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 2 - x & ; x > 2 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. 4

7. จากฟังก์ชัน ข้อ 6 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1

ค. 4 ง. หาค่าไม่ได้

8. จากฟังก์ชัน ข้อ 6 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1

ค. 4 ง. หาค่าไม่ได้

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & ; x \leq 2 \\ 1 & ; 2 < x \leq 4 \\ 9 - 2x & ; x > 4 \end{cases}$ และค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. หาค่าไม่ได้

10. จากฟังก์ชันข้อ 9 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1

ค. 4 ง. หาค่าไม่ได้

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน
ชุดที่ 1 ลิ้มิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

การประเมินผล

แบบทดสอบ	คะแนน	ระดับคุณภาพ
ก่อนเรียน	_____	_____

เกณฑ์การประเมิน	
คะแนน	ระดับคุณภาพ
8 – 10	ดีมาก
7	ดี
6	พอใช้
0 – 5	ปรับปรุง

ผ่าน

ไม่ผ่าน

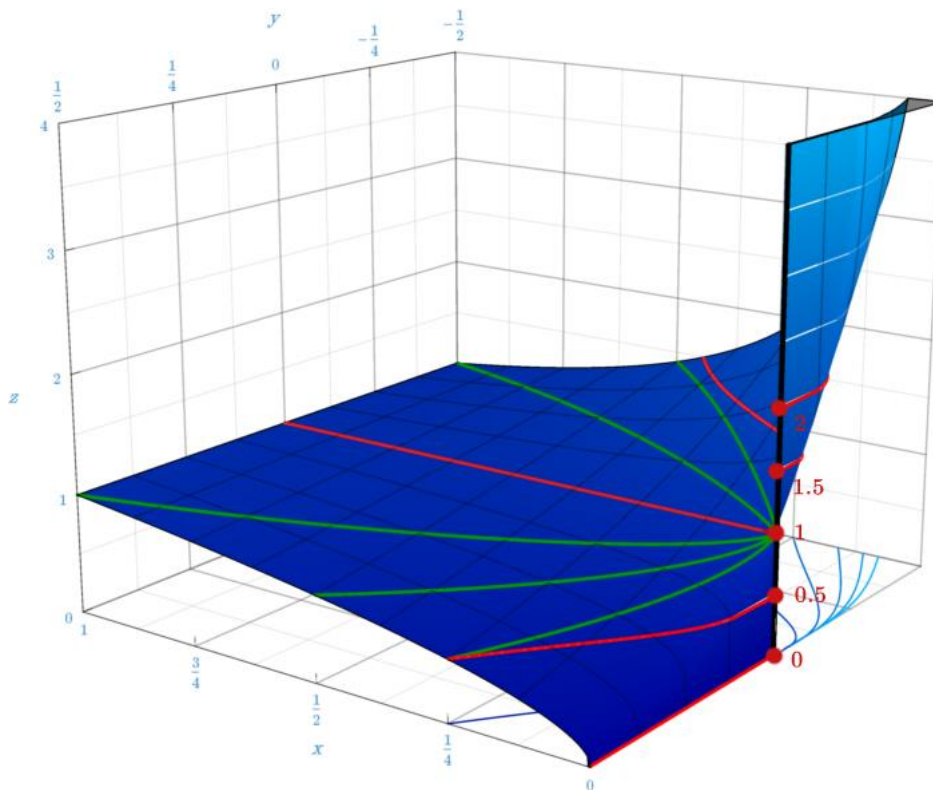


ใบความรู้ที่ 1

เรื่อง LIMIT ของฟังก์ชัน

ความหมายของลิมิต

ในชีวิตประจำวันมีการใช้คำว่า ลิมิตของปริมาณ ในแง่ที่เป็นขีดจำกัด หรือค่าขอบเขต 1 ค่าของปริมาณเหล่านั้น เช่น รถคันนี้มีลิมิตความเร็ว หรือวิ่งได้สูงสุด 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือคนอ้วนคนนี้กินจุก็จริง แต่มีลิมิตอาหารไม่เกิน 7 จาน (กินได้ไม่เกิน 7 จาน) หรือรอบเครื่องยนต์มีลิมิตได้ 1000 รอบต่อวินาที ต่ำกว่านั้นเครื่องยนต์จะสั่น ตัวยาบางชนิดเก็บในตู้เย็นไม่ได้ จะเก็บอุณหภูมิอย่างต่ำ 14 องศาเซลเซียส ฯลฯ ค่าที่เป็นลิมิตมี 2 ลักษณะ คือ เป็นค่าขอบเขตบนกับเป็นค่าขอบเขตล่างในทางแคลคูลัสบ่อยครั้งใช้ลิมิตในแง่ที่เป็นที่กั้น ทำนองเดียวกับตัวอย่างในชีวิตประจำวัน แต่เป็นการใช้กับปริมาณที่เป็นค่าของฟังก์ชัน ซึ่งต่างสถานการณ์ตรงที่เป็นลิมิตที่เกี่ยวข้องกับการแปรค่าตัวแปรอิสระเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง (เพราะค่าฟังก์ชัน เช่น $f(x)$ ขึ้นอยู่กับค่า x) เป็นค่าลิมิตในภาวะเช่นนั้น และใช้ได้กว้างขึ้น เช่น กล่าวถึงค่าลิมิต เมื่อมีค่าลิมิตที่เท่ากัน ขณะที่ตัวแปรเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งในทิศทางที่ต่างกัน



ลิมิตของฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ เราพิจารณาว่า ค่าของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ เซตจำนวนจริงจะเข้าใกล้ค่าใด ขณะที่ x เข้าใกล้จำนวนจริงจำนวนหนึ่ง

บทนิยาม กำหนดให้ a และ L เป็นจำนวนจริงและ f เป็นฟังก์ชัน

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แทนลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a หมายความว่า

