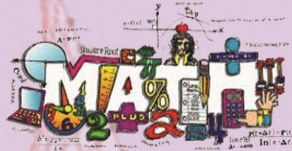


# ชุดการเรียนรู้รายบุคคล

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม  
รหัสวิชา ค32202



# ม.5

จำนวนเชิงซ้อน

## คณิตศาสตร์

ชุดที่ 4 การหาจำนวนเชิงซ้อน



นางกนิษภาดา แสงนารี

ตำแหน่งครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

โรงเรียนสูงเนิน อำเภอสูงเนิน

องค์การบริหารส่วนจังหวัดนครราชสีมา

กรมส่งเสริมการปกครองท้องถิ่น



## คำนำ

ชุดการเรียนรู้การสอน เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อนเล่มนี้ใช้ประกอบการเรียนในกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ รายวิชา คณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผู้เขียนมีจุดประสงค์เพื่อให้นักเรียนได้ศึกษาเรียนรู้ เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจเรื่องการหารจำนวนเชิงซ้อนทั้งในรูป  $(a,b)$  และจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป  $a + bi$  และเมื่อศึกษาแล้วนักเรียนสามารถที่จะนำความรู้ความเข้าใจเป็นพื้นฐานไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาระดับสูงได้เป็นอย่างดี

ชุดการเรียนรู้การสอนเล่มนี้ ยังสอดคล้องกับยุคปฏิรูปการเรียนรู้ ที่มุ่งเน้นให้นักเรียนเป็นศูนย์กลาง กล่าวคือ สนับสนุนให้ผู้เรียนแสวงหาความรู้จากสื่อ และแหล่งเรียนรู้ที่นอกเหนือจากตำราเรียน มีกิจกรรมสร้างองค์ความรู้และแสวงหาคำตอบด้วยตนเอง

หวังว่าชุดการเรียนรู้การสอนเล่มนี้คงเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน และให้ความรู้ความเข้าใจ ในเรื่องการบวกและการลบจำนวนเชิงซ้อนได้เป็นอย่างดี ซึ่งจะนำไปสู่การพัฒนาตนเอง สังคม และประเทศชาติต่อไป

กนิษภาดา แสงนารี




 สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำชี้แจงเกี่ยวกับชุดการเรียนรู้การสอน	3
คำแนะนำสำหรับครู	4
คำแนะนำสำหรับนักเรียน	5
ลำดับขั้นการเรียนรู้ชุดการเรียนรู้การสอน	6
จุดประสงค์การเรียนรู้และสาระการเรียนรู้	7
บัตรคำสั่ง	8
แบบทดสอบก่อนเรียน	9
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	11
บัตรสาระการเรียนรู้ 1	12
บัตรกิจกรรมที่ 1	15
บัตรเฉลยกิจกรรม 1	17
บัตรสาระการเรียนรู้ 2	19
บัตรกิจกรรมที่ 2	22
บัตรเฉลยกิจกรรม 2	24
แบบสรุปผลการเรียนรู้	26
แนวทางการตอบแบบสรุปผลการเรียนรู้	27
แบบทดสอบหลังเรียน	28
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	30
บรรณานุกรม	31



## คำชี้แจงเกี่ยวกับชุดการเรียนรู้การสอน

1. เอกสารฉบับนี้ เป็นเอกสารชุดการเรียนรู้การสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน ใช้สอนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
2. เอกสารชุดนี้ประกอบด้วย
  - คำชี้แจงเกี่ยวกับชุดการเรียนรู้การสอน
  - คำแนะนำสำหรับครู
  - คำแนะนำสำหรับนักเรียน
  - แบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน
  - บัตรคำสั่ง, บัตรสาระการเรียนรู้ บัตรกิจกรรมและบัตรเฉลย
3. ชุดการเรียนรู้ชุดนี้ ใช้เวลาในการศึกษา 2 ชั่วโมง

พวกเราต้องอ่าน

ให้เข้าใจก่อนนะครับ



### คำแนะนำสำหรับครู

1. ครูควรจัดเตรียมชุดการเรียนการสอน ซึ่งประกอบด้วย บัตรคำตั้ง บัตรสาระการเรียนรู้ บัตรกิจกรรม และบัตรเฉลย ตลอดจนอุปกรณ์ต่าง ๆ ให้ครบถ้วน
2. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อประเมินความรู้เดิมของนักเรียน
3. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
4. แจกชุดการเรียนการสอนให้นักเรียนศึกษาและแนะนำวิธีใช้ชุดการเรียนการสอนเพื่อ นักเรียนจะได้ปฏิบัติได้อย่างถูกต้อง
5. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้
6. หากมีนักเรียนบางคนเรียนไม่ทันครูควรให้คำแนะนำหรืออาจมอบหมายงานหรือเอกสาร ให้ศึกษาเพิ่มเติมในเวลาว่าง
7. หลังจากนักเรียนศึกษาชุดการเรียนการสอนเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูและนักเรียนควรช่วยกัน สรุปและให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและทำแบบทดสอบหลังเรียน
8. ครูเฉลยแบบฝึกหัด, แบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน และบันทึกคะแนนของนักเรียนแต่ละคนไว้เพื่อประเมินการพัฒนาและความก้าวหน้า หากมีนักเรียนไม่ผ่านเกณฑ์ครูควรจัด สอนซ่อมเสริมให้
9. การจัดชั้นเรียนจะจัดให้นักเรียนนั่งเป็นกลุ่มหรือนั่งเป็นรายบุคคลก็ได้



