โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง

มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส

จัดทำโดย

เด็กหญิงวรรณภา สมนาม

เด็กชายเจตนิพันธ์ คำเพราะ

เด็กหญิงนพวรรณ หาญสุโพธิ์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ครูที่ปรึกษาโครงงาน

นางสาวสุภาวดี สีตามาตร

นายวิทวัส บรรยง

โรงเรียนบ้านวังหว้า

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาขอนแก่น เขต 2

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์

ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์

เนื่องในงานศิลปหัตถกรรมนักเรียน ระดับเขตพื้นที่การศึกษา ครั้งที่ 71

ประจำปีการศึกษา 2566

โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง

มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส

จัดทำโดย

เด็กหญิงวรรณภา สมนาม

เด็กชายเจตนิพันธ์ คำเพราะ

เด็กหญิงนพวรรณ หาญสุโพธิ์

ครูที่ปรึกษาโครงงาน

นางสาวสุภาวดี สีตามาตร

นายวิทวัส บรรยง

โรงเรียนบ้านวังหว้า

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาขอนแก่น เขต ๒

รายงานฉบับนี้เป็นส่วนประกอบของโครงงานคณิตศาสตร์ ประเภทสร้างทฤษฎีหรือคำอธิบายทางคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เนื่องในงานศิลปหัตถกรรมนักเรียน ระดับเขตพื้นที่การศึกษา ครั้งที่ ๗๑

ประจำปีการศึกษา ๒๕๖๖

บทคัดย่อ

การจัดทำโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยมีวิธีการดำเนินการ ดังนี้ คณะผู้จัดทำคัดเลือกหัวข้อโครงงานจากประเด็นที่สนใจ กำหนดแนวทางและขอบเขตของการศึกษา จากนั้นศึกษาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จัดทำโมเดลความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ผลการดำเนินงานพบว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

และสำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก

คณะผู้จัดทำ

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณาจาก คุณครูสุภาวดี สีตามาตร คุณครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนบ้านวังหว้า และคุณครู วิทวัส บรรยง ที่กรุณาให้คำปรึกษา คำแนะนำ ตลอดจนให้กำลังใจคณะผู้จัดทำโครงงานเสมอมา ทำให้ โครงงานคณิตศาสตร์เรื่อง พีทาโกรัสความสวยงามของจักรวาล ฉบับนี้เสร็จสมบรูณ์ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอ กราบขอบพระคุณไว้ ณ โอกาสนี้ รวมไปถึงคณะครูผู้สอนในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นของโรงเรียนบ้านวัง หว้าทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำ การใส่ใจถามถึงความคืบหน้าในการจัดทำโครงงาน และให้กำลังใจมาโดยตลอด

ขอขอบพระคุณนางจรรยา บุญศรีประภาน ผู้อำนวยการโรงเรียนบ้านวังหว้า ที่ให้การสนับสนุนการ ดำเนินการจัดทำโครงงานคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นอย่างดี และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นทุกคน ที่ให้ กำลังใจและให้ความร่วมมือ ด้วยน้ำใจไมตรีอย่างดียิ่งตลอดมา สิ่งใดอันจะก่อให้เกิดประโยชน์แก่โรงเรียนและ ส่วนรวมจากรายงานฉบับนี้ คณะผู้จัดทำขอมอบให้คุณพ่อและคุณแม่ บูรพาจารย์และผู้มีพระคุณ และสิ่งใดที่ ผิดพลาดในโครงงานฉบับนี้คณะผู้จัดทำขอน้อมรับในคำติชม

คณะผู้จัดทำ

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ ก
กิตติกรรมประกาศ ข
สารบัญภาพ ง
สารบัญตาราง จ
บทที่ ๑ บทนำ ๑
ที่มาและความสำคัญของโครงงาน ๑
วัตถุประสงค์ของโครงงาน ๒
สมมติฐานของโครงงาน ๒
ขอบเขตของการศึกษา ๒
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ๒
บทที่ ๒ เอกสารที่เกี่ยวข้อง ๓
ตอนที่ ๑ แนวคิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม ๓
ตอนที่ ๒ แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ๖
บทที่ ๓ วิธีดำเนินการ ๑๒
ตารางการดำเนินการ ๑๒
วัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำโครงงาน ๑๓
วิธีดำเนินการ ๑๓
บทที่ ๔ ผลการดำเนินการ ๑๕
ตอนที่ ๑ การศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส ๑๕
ตอนที่ ๒ การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส ๑๖
บทที่ ๕ สรุปและอภิปรายผล ๑๗
สรุปและอภิปรายผล ๑๗
ข้อเสนอแนะ ๑๗
บรรณานุกรม ๑๘
ภาคผนวก ๑๙
ภาคผนวก ก โมเดลความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๒๐
ภาคผนวก ข ภาพการทำโครงงานของคณะผู้จัดทำ ๒๖