“ถ้า x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ”

สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ แทนลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หมายความว่า

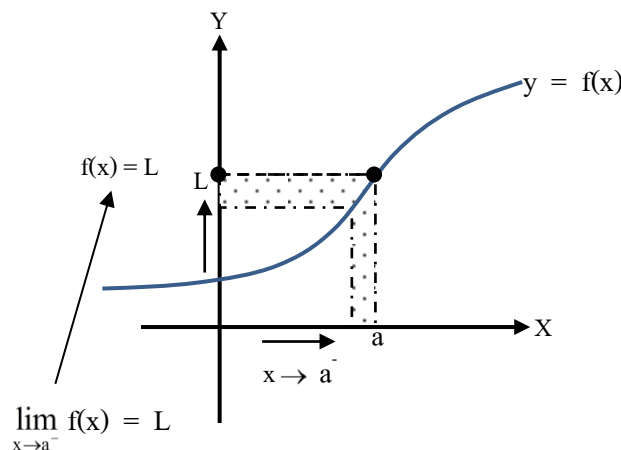
“ถ้า x เข้าใกล้ a และ $x < a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ” เรียกลิมิตนี้ว่า ลิมิตทางซ้ายของ f

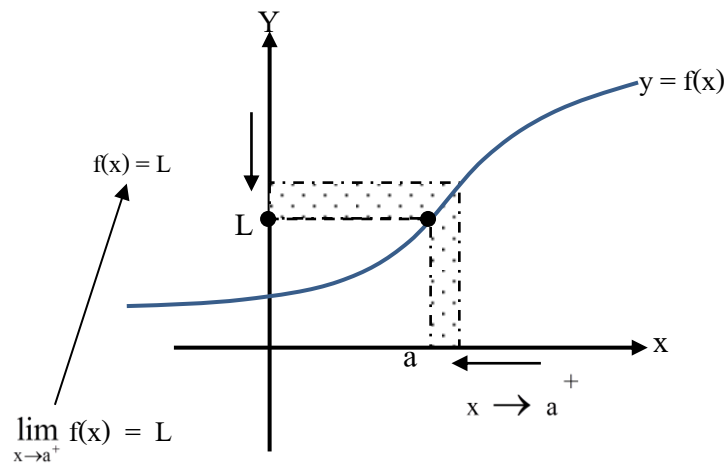
สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ แทนลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หมายความว่า

“ถ้า x เข้าใกล้ a และ $x > a$ แล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ L ” เรียกลิมิตนี้ว่า ลิมิตทางขวาของ f

ถ้า f มีลิมิตทางซ้ายไม่เท่ากับลิมิตทางขวา สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ (หรือไม่มีลิมิต)

พิจารณารูปภาพลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวาของ f





ก่อนอื่นจะเริ่มด้วยการพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$ ดังตารางต่อไปนี้

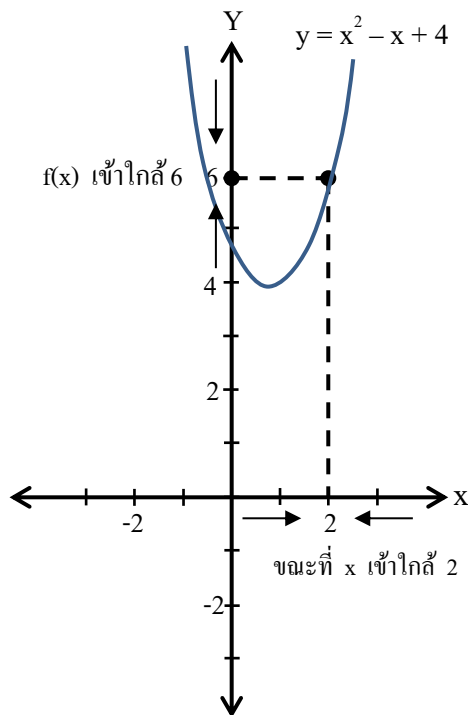
ตารางที่ 1 แสดงค่าของ $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แต่ $x \neq 2$

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	4.00000	3.0	10.000000
1.5	4.750000	2.5	7.750000
1.8	5.440000	2.2	6.640000
1.9	5.710000	2.1	6.310000
1.95	5.852500	2.05	6.152500
1.99	5.970100	2.01	6.030300
1.995	5.985025	2.005	6.015025
1.999	5.997001	2.001	6.003001

ข้อสังเกต ถ้า $x = 2$ สามารถหาค่า $f(x)$ ได้ คือ $f(2) = 2^2 - 2 + 4 = 6$

จากตารางจะเห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 เข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น จาก 4 เข้าใกล้ 6 ขณะเดียวกัน เมื่อ x มีค่าลดลงจาก 3 และเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าลดลงจาก 10 และเข้าใกล้ 6 ซึ่งถ้าพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชัน f จะเห็นสมบัตินี้เช่นกัน

เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ ได้ดังรูป 1.1



รูป 1.1

จากตารางที่ 1 และกราฟของฟังก์ชัน f ในรูป 1.1 จะเห็นว่า ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 (นั่นคือ เมื่อ $x < 2$ และเมื่อ $x > 2$) ค่าของ $f(x)$ จะเข้าใกล้ 6 ในกรณีนี้จะกล่าวว่า

“ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x + 4$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2 เท่ากับ 6” เขียนแทนด้วย

สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$ หรือ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 4) = 6$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 โดยเติมค่า $f(x)$ ลงในตาราง
วิธีทำ

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.5	6.5	2.5	7.5
1.9	6.9	2.1	7.1
1.95	6.95	2.05	7.05
1.99	6.99	2.01	7.01
1.995	6.995	2.005	7.005
1.999	6.999	2.001	7.001

$$\begin{array}{llll}
 \text{จากตาราง} & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) & = & 7 \\
 & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) & = & 7 \\
 \text{เนื่องจาก} & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) & = & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \\
 \text{ดังนั้น} & \lim_{x \rightarrow 2} +5 & = & 7
 \end{array}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 1$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 3 โดยเติมค่า $f(x)$ ลงในตาราง
วิธีทำ