คุณครูไม่ลืมศึกษา  
ก่อนอยู่แล้วค่ะ



### คำแนะนำสำหรับนักเรียน

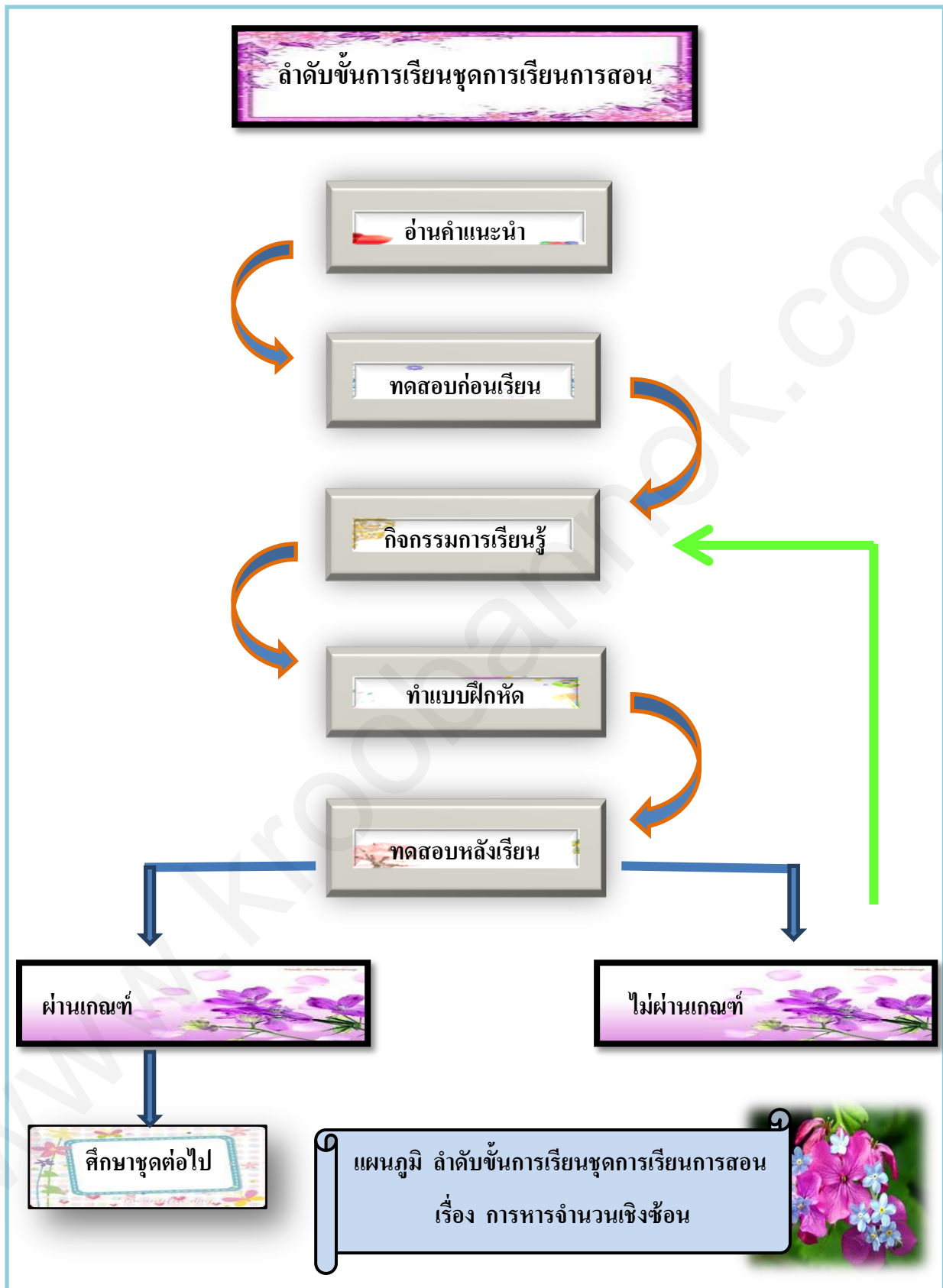
1. อ่านคำชี้แจงและคำแนะนำ สำหรับนักเรียนให้เข้าใจก่อนที่จะลงมือศึกษาชุดการเรียนการสอน
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ โดยใช้เวลา 10 นาที เพื่อประเมินความรู้เดิมของนักเรียน
3. ศึกษาชุดการเรียนการสอนจากบัตรสาระการเรียนรู้ที่ครูจัดเตรียมไว้ด้วยความตั้งใจ โดยปฏิบัติตามขั้นตอนที่กำหนดไว้ในบัตรคำสั่ง
4. เมื่อนักเรียนศึกษาสาระการเรียนรู้เสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากบัตรคำถามที่ครูจัดเตรียมไว้ให้
5. หากนักเรียนยังไม่เข้าใจในสาระการเรียนรู้ใดก็ให้กลับไปศึกษาอีกครั้ง เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อเปรียบเทียบความก้าวหน้าในการเรียนของนักเรียน
7. ในการทำแบบฝึกหัด, แบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน ขอให้นักเรียนทำด้วยความตั้งใจ และมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองให้มากที่สุด โดยไม่ดูเฉลยก่อนทำแบบฝึกหัดและแบบทดสอบ

พวกเธอก็อย่า  
ลืมทำความเข้าใจ  
ด้วยนะ...