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ ๑ ตารางสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ๑๑

ตารางที่ ๒ ความเป็นเหตุเป็นผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ๑๑

ตารางที่ ๓ ตารางการดำเนินงานโครงงานเรื่อง พีทาโกรัส ความสวยงามของจักรวาล ๑๒

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ ๑	รูปสามเหลี่ยม (Triangle)	๓
ภาพที่ ๒	ชนิดของรูปสามเหลี่ยม	๔
ภาพที่ ๓	รูปสามเหลี่ยมแบ่งตามขนาดของมุมภายใน	๔
ภาพที่ ๔	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB	๕
ภาพที่ ๕	การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม	๕
ภาพที่ ๖	รูปปั้นครึ่งตัวของพีทาโกรัสแห่งซามอส	๖
ภาพที่ ๗	รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB ที่มี abc เป็นด้าน	๗
ภาพที่ ๘	สูตรของทฤษฎีบทพีทาโกรัส	๗
ภาพที่ ๙	ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	๙
ภาพที่ ๑๐	ความสอดคล้องของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส	๑๐
ภาพที่ ๑๑	ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ	๑๕
ภาพที่ ๑๒	แสดงการซ้อนทับกันของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้าน ตรงข้ามมุมฉากกับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก	๑๖

บทที่ ๑
บทนำ

๑. ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อความสำเร็จของการเรียนรู้ในศตวรรษที่ ๒๑ เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยให้มนุษย์มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบมีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบและถี่ถ้วน ช่วยให้คาดการณ์วางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่นๆ อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติ ให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศให้ทัดเทียมกับนานาชาติ การศึกษาคณิตศาสตร์จึงจำเป็นต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง เพื่อให้ทันสมัยและสอดคล้องกับสภาพเศรษฐกิจ สังคม และความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีที่เจริญก้าวหน้าอย่างรวดเร็วในยุคโลกาภิวัตน์

การเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) เน้นให้ผู้เรียนมีทักษะที่จำเป็นสำหรับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ ๒๑ เป็นสำคัญ นั่นคือการเตรียมผู้เรียนให้มีทักษะด้านการคิดวิเคราะห์ การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหาการคิดสร้างสรรค์ การใช้เทคโนโลยี การสื่อสารและการร่วมมือ ซึ่งจะส่งผลให้ผู้เรียนรู้เท่าทัน การเปลี่ยนแปลงของระบบเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรมและสภาพแวดล้อม สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้ (กระทรวงศึกษาธิการ, ๒๕๖๐)

การที่จะสร้างทักษะการคิดวิเคราะห์ การแก้ปัญหาการสื่อสารและการร่วมมือ ซึ่งจะส่งผลให้ผู้เรียนรู้เท่าทัน สามารถแข่งขันและอยู่ร่วมกับประชาคมโลกได้นั้น ผู้เรียนจะต้องมีความเข้าใจในเนื้อหาสาระของวิชาคณิตศาสตร์อย่างถ่องแท้ การรู้ทฤษฎีต่างๆ ที่อยู่ในศาสตร์ของคณิตศาสตร์นั้นเป็นสิ่งสำคัญ โดยเฉพาะการเรียนรู้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งเป็นเนื้อหาที่อยู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น การศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส รวมถึงเนื้อหาที่เกี่ยวข้อกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส จึงมีความสำคัญต่อผู้เรียนที่จะเป็นการสร้างความเข้าใจต่อวิชาคณิตศาสตร์ ทั้งยังจะต่อยอดไปสู่ระดับชั้นที่สูงขึ้นไปได้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส กล่าวถึงรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ความสัมพันธ์ของความยาวทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คุณสมบัติของความสัมพันธ์ดังกล่าว ได้มีการนำมาใช้ประโยชน์มากมายทางด้านสิ่งปลูกสร้าง โครงสร้างของสิ่งปลูกสร้างที่ยิ่งใหญ่ในยุคปัจจุบัน การพัฒนาแนวคิดทางด้านเทคโนโลยีก็ล้วนแล้วแต่อาศัยทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นส่วนหนึ่งแทบทั้งสิ้น ด้วยความสำคัญและแนวคิดที่น่าสนใจของทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่กล่าวมาแล้วข้างต้น คณะผู้จัดทำโครงงานจึงได้เล็งเห็นความสำคัญของการศึกษาทฤษฎีบทพีทาโกรัสให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ เพื่อที่จะได้นำทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้ประโยชน์เพื่อพัฒนาแนวคิดและพัฒนาสังคมต่อไป