$x < 3$		$x > 3$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.5	4	3.5	6
2.9	4.8	3.1	5.2
2.95	4.9	3.05	5.1
2.99	4.98	3.01	5.02
2.995	4.99	3.005	5.01
2.999	4.998	3.001	5.002

จากตาราง $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 1 = 5$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} & , x \neq 2 \\ 0 & , x = 2 \end{cases}$ ขณะที่ x เข้าใกล้ 2 โดยเติมค่า $f(x)$

ลงในตาราง

วิธีทำ

$x < 2$		$x > 2$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.5	-7	2.5	9
1.9	-39	2.1	41
1.95	-79	2.05	81
1.99	-399	2.01	401
1.995	-799	2.005	801
1.999	-3999	2.001	4001

จากตาราง $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4000$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4000$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

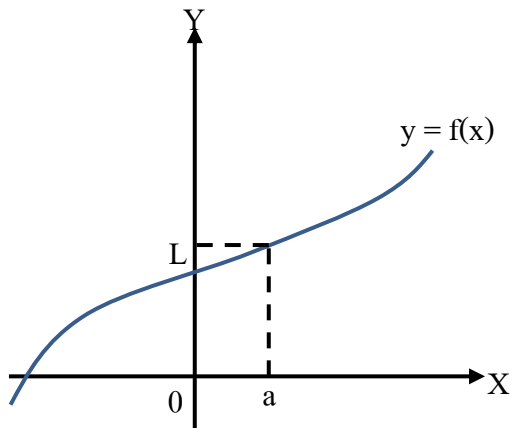
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต เมื่อกำหนด $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $x \neq 2$ ถ้าแทน $x=2$ แล้ว $f(2) = \frac{2+2}{2-2} = \frac{4}{0}$

หาค่าไม่ได้

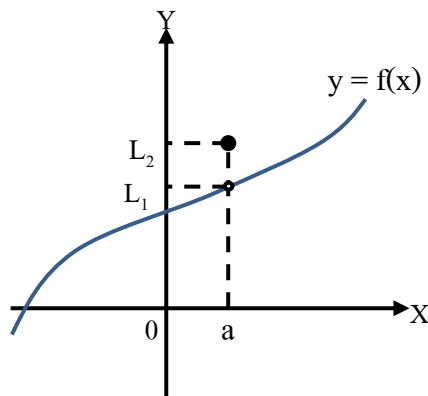
ตัวอย่างที่ 4 จากกราฟในแต่ละข้อ จงหาค่าต่างๆ ตามที่กำหนด

1.



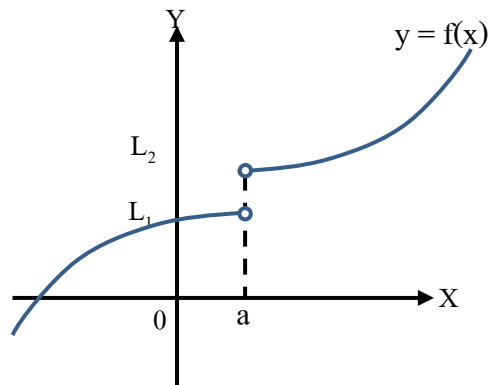
- 1) $f(a)$ = L
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ = L
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ = L
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ = L

2.



- 1) $f(a)$ = L₂
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ = L₁
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ = L₁
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ = L₁

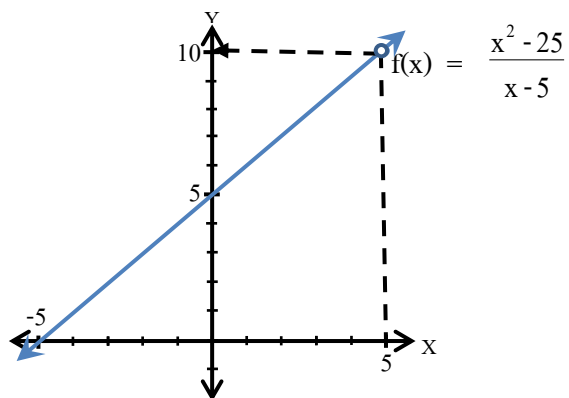
3.



- 1) $f(a)$ = หาค่าไม่ได้
- 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ = L_2
- 3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ = L_1
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

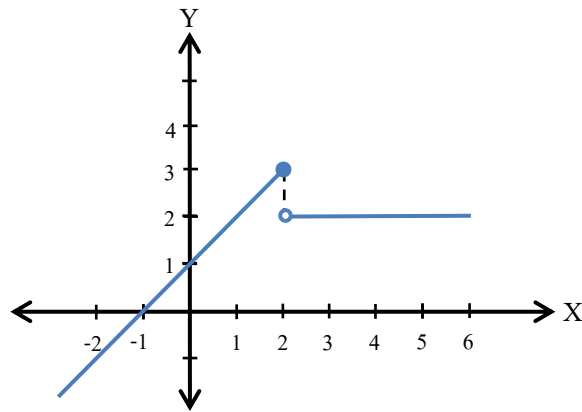
วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ	$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$	=	10
	$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$	=	10
เนื่องจาก	$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$	=	$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ = 10
ดังนั้น	$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$	=	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ = 10

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \leq 2 \\ 2 & ; x > 2 \end{cases}$

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชันได้ดังนี้



จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x < 3 \\ 3x + 2 & ; x \geq 3 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ; x < 3 \\ 3x + 2 & ; x \geq 3 \end{cases}$