ครับ





## ชุดการเรียนรู้การสอน

### เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

#### จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $(a,b)$  ได้
2. นักเรียนสามารถหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $a + bi$  ได้

#### สาระการเรียนรู้

ชุดการเรียนรู้การสอน เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

ผมคิดว่า  
มันต้อง  
ยากนะ!

เธอก็อย่าเพิ่ง ตีตนไป  
ก่อนไข่ ชี ยังไม่ทัน  
ได้สิคะคุณ



## บัตรคำสั่ง

1. นักเรียนอ่านคำสั่งให้แก่นักเรียนให้เข้าใจก่อนลงมือศึกษาชุดการเรียนการสอน
2. ศึกษาบัตรสาระการเรียนรู้ที่ครูแจกให้ เรื่อง การหาจำนวนเชิงซ้อนให้นักเรียน  
เขียนสรุปผลการเรียนรู้ ลงในแบบสรุปผลการเรียนรู้
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจากบัตรคำถามที่จัดเตรียมไว้ให้
4. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกหัดเสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนตรวจคำตอบจากบัตรเฉลย ในการ  
ทำแบบฝึกหัด ห้ามนักเรียนเปิดดูคำตอบก่อน

พวกเรากำลังอ่าน

แล้วเพื่อน ๆ ละคะ



แบบทดสอบก่อนเรียน ชุดการเรียนรู้การสอน  
รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย x ทับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

- ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(2,2)}{(1,1)}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด
  - (2,2)
  - (-2,2)
  - (2,0)
  - (-2,0)
- ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{1-i}{2+i}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด
  - $\frac{1+3i}{5}$
  - $\frac{1-3i}{5}$
  - $\frac{-1+3i}{5}$
  - $\frac{-1-3i}{5}$
- $\frac{1-i}{3-4i}$  มีผลหารเท่ากับข้อใด
  - $\left(\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i\right)$
  - $\left(\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i\right)$
  - $\left(-\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i\right)$
  - $\left(-\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i\right)$
- จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{2-2i}{1+3i}$  มีผลหารตรงกับข้อใด
  - $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$
  - $\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$
  - $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$
  - $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$
- ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $(x,y)(1,-2) = (-7,-16)$  แล้ว  $(x,y)$  คือจำนวนในข้อใด
  - (5,6)
  - (6,5)
  - (5,-6)
  - (-6,-5)



6. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(1,3)}{(2,-1)}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

ข.  $(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$

ค.  $(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5})$

ง.  $(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$

7. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{3+2i}{4+3i}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$

ข.  $\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$

ค.  $-\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$

ง.  $-\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$

8. ค่าของ  $\frac{-3-i}{3+i}$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. 2

9. ถ้า  $\frac{x+yi}{2+i} = 2+i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนในข้อใด

ก.  $3+4i$

ข.  $3-4i$

ค.  $-3-4i$

ง.  $-3+4i$

10. ถ้า  $\frac{2+3i}{x+yi} = 1+2i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนในข้อใด

ก.  $\frac{8+i}{5}$

ข.  $\frac{-8+i}{5}$

ค.  $\frac{-8-i}{5}$

ง.  $\frac{8-i}{5}$



เฮ้ ลู๊ ๆ นะพวก  
เราเอาใจช่วย  
ซึ่งกันและกันก็



บัตรเฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน  
เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

1. ค

2. ข

3. ก

4. ค

5. ค

6. ง

7. ข

8. ค

9. ก

10. ง

ขอบอกว่ายาก  
พอสมควรนะครับ  
แต่ถ้าตั้งใจแล้ว



# บัตรสาระการเรียนรู้ที่ 1

การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $(a,b)$

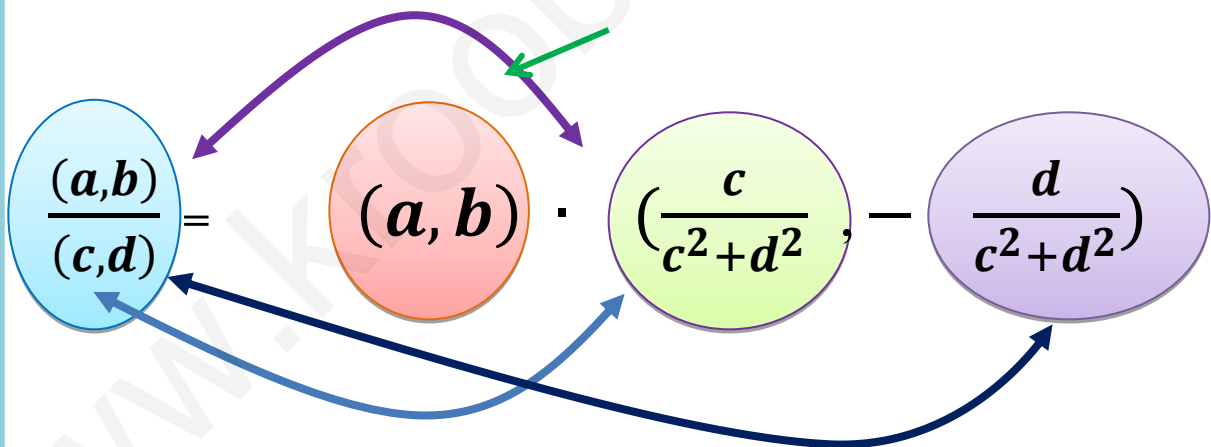
บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน  $(a,b)$  และ  $(c,d)$  ใด ๆ

$$(a,b) \div (c,d) = (a,b) \cdot \left( \frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2} \right) \text{ เมื่อ } (c,d) \neq 0$$