๒. วัตถุประสงค์

๒.๑ เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

๒.๒ เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๓. สมมติฐานของโครงงาน

๓.๑ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

๓.๒ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

๔. ขอบเขตของการศึกษา

ขอบเขตการศึกษาด้านเนื้อหา

การจัดทำโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีขอบเขตของการศึกษาเนื้อหาดังนี้

๔.๑ สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

๔.๒ ความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๔.๓ ความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๕. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

๔.๑ ได้ทราบทฤษฎีบทพีทาโกรัสและสามรถอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้อย่างถูกต้อง

๔.๒ ได้ทราบและสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้อย่างถูกต้อง

๔.๓ ได้ใช้เวลาว่างเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้เกิดประโยชน์แก่ตนเองมากที่สุด

บทที่ ๒
เอกสารที่เกี่ยวข้อง

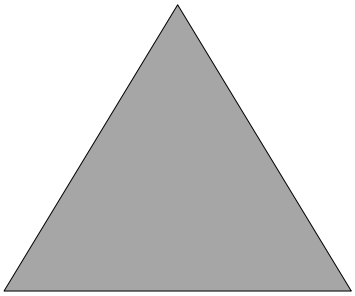
โครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในการจัดทำโครงงานครั้งนี้ คณะผู้จัดทำได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยมีรายละเอียดดังนี้

ตอนที่ ๑ แนวคิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม
ตอนที่ ๒ แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ตอนที่ ๑ แนวคิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม

๑.๑ รูปสามเหลี่ยม (Triangle)

รูปสามเหลี่ยม (Triangle) คือ รูปร่างพื้นฐานทางเรขาคณิต เป็นรูป ๒ มิติ ที่ประกอบด้วยจุดยอด ๓ จุดและด้าน ๓ ด้านที่เป็นส่วนของเส้นตรง



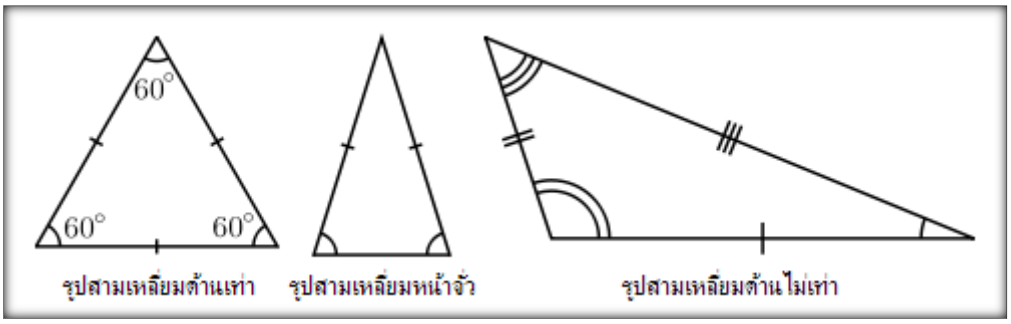
ภาพที่ ๑ รูปสามเหลี่ยม (Triangle)

๑.๒ ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

๑) รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะเป็นรูปมุมเท่าอีกด้วย นั่นคือ มุมภายในทุกมุมจะมีขนาดเท่ากัน คือ ๖๐° รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

๒) รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะมีมุมสองมุมที่มีขนาดเท่ากัน

๓) รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ด้านทุกด้านจะมีความยาวแตกต่างกัน มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่าจะมีขนาดแตกต่างกัน