เมื่อ $x < 3$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 + 1$
 $= (3)^2 + 1$
 $= 10$

เมื่อ $x \geq 3$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3x + 2$
 $= 3(3) + 2$
 $= 11$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

สรุป

1. การหา $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วย $x \rightarrow a^-$ และเมื่อ x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ เรียกว่า x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย $x \rightarrow a^+$
2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ มีค่าแล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีค่า ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีลิมิตที่ a



แบบฝึกทักษะที่ 1.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปตาราง

คำชี้แจง จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัยการหาค่าของฟังก์ชันเดิมในตารางที่กำหนดให้

1. ให้ $f(x) = x + 5$ จงหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

วิธีทำ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$)

x	1	1.5	1.7	1.99	1.999	$x \rightarrow 2^-$
$f(x)$						$f(x) \rightarrow$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ _____

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

x เข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$)

x	3	2.5	2.3	2.1	2.001	$x \rightarrow 2^+$
$f(x)$						$f(x) \rightarrow$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ _____

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 4

วิธีทำ x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย ($x < 4$)

x	3	3.5	3.9	3.99	3.999	$x \rightarrow 4^-$
f(x)						

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ _____

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

x เข้าใกล้ 4 ทางขวา ($x > 4$)

x	5	4.5	4.3	4.1	4.001	$x \rightarrow 4^+$
f(x)						$f(x) \rightarrow$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ _____

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

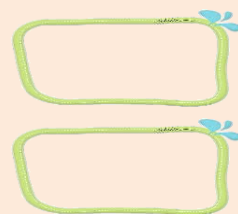
จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

ประเมินผล

คะแนนเต็ม 14 คะแนน

ได้ _____ คะแนน



ผ่าน

ไม่ผ่าน



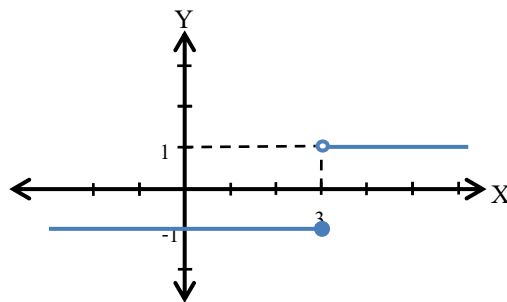
แบบฝึกทักษะที่ 1.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปกราฟ

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณารูปแล้วตอบคำถามต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(3)$ = _____

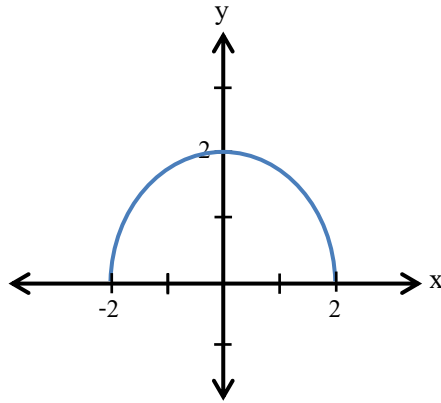
2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ = _____

3. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ = _____

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$ _____ เนื่องจาก _____

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = _____

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ = _____

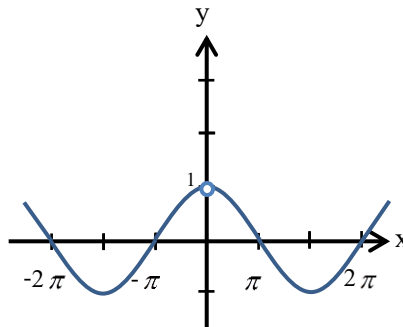
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = _____

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____ เนื่องจาก _____



3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = _____

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ = _____

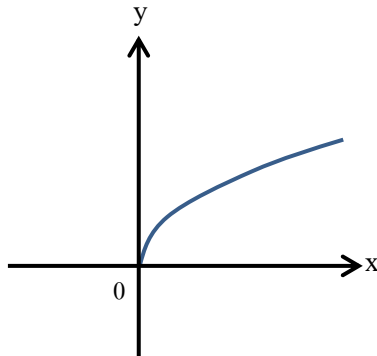
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = _____

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____ เนื่องจาก _____



4. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = _____

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ = _____

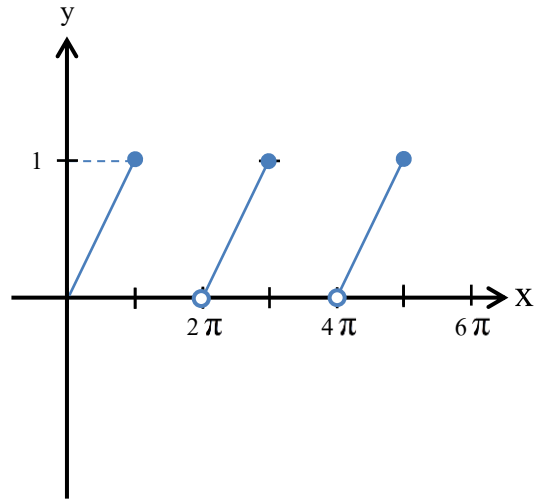
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = _____

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____ เนื่องจาก _____



5. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = _____

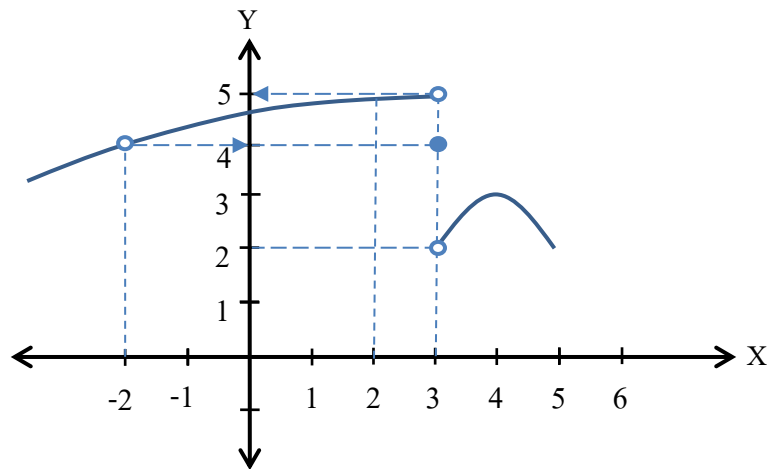
2. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ = _____

3. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ = _____



6. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(-2)$ = _____

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ = _____

3. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ = _____

4. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ = _____

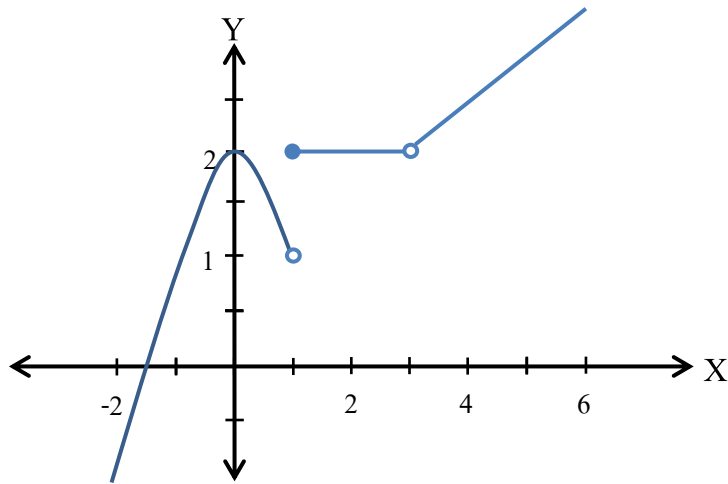
5. $f(2)$ = _____

6. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ = _____

7. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ = _____

8. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ = _____

7. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(1)$ = _____

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ = _____

3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ = _____

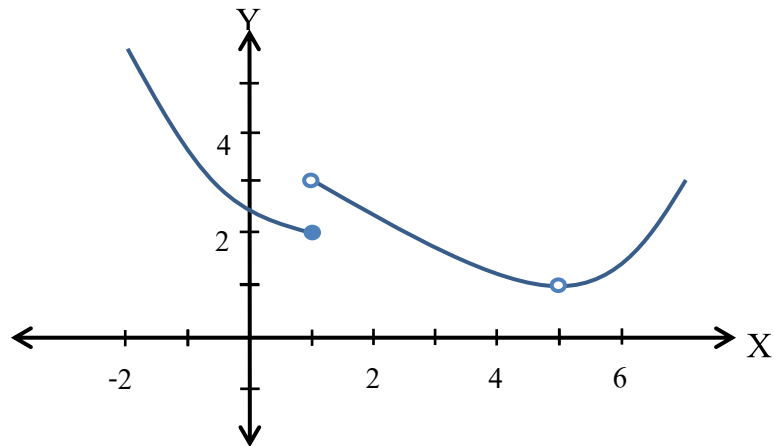
4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ = _____

5. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ = _____

6. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ = _____

7. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ = _____

8. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ _____

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$ _____

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ _____

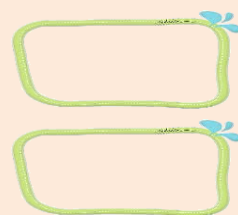
4. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$ _____

5. $f(5) =$ _____

ประเมินผล

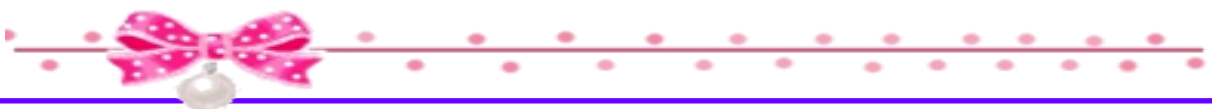
คะแนนเต็ม 40 คะแนน

ได้ _____ คะแนน



ผ่าน

ไม่ผ่าน



แบบฝึกทักษะที่ 1.3

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และฟังก์ชัน f ในรูปสมการ

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟจากฟังก์ชัน $f(x)$ ที่กำหนดให้แล้วพิจารณาหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จากกราฟ (ข้อย่อยละ 5 คะแนน)

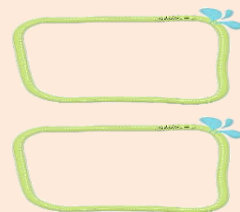
1. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x < 1 \\ -1 & ; x > 1 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 5-x & ; x \geq 2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เมื่อ $a = 2$

ประเมินผล

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

ได้ _____ คะแนน



ผ่าน

ไม่ผ่าน



แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค30206

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

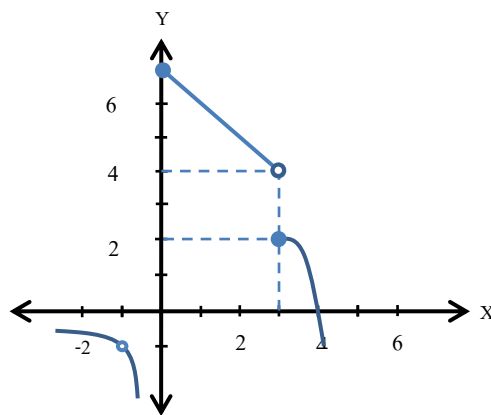
ชุดที่ 1 ผลิตของฟังก์ชัน

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

เวลา 15 นาที

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ทับตัวอักษร ก, ข, ค หรือ ง หน้าคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จากกราฟ $y = f(x)$ ข้อใดต่อไปนี้ สรุปถูกต้อง