ข้อสังเกต บทนิยามการหารไม่จำเป็นต้องจำ เพราะในหัวข้อต่อไปจะมีการนำสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนมาใช้ในการหาร

แผนผังการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน

เปลี่ยนหารให้เป็นคูณ



แล้วหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนตามปกติดังตัวอย่าง



ตัวอย่าง จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.  $\frac{(2,3)}{(1,2)}$

วิธีทำ จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

จะได้  $\frac{(2,3)}{(1,2)} = (2,3) \cdot \left(\frac{1}{1^2+2^2}, -\frac{2}{1^2+2^2}\right)$

$$= (2,3) \cdot \left(\frac{1}{1+4}, -\frac{2}{1+4}\right)$$

$$= (2,3) \cdot \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(2\left(\frac{1}{5}\right) - 3\left(-\frac{2}{5}\right), 2\left(-\frac{2}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5} + \frac{6}{5}, -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)$$

ดังนั้น  $\frac{(2,3)}{(1,2)} = \left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$  Ans...

2.  $\frac{(4,1)}{(2,-3)}$

วิธีทำ จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

จะได้  $\frac{(4,1)}{(2,-3)} = (4,1) \cdot \left(\frac{2}{2^2+(-3)^2}, -\frac{-3}{2^2+(-3)^2}\right)$

$$= (4,1) \cdot \left(\frac{1}{4+9}, \frac{3}{4+9}\right)$$

$$= (4,1) \cdot \left(\frac{1}{13}, \frac{3}{13}\right)$$

$$= \left(4\left(\frac{1}{13}\right) - 1\left(\frac{3}{13}\right), 4\left(\frac{3}{13}\right) + 1\left(\frac{1}{13}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4}{13} - \frac{3}{13}, \frac{12}{13} + \frac{1}{13}\right)$$

ดังนั้น  $\frac{(4,1)}{(2,-3)} = \left(\frac{1}{13}, \frac{13}{13}\right) = \left(\frac{1}{13}, 1\right)$  Ans...



$$3. \frac{(-2, -1)}{(1, -3)}$$

$$\text{วิธีทำ จาก } \frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b) \cdot \left( \frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2} \right)$$

$$\text{จะได้ } \frac{(-2, -1)}{(1, -3)} = (-2, -1) \cdot \left( \frac{1}{1^2 + (-3)^2}, -\frac{-3}{1^2 + (-3)^2} \right)$$

$$= (-2, -1) \cdot \left( \frac{1}{1+9}, \frac{3}{1+9} \right)$$

$$= (-2, -1) \cdot \left( \frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right)$$

$$= \left( -2 \left( \frac{1}{10} \right) - (-1) \left( \frac{3}{10} \right), -2 \left( \frac{3}{10} \right) + (-1) \left( \frac{1}{10} \right) \right)$$

$$= \left( -\frac{2}{10} + \frac{3}{10}, -\frac{6}{10} - \frac{1}{10} \right)$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{(-2, -1)}{(1, -3)} = \left( \frac{1}{10}, -\frac{7}{10} \right) \quad \text{Ans...}$$

ค่อย ๆ ศึกษา นะครับ  
เพื่อน ๆ

ใช่แล้ว เห็น  
ตัวอย่าง ยิง



## บัตรกิจกรรม 1

**คำชี้แจง** หลังจากนักเรียนศึกษาบัตรสาระการเรียนรู้ที่ 1 แล้ว ให้นักเรียนหาผลหารของจำนวน

เชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 2 ข้อ 10 คะแนน

1.  $\left( \frac{2,4}{-2,1} \right)$

**Soln** จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (\dots, \dots) \cdot \left( \frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2} \right)$

จะได้  $\frac{(2,4)}{(-2,1)} = (\dots, \dots) \cdot \left( \frac{\dots}{\dots^2+\dots^2}, -\frac{\dots}{\dots^2+\dots^2} \right)$   
 $= (\dots, \dots) \cdot (\dots, \dots)$

$= (\dots, \dots) \cdot (\dots, \dots)$

$= (\dots(\dots) \dots(\dots), \dots(\dots) \dots(\dots))$

$= (\dots, \dots)$

ดังนั้น  $\left( \frac{2,4}{-2,1} \right) = (\dots, \dots)$  Ans... (30 จุด 5 คะแนน 6 จุด : 1 คะแนน)

ทำด้วยความ  
ตั้งใจก็จะ  
สำเร็จลุล่วง

ถูกต้อง  
แล้วค่ะ



2.  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right)$

Soln จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (\dots, \dots) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

จะได้  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right) = (\dots, \dots) \cdot \left(\frac{\dots}{2^2+5^2}, -\frac{\dots}{2^2+5^2}\right)$   
 $= (\dots, \dots) \cdot (\dots, \dots)$