ภาพที่ ๒ ชนิดของรูปสามเหลี่ยม

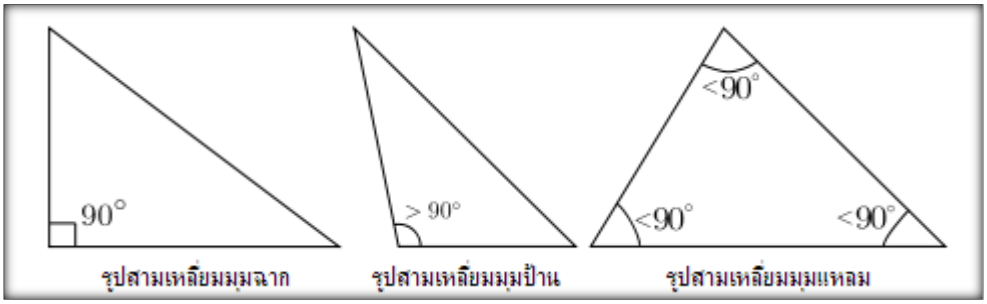
รูปสามเหลี่ยมแบ่งตามขนาดของมุมภายใน

รูปสามเหลี่ยมแบ่งชนิดตามขนาดของมุมภายในที่ใหญ่ที่สุด อธิบายด้วยองศา ได้แก่

๑) รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาด ๙๐° (มุมฉาก) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อีกสองด้าน คือ ด้านประกอบมุมฉาก

๒) รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาดใหญ่กว่า ๙๐° (มุมป้าน)

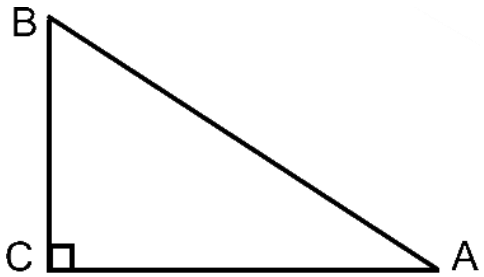
๓) รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม มุมภายในทุกมุมมีขนาดเล็กกว่า ๙๐° (มุมแหลม)



ภาพที่ ๓ รูปสามเหลี่ยมแบ่งตามขนาดของมุมภายใน

๑.๓ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมใดมุมหนึ่งมีขนาด ๙๐ องศา ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยม และอีกสองด้านที่เหลือ เรียกว่า ด้านประกอบมุมฉาก

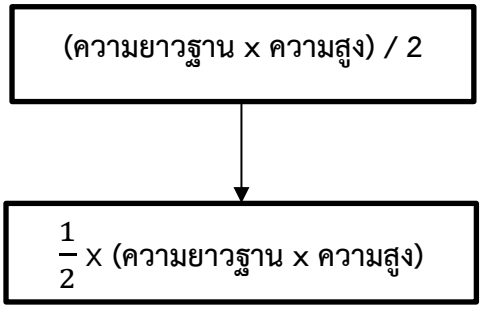


ภาพที่ ๔ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB

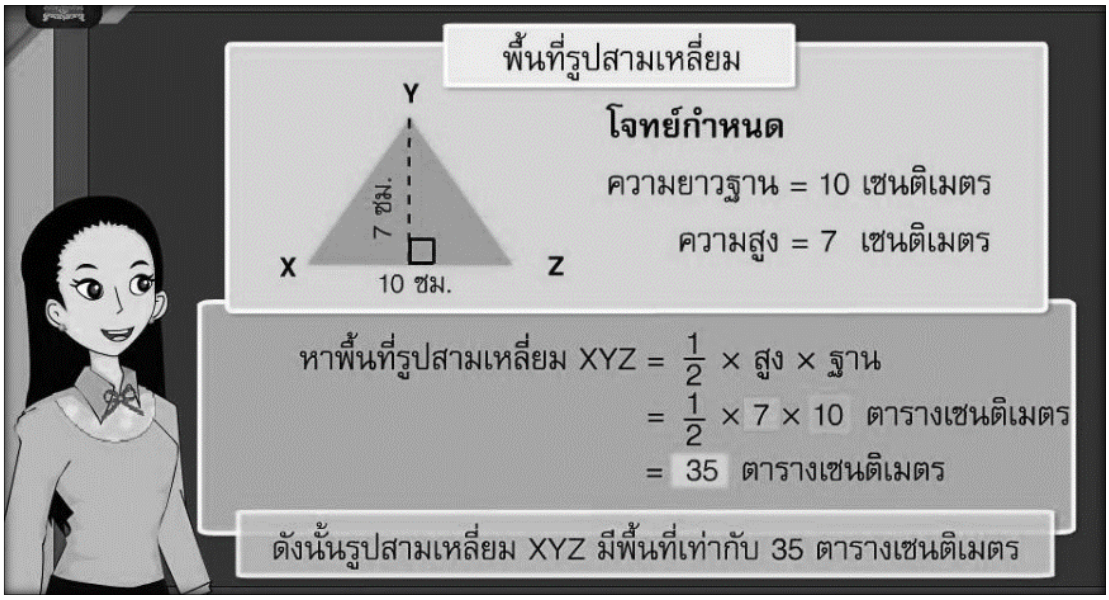
เรียก $\overline{AB}$ ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก (Hypotenuse)
เรียก $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ว่า ด้านประกอบมุมฉาก (Legs of a right triangle)