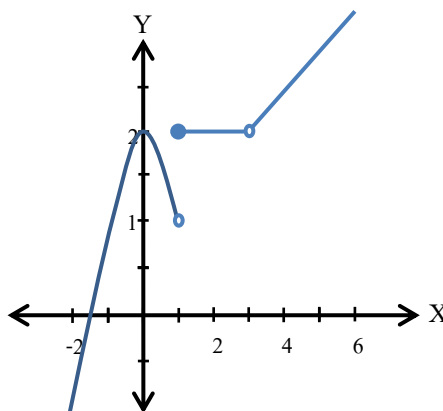
ก. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$

ข. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$

ค. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ง. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

กราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 2 – 5



2. ค่าของ $f(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. -6

ข. -2

ค. 2

ง. 6

3. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 3

ข. 2

ค. 1

ง. -1

4. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. หาค่าไม่ได้

5. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 4

ข. 2

ค. 1

ง. หาค่าไม่ได้

6. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \leq 2 \\ 2 - x & ; x > 2 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. 4

7. จากฟังก์ชัน ข้อ 6 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 4

ง. หาค่าไม่ได้

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & ; x \leq 2 \\ 1 & ; 2 < x \leq 4 \\ 9 - 2x & ; x > 4 \end{cases}$ และค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1

ข. 2

ค. 3

ง. หาค่าไม่ได้

9. จากฟังก์ชัน ข้อ 8 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 3

ง. หาค่าไม่ได้

10. จากฟังก์ชันข้อ 8 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 4

ง. หาค่าไม่ได้

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน
ชุดที่ 1 ลิ้มิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

การประเมินผล

แบบทดสอบ	คะแนน	ความก้าวหน้า	ระดับคุณภาพ
ก่อนเรียน	_____	_____	_____
หลังเรียน	_____		

เกณฑ์การประเมิน	
คะแนน	ระดับคุณภาพ
8 – 10	ดีมาก
7	ดี
6	พอใช้
0 – 5	ปรับปรุง

ผ่าน

ไม่ผ่าน



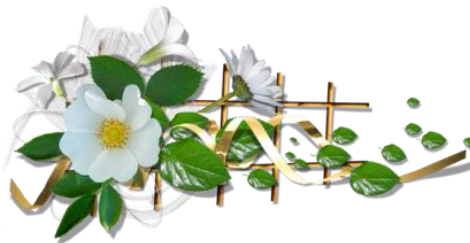
ภาคผนวก



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ชุดที่ 1 ลิ้มิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.				×
2.			×	
3.			×	
4.		×		
5.				×
6.				×
7.	×			
8.				×
9.	×			
10.				×



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ในรูปตาราง

คำชี้แจง จงหาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยอาศัยการหาค่าของฟังก์ชันเดิมในตารางที่กำหนดให้

1. ให้ $f(x) = x + 5$ จงหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 2

วิธีทำ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย ($x < 2$)

x	1	1.5	1.7	1.99	1.999	$x \rightarrow 2^-$
$f(x)$	6	6.5	6.7	6.99	6.999	$f(x) \rightarrow 7$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 7

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7$$

x เข้าใกล้ 2 ทางขวา ($x > 2$)

x	3	2.5	2.3	2.1	2.001	$x \rightarrow 2^+$
$f(x)$	8	7.5	7.3	7.1	7.001	$f(x) \rightarrow 7$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 7

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7$$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x + 5 = 7$$

2. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหาค่าของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 4

วิธีทำ x เข้าใกล้ 4 ทางซ้าย ($x < 4$)

x	3	3.5	3.9	3.99	3.999	$x \rightarrow 4^-$
f(x)	10	13.25	16.21	16.9201	16.992	$f(x) \rightarrow 17$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางซ้ายแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 17

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 17$$

x เข้าใกล้ 4 ทางขวา ($x > 4$)

x	5	4.5	4.3	4.1	4.001	$x \rightarrow 4^+$
f(x)	26	21.25	19.49	17.81	17.008	$f(x) \rightarrow 17$

จะพบว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 4 ทางขวาแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 17

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 17$$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 1 = 17$$



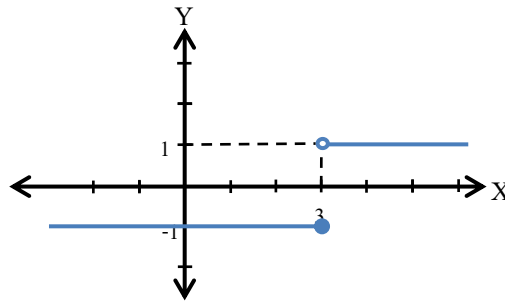
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ในรูปกราฟ

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณากราฟแล้วตอบคำถามต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

$$1. f(3) = \underline{\quad -1 \quad}$$

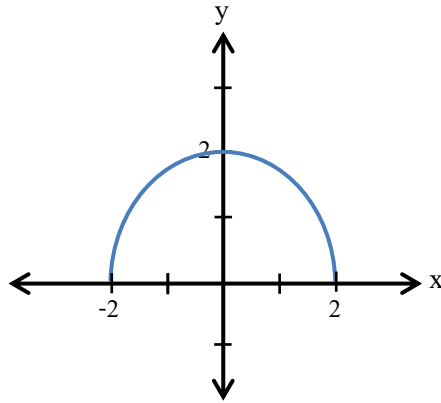
$$2. \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \underline{\quad 1 \quad}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \underline{\quad -1 \quad}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\quad \text{หาค่าไม่ได้} \quad}$$

$$5. \text{สรุป } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\text{หาค่าไม่ได้}} \text{ เนื่องจาก } \underline{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)}$$

2. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0) = 2$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