$= (\dots, \dots) \cdot (\dots, \dots)$

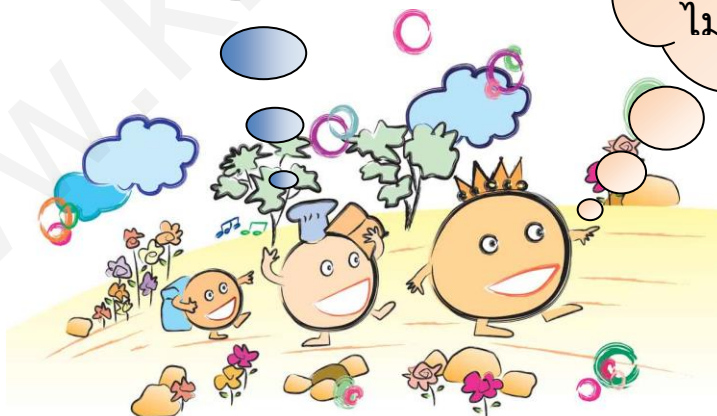
$= (\dots(\dots) \dots (\dots), \dots(\dots) \dots (\dots))$

$= (\dots, \dots)$

ดังนั้น  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right) = (\dots, \dots) \text{ Ans... } (30 \text{ จุด } 5 \text{ คะแนน } 6 \text{ จุด } : 1 \text{ คะแนน})$

ใครที่ยังไม่เข้าใจ  
ค่อย ๆ ตามมานะ  
เพื่อน ไม่ต้องรีบ

ตามมาเพื่อน ๆ  
เราจะพาไปสู่  
เส้นชัย  
ไม่ได้ไกลเกิน



### บัตรเฉลยกิจกรรม 1

**คำชี้แจง** หลังจากนักเรียนศึกษาบัตรสาระการเรียนรู้ที่ 1 แล้ว ให้นักเรียนหาผลหารของจำนวน

เชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ 2 ข้อ 10 คะแนน

1.  $\left(\frac{2,4}{-2,1}\right)$

**Soln** จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

จะได้  $\frac{(2,4)}{(-2,1)} = (2,4) \cdot \left(\frac{-2}{(-2)^2+1^2}, -\frac{1}{(-2)^2+1^2}\right)$

$$= (2,4) \cdot \left(\dots \frac{-2}{4+1} \dots, \dots \frac{-1}{4+1} \dots\right)$$

$$= (2,4) \cdot \left(\dots \frac{-2}{5} \dots, \dots \frac{-1}{5} \dots\right)$$

$$= \left(2 \cdot \left(\dots \frac{-2}{5} \dots\right) + (-4) \left(\frac{-1}{5} \dots\right), 2 \left(\frac{-1}{5}\right) + 4 \left(\frac{-2}{5}\right)\right)$$

$$= \left(\dots \frac{-4}{5} + \frac{4}{5} \dots, \dots \frac{-2}{5} + \frac{-8}{5} \dots\right)$$

ดังนั้น  $\left(\frac{2,4}{-2,1}\right) = \left(0, -\frac{10}{5}\right) = (0, -2)$  Ans... (30 จุด 5 คะแนน 6 จุด : 1 คะแนน)



เจ๊งมากเลย  
เพื่อน ๆ



2.  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right)$

วิธีทำ จาก  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

จะได้  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right) = (3,-2) \cdot \left(\frac{2}{\dots 2^2+5^2}, -\frac{5}{\dots 2^2+5^2}\right)$

$$= (3., -2.) \cdot \left(\frac{2}{4+25}, \frac{-5}{4+25}\right)$$

$$= (3, -2) \cdot \left(\frac{2}{29}, \frac{-5}{29}\right)$$

$$= \left(3 \cdot \left(\frac{2}{29}\right) - (-2) \left(\frac{-5}{29}\right), 3 \left(\frac{-5}{29}\right) - 2 \left(\frac{2}{29}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{6}{29} - \frac{10}{29}, \frac{-15}{29} - \frac{4}{29}\right)$$

ดังนั้น  $\left(\frac{3,-2}{2,5}\right) = \left(-\frac{4}{29} \dots, -\frac{19}{29} \dots\right)$       Ans...      (30 จุด 5 คะแนน 6 จุด : 1 คะแนน)

มาเถอะเพื่อนมาอยู่  
ชมรมคนรักเรียน

ชักจะซีไม่  
ใหญ่เลยนะ  
ตั้งแต่กลับตัว



## บัตรสาระการเรียนรู้ที่ 2

การหารจำนวนเชิงซ้อนในรูป  $a+bi$

บทนิยาม ของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม สังยุค (conjugate) ของจำนวนเชิงซ้อน  $a+bi$  คือ  $a-bi$  เขียนแทนด้วย  $\overline{a+bi}$

$$\text{นั่นคือ } \overline{a+bi} = a-bi$$

การหารจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สังยุคของตัวหาร

ในจำนวนเชิงซ้อน  $a+bi$  และ  $c+di$  ใดๆ และ  $c+di \neq 0$

พิจารณา  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = \frac{a+bi}{c+di}$

$$= \left( \frac{a+bi}{c+di} \right) \cdot \left( \frac{c-di}{c-di} \right)$$

$$= \frac{(a+bi) \cdot (c-di)}{c^2+d^2}$$

$$= (a+bi) \cdot \left( \frac{c-di}{c^2+d^2} \right)$$

$$= (a,b) \cdot \left( \frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2} \right)$$

ใช้สังยุคของตัวหาร

เศษคูณเศษ ส่วนคูณส่วน

สุดท้ายก็คล้ายกับการหาผลหารวิธีที่ 1



ตัวอย่าง จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยใช้สังยุคของตัวหาร

1.  $\frac{1+2i}{3-2i}$

วิธีทำ  $\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{1+2i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}$  ใช้สังยุคของตัวหาร

$$= \frac{1(3)+1(2i)+2i(3)+2i(2i)}{3(3)+3(2i)-2i(3)-2i(2i)}$$

เศษคูณเศษ ส่วนคูณส่วน

$$= \frac{3+2i+6i+4i^2}{9+6i-6i-4i^2} = \frac{3+2i+6i+4i^2}{9-4i^2}$$

$$= \frac{3-4+8i}{9+4}$$

$$= \frac{-1+8i}{13}$$

$i^2 = -1$

ดังนั้น  $\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{-1+8i}{13}$  Ans...

2.  $\frac{2+3i}{1+4i}$

วิธีทำ  $\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{2+3i}{1+4i} \cdot \frac{1-4i}{1-4i}$  ใช้สังยุคของตัวหาร

$$= \frac{2-8i+3i-12i^2}{1-16i^2}$$

เศษคูณเศษ ส่วนคูณส่วน

$$= \frac{2+12-5i}{1+16} = \frac{14-5i}{17}$$

ดังนั้น  $\frac{2+3i}{1+4i} = \frac{14-5i}{17}$  Ans...

3.  $\frac{1-2i}{-1-i}$

วิธีทำ  $\frac{1-2i}{-1-i} = \frac{1-2i}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i}$

ใช้สังยุคของตัวหาร

$$= \frac{-1+i+2i-2i^2}{1-i^2}$$

เศษคูณเศษ ส่วนคูณส่วน

$$= \frac{-1+2+3i}{1+1}$$

$i^2 = -1$

ดังนั้น

$$\frac{1+2i}{3-2i} = \frac{1+3i}{2}$$

Ans...

พวกเราทำสำเร็จไป  
อีกขั้นหนึ่งแล้ว มา  
เราไปทำกิจกรรมกัน

เข้าใจจัง  
ไม่คิดว่าจะง่าย  
นะ



บัตรกิจกรรม 2

คำชี้แจง หลังจากนักเรียนศึกษาบัตรเนื้อหาสาระที่ 2 แล้วให้นักเรียนหาผลหารของ  
จำนวนเชิงซ้อน ที่กำหนดให้ 2 ข้อ (ข้อละ 5 คะแนน)

$$1. \frac{2+5i}{2+i} = \frac{2+5i}{\dots\dots\dots} \cdot \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad (4 \text{ จุด : 1 คะแนน})$$

$$= \frac{2(\dots\dots\dots)+2(\dots\dots\dots)+5i(\dots\dots\dots)+5i(\dots\dots\dots)}{2(\dots\dots\dots)+2(\dots\dots\dots)+i(\dots\dots\dots)+i(\dots\dots\dots)}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \quad (i^2 = \dots\dots\dots)$$

$$= \dots\dots\dots$$

ดังนั้น  $\frac{2+5i}{2+i} = \dots\dots\dots$  Ans

กำลังคิด คิดเดียว  
ก็คิดได้ สบายมาก





### บัตรเฉลยกิจกรรม 2

**คำชี้แจง** หลังจากนักเรียนศึกษาบัตรเนื้อหาสาระที่ 2 แล้วให้นักเรียนหาผลหารของ  
จำนวนเชิงซ้อน ที่กำหนดให้ 2 ข้อ (ข้อละ 5 คะแนน)

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{2+5i}{2+i} &= \frac{2+5i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} \\
 &= \frac{2(2)+2(-i)+5i(2)+5i(-i)}{2(2)+2(-i)+i(2)+i(-i)} \\
 &= \frac{4+(-2i)+10i+-5i^2}{4+(-2i)+2i+-i^2} = \frac{4+5+(-2i)+10i}{4-i^2} \\
 &= \frac{9-2i+10i}{4+1} \\
 &= \frac{9+8i}{5}
 \end{aligned}$$

$i^2 = -1$

ดังนั้น  $\frac{2+5i}{2+i} = \frac{9+8i}{5}$       Ans...



$\frac{9+8i}{5}$  สดุดใจไปเลยเรา  
เพื่อน ๆ ทำได้ไหม



$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{3-7i}{4+i} &= \frac{3-7i}{4+i} \cdot \frac{4-i}{4-i} \\
 &= \frac{3(4)+3(-i)-7i(4)-7i(-i)}{4(4)+4(-i)+i(4)+i(-i)} \\
 &= \frac{12+(-3i)+(-28i)+7i^2}{16+(-4i)+4i+(-i^2)} = \frac{12+7i^2+(-3i)+(-28i)}{16-i^2} \\
 &= \frac{12-7+(-31i)}{16+1} \quad (i^2 = -1) \\
 &= \frac{5-31i}{17} \\
 \text{ดังนั้น} \quad \frac{3-7i}{4+i} &= \frac{5-31i}{17} \quad \text{Ans...}
 \end{aligned}$$

พวกหนูจะ  
ตั้งใจเรียนให้  
ดีที่สุดเลยคะ

ครูจะพาพวก  
เธอไปสุสานชัย  
.....