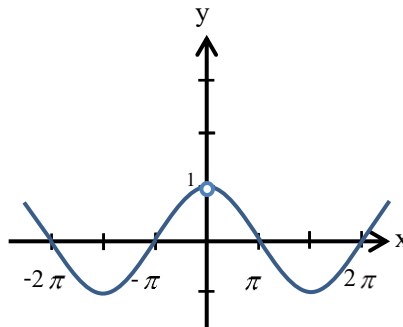
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



3. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = หาค่าไม่ได้

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ = 1

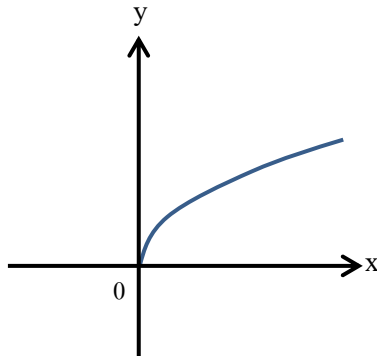
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ = 1

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = 1

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{1}$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



4. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(0)$ = 0

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ = 0

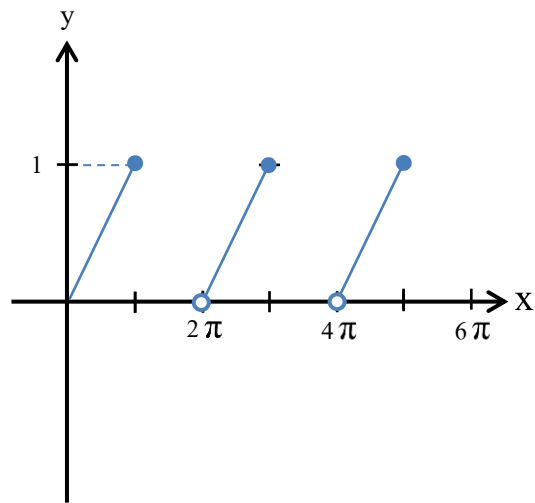
3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

4. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

5. สรุป $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ = หาค่าไม่ได้ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



5. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(\pi)$ = 1

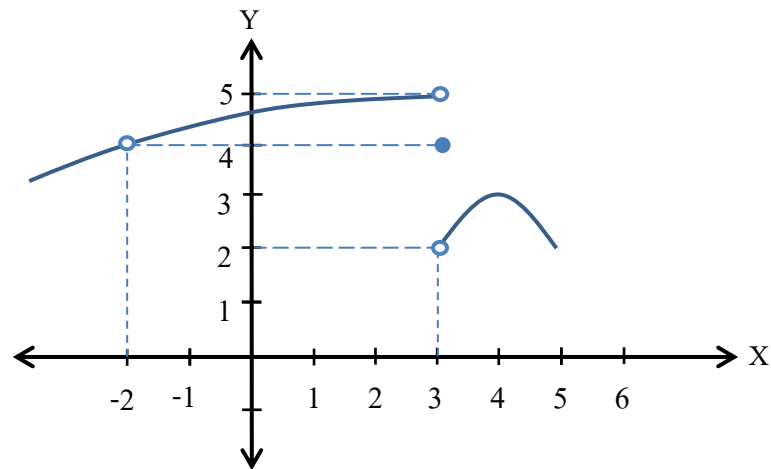
2. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

3. $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ = 1

4. $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ = หาค่าไม่ได้



6. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(-2)$ = หาค่าไม่ได้

2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ = 4

3. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ = 4

4. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ = 4

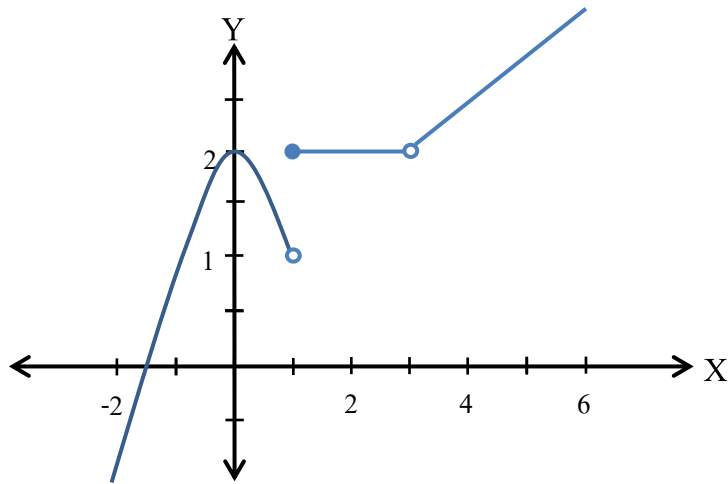
5. $f(3)$ = 4

6. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ = 5

7. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ = 2

8. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

7. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $f(1)$ = 2

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ = 1

3. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ = 2

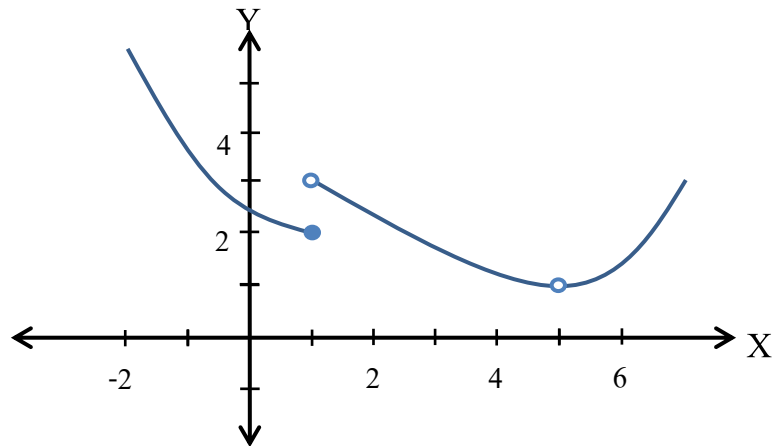
4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ = หาค่าไม่ได้

5. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ = 2

6. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ = 2

7. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ = 2

8. กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้ดังรูป



จงหา

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$ 2

2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$ 3

3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ หาค่าไม่ได้

4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ 1

5. $f(5) =$ หาค่าไม่ได้

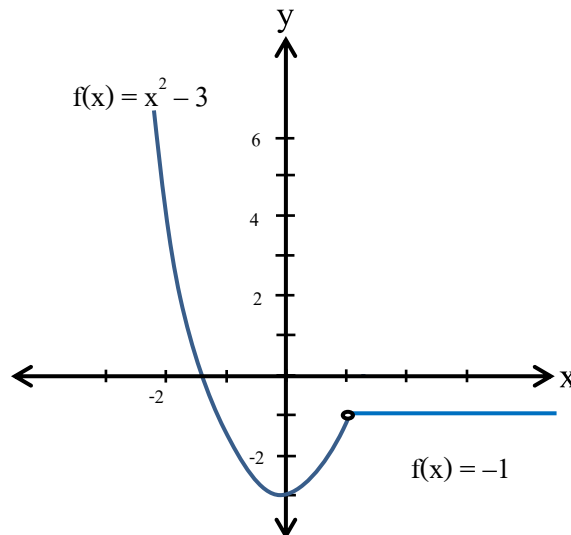
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่
2. เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายและลิมิตทางด้านขวา ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a ลากำหนด ฟังก์ชัน f ในรูปสมการ

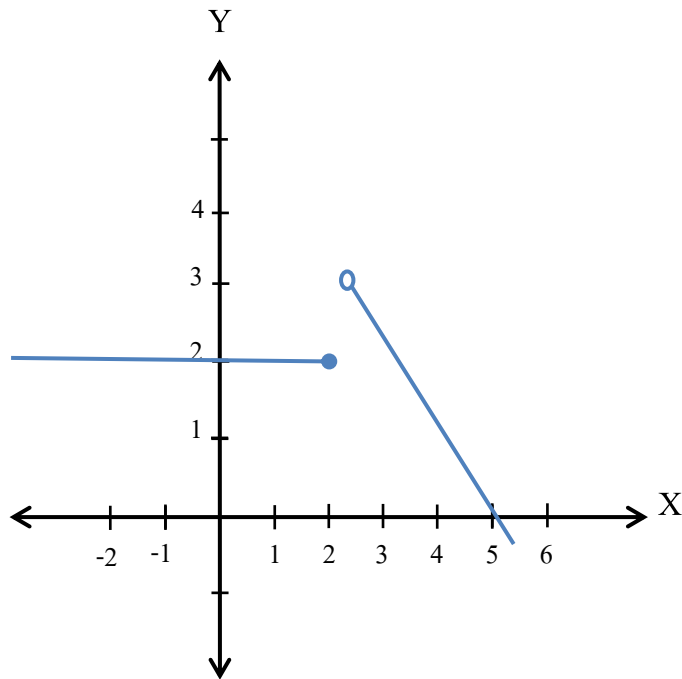
คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณากราฟแล้วตอบคำถามต่อไปนี้ (ข้อย่อยละ 5 คะแนน)

$$1. \text{ กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x < 1 \\ -1 & ; x > 1 \end{cases} \quad \text{จงหาค่าของ } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$



จากกราฟ	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	$=$	-2
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$	$=$	-1
เนื่องจาก	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	$\neq$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
ดังนั้น	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$	$=$	ไม่มี

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 2 \\ 5-x & ; x \geq 2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



จากกราฟ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$

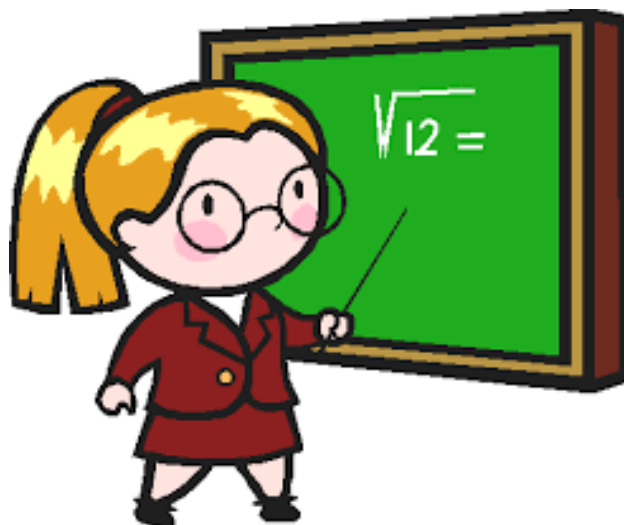
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
ชุดที่ 1 ลิ้มิตของฟังก์ชัน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.		×		
2.			×	
3.		×		
4.		×		
5.				×
6.				×
7.				×
8.	×			
9.		×		
10.	×			



เอกสารอ้างอิง

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. สุดยอดเทคนิคสาระคณิตศาสตร์การเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.6

(2 ภาคเรียน) Pure...pure กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: พ.ศ.พัฒนา จำกัด, มปป.

จีระ เจริญสุขวิมล. สรุปหลัก & สูตรคณิตศาสตร์ ม. 6 เล่มรวม 1 – 2 (สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม).

กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด, มปป.

ณรงค์ ปั่นนัม. คู่มือ-เตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด, มปป.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. หนังสือเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.6 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพฯ: แม็ค เอ็ดดูเคชั่น, 2555.

ชนวัฒน์ สันทราพรพล. คู่มือรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม ม.ปลาย เล่ม 6

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพฯ: ธรรมบัณฑิต, มปป.

ศุภกิจ เกลิมวิสุตม์กุล. เทคนิค คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ: แม็ค, 2550.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตร การศึกษาระดับพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: สกสศ. ลาดพร้าว, 2550.