### แบบสรุปผลการเรียนรู้

ชุดการเรียนรู้การสอนรายบุคคล เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน ชื่อกลุ่ม.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอภิปรายกลุ่มแล้วสรุปผลการเรียนรู้จากการศึกษาชุดการเรียนรู้การสอน

ตามหัวข้อต่อไปนี้

สรุปผลการเรียนรู้

1. การหารจำนวนเชิงซ้อนมีกี่วิธี วิธีใดบ้าง

.....

.....

.....

2. จงหาผลหารของ  $\frac{(2,3)}{(3,4)}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาผลหารของ  $\frac{2+3i}{3+4i}$

.....

.....

.....

.....

.....



### แนวทางการตอบแบบสรุปผลการเรียนรู้

#### 1. การหารจำนวนเชิงซ้อนมีกี่วิธี วิธีใดบ้าง

การหารจำนวนเชิงซ้อนมี 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้สูตร ถ้า  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}\right)$

วิธีที่ 2 ใช้สังยุคของตัวหาร  $\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right) \cdot \left(\frac{c-di}{c-di}\right)$

#### 2. จงหาผลหารของ $\frac{(2,3)}{(3,4)}$

$$\begin{aligned}\frac{(2,3)}{(3,4)} &= (2,3) \cdot \left(\frac{3}{3^2+4^2}, -\frac{4}{3^2+4^2}\right) \\ &= (2,3) \cdot \left(\frac{3}{9+16}, \frac{-4}{9+16}\right) = (2,3) \cdot \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right) \\ &= \left(2\left(\frac{3}{25}\right) - (3)\left(\frac{-4}{25}\right), 2\left(\frac{-4}{25}\right) + (3)\left(\frac{3}{25}\right)\right) \\ &= \left(\frac{6}{25} + \frac{12}{25}, -\frac{8}{25} + \frac{9}{25}\right) = \frac{(18,1)}{(25,25)}\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{(2,3)}{(3,4)} = \frac{(18,1)}{(25,25)}$  Ans...

#### 2. จงหาผลหารของ $\frac{2+3i}{3+4i}$

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{3+4i} &= \frac{2+3i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{2(3)+2(-4i)+3i(3)+3i(-4i)}{3(3)+3(-4i)+4i(3)+4i(-4i)} \\ &= \frac{6+(-8i)+9i-12i^2}{9-12i+12i-16i^2} = \frac{6+12+i}{9-16i^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{18+i}{9+16} = \frac{18+i}{25} \\ \text{ดังนั้น } \frac{2+3i}{3+4i} &= \frac{18+i}{25} \text{ หรือ } \frac{18}{25} + \frac{i}{25} \text{ Ans...}\end{aligned}$$



แบบทดสอบหลังเรียน ชุดการเรียนรู้การสอน  
รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5  
เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย x ทับข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(2,2)}{(1,1)}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด

ก. (2,0)

ข. (-2,0)

ค. (2,2)

ง. (-2,2)

2. ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{1-i}{2+i}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{1+3i}{5}$

ข.  $\frac{-1+3i}{5}$

ค.  $\frac{1-3i}{5}$

ง.  $\frac{-1-3i}{5}$

3.  $\frac{1-i}{3-4i}$  มีผลหารเท่ากับข้อใด

ก.  $\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$

ข.  $\frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$

ค.  $-\frac{7}{25} - \frac{4}{25}i$

ง.  $\frac{7}{25} + \frac{1}{25}i$

4. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{2-2i}{1+3i}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

ข.  $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

ค.  $\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$

ง.  $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

5. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $(x,y)(1,-2) = (-7,-16)$  แล้ว  $(x,y)$  มีคำตอบตรงกับข้อใด

ก. (5, -6)

ข. (6,5)

ค. (5, 6)

ง. (-6, -5)



6. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(1,3)}{(2,-1)}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

ข.  $\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$

ค.  $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

ง.  $\left(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

7. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{3+2i}{4+3i}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$

ข.  $-\frac{18}{25} + \frac{1}{25}i$

ค.  $-\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$

ง.  $\frac{18}{25} - \frac{1}{25}i$

8. ค่าของ  $\frac{-3-i}{3+i}$  มีค่าตรงกับข้อใด

ก.  $-1$

ข.  $0$

ค.  $1$

ง.  $2$

9. ถ้า  $\frac{x+yi}{2+i} = 2+i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนในข้อใด

ก.  $-3-4i$

ข.  $3-4i$

ค.  $3+4i$

ง.  $-3+4i$

10. ถ้า  $\frac{2+3i}{x+yi} = 1+2i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนในข้อใด

ก.  $\frac{8+i}{5}$

ข.  $\frac{8-i}{5}$

ค.  $\frac{-8-i}{5}$

ง.  $\frac{-8+i}{5}$

เพื่อความฝันของ  
ทุกคน  
ไปให้ถึงนะคะ



แบบทดสอบหลังเรียน ชุดการเรียนรู้การสอน ชุดที่ 2

รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง ให้นักเรียนกาเครื่องหมาย x ทับข้อที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

- ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(4,4)}{(1,1)}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด
 

ก. (4,0)	ข. (-4,0)
ค. (4,4)	ง. (-4,4)
- ผลหารของจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{1-i}{3+i}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด
 

ก. $\frac{1+2i}{5}$	ข. $\frac{1-2i}{5}$
ค. $\frac{-1+2i}{5}$	ง. $\frac{-1-2i}{5}$
- $\frac{2-i}{4-2i}$  มีผลหารเท่ากับข้อใด
 

ก. $\frac{1}{2}$	ข. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
ค. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$	ง. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{2-3i}{1+2i}$  มีผลหารตรงกับข้อใด
 

ก. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$	ข. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$
ค. $-\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$	ง. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$
- ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $(x,y)(1,-2) = (16,-7)$  แล้วค่าของ (x,y) มีคำตอบตรงกับข้อใด
 

ก. (5, -6)	ข. (6,5)
ค. (5, 6)	ง. (-6,-5)



6. จำนวนเชิงซ้อน  $\frac{(2,3)}{(3,-1)}$  มีผลหารตรงกับข้อใด

ก.  $\left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{10}\right)$

ข.  $\left(-\frac{3}{10}, -\frac{11}{10}\right)$

ค.  $\left(-\frac{3}{10}, \frac{11}{10}\right)$

ง.  $\left(\frac{3}{10}, \frac{11}{10}\right)$

7. ผลหารจำนวนเชิงซ้อน  $\frac{3-2i}{2+2i}$  มีคำตอบตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

ข.  $-\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$

ค.  $-\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

ง.  $\frac{1}{4} - \frac{5}{4}i$

8. ค่าของ  $\frac{-4-i}{2+i}$  ตรงกับข้อใด

ก.  $\frac{7}{5} + \frac{2}{5}i$

ข.  $-\frac{7}{5} + \frac{2}{5}i$

ค.  $-\frac{7}{5} - \frac{2}{5}i$

ง.  $\frac{7}{5} - \frac{2}{5}i$

9. ถ้า  $\frac{x+yi}{3+i} = 2-i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนใด

ก.  $7+i$

ข.  $-7+i$

ค.  $-3-4i$

ง.  $7-i$

10. ถ้า  $\frac{-3-2i}{x+yi} = 2+i$  แล้ว  $x+yi$  คือจำนวนใด

ก.  $\frac{8+i}{5}$

ข.  $\frac{8-i}{5}$

ค.  $\frac{-8-i}{5}$

ง.  $\frac{-8+i}{5}$

จะตั้งใจ ให้ดีที่สุด

ค่ะ

เพื่อน ๆ ความ



บัตรเฉลยแบบทดสอบหลังเรียน  
เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

1. ก

2. ค

3. ง

4. ข

5. ก

6. ข

7. ง

8. ก

9. ค

10. ข

อย่าเครียดไป  
เพื่อน

ข้อนี้ทำไมเราทำไม่ได้  
ต้องรีบไปศึกษา  
บทเรียนใหม่อีกรอบ



มาดูแลกันดีกว่า  
นะคะ



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน ชุด 2

1. ก    2. ข    3. ก    4. ค    5. ข  
6. ง    7. ง    8. ข    9. ง    10. ค

ให้รู้กันไปว่าจะไม่ผ่าน  
เพื่อน ๆ อย่าหัวเราะ...



### บรรณานุกรม

กระทรวงศึกษาธิการ. คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2. นครปฐมการพิมพ์, 2548.

กระทรวงศึกษาธิการ. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม ๔ . กรุงเทพฯ ฯ สกสศ. ลาดพร้าว. 2554

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. สุดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด คณิตศาสตร์ ม.5 ค014. กรุงเทพมหานคร : พัฒนาศึกษา, 2544.

จำนวนเชิงซ้อน. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก : [www.tewlek.com](http://www.tewlek.com) สืบค้น 3 กรกฎาคม 2555.

รังสรรค์ มณีเล็ก และประทุมพร ศรีวัฒนกุล. คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2. กรุงเทพฯ ฯ : วัฒนาพานิช, 2549.

เรียนรู้จำนวนเชิงซ้อน.[ออนไลน์].เข้าถึงได้จาก : [www.thaigoodview.com](http://www.thaigoodview.com) สืบค้น 5 กรกฎาคม 2555.

เรียนรู้รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน. [ออนไลน์] เข้าถึงได้จาก: [www:thaigoodview.com](http://www:thaigoodview.com) สืบค้น 8 พฤศจิกายน 2555.



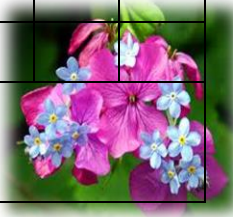
กระดาษคำตอบแบบทดสอบย่อยก่อนเรียนและหลังเรียน  
ชุดการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ชุดที่ 4 การหารจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....นามสกุล.....

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ .... / ..... โรงเรียน.....

แบบทดสอบก่อนเรียน					แบบทดสอบหลังเรียน				
ข้อ					ข้อ				
1					1				
2					2				
3					3				
4					4				
5					5				
6					6				
7					7				
8					8				
9					9				
10					10				
รวม คะแนน					รวม คะแนน				



### ตารางบันทึกคะแนน

ชุดการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

#### ชุดที่ 4 การหารจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....นามสกุล.....

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ .... / ..... โรงเรียน.....

แบบทดสอบ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	หมายเหตุ
ก่อนเรียน	10		
หลังเรียน	10		
ผลการพัฒนา			

แบบฝึกทักษะ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	หมายเหตุ
กิจกรรมที่ 1	10		
กิจกรรมที่ 2	10		
กิจกรรมที่ 3	10		
กิจกรรมกลุ่ม	10		
รวม	40		