๑.๔ การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม คือ การคูณความยาวของฐานกับส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมแล้วนำผลลัพธ์ไปหารด้วยสอง กล่าวคือ



ตัวอย่าง การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม



ภาพที่ 5 การหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม

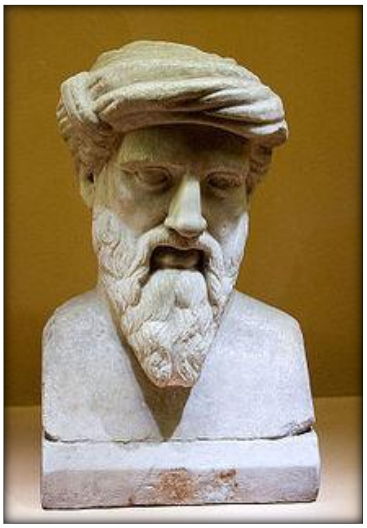
ตอนที่ ๒ แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๒.๑ ประวัติของพีทาโกรัส

พีทาโกรัส (Pythagoras) เกิดเมื่อประมาณ ๕๗๐ ปีก่อนคริสตกาล และเป็นบุตรชายของพีทาอิสและเนซาร์คัส พีทาโกรัสแห่งซามอส เป็นนักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก สันนิษฐานว่าเขาเกิดที่เกาะซามอส แห่งทะเลเอเจียน (Aegean) (ปัจจุบันอยู่ในประเทศกรีซ) ในวัยหนุ่ม พีทาโกรัสได้ศึกษากับปราชญ์ที่มีชื่อเสียงหลายคน รวมทั้งทาเลสแห่งมิเลตุส (Thales of Miletus, ประมาณ ๖๔๐-๕๔๖ ปีก่อนคริสต์ศักราช) ซึ่งเป็นผู้แนะนำให้พีทาโกรัส ไปศึกษาต่อทางคณิตศาสตร์และแขนงวิชาต่างๆ ที่อียิปต์ หลังจากที่พีทาโกรัสใช้เวลาศึกษาที่อียิปต์อยู่นานพอสมควร เขาก็ได้เดินทางไปศึกษาต่อที่บาบิโลเนีย

พีทาโกรัสได้เดินทางกลับมายังเกาะซามอส เมื่ออายุประมาณ ๕๕ ปี ขณะนั้น เกาะซามอสตกอยู่ภายใต้การปกครองของเปอร์เซีย เขาจึงอพยพไปยังเมืองโครโตนา (Crotona) ซึ่งเป็นเมืองท่าของกรีกโบราณ ที่ตั้งอยู่ทางตอนใต้ของอิตาลีในปัจจุบัน ที่นั่นพีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักศึกษาขึ้น โดยมีชื่อว่า “สำนักพีทาโกเรียน (Pythagorean School) มีตราประจำสำนักเป็นรูปดาวห้าแฉก และมีปรัชญาประจำสำนัก คือ จำนวนครอบครองจักรวาล (Numbers rule the universe) ซึ่งในสมัยนั้นจำนวน หมายถึง จำนวนตรรกยะบวกและศูนย์

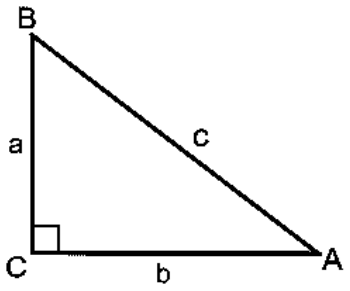
สำนักที่พีทาโกเรียนนี้มีชื่อเสียงในด้านปรัชญา คณิตศาสตร์ และ ธรรมชาติวิทยาหรือวิทยาศาสตร์สมัยใหม่ นอกจากนี้ ยังเป็นที่เชื่อและยอมรับกันว่าพีทาโกรัสเป็นผู้ที่พิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจนเป็นที่ยอมรับเป็นคนแรก ถึงแม้ความจริงเกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสจะมีหลักฐานที่เชื่อกันว่า ทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นที่รู้จักกันมาก่อน



ภาพที่ ๖ รูปปั้นครึ่งตัวของพีทาโกรัสแห่งซามอส ในพิพิธภัณฑ์คาปิโตลิเน กรุงโรม อิตาลี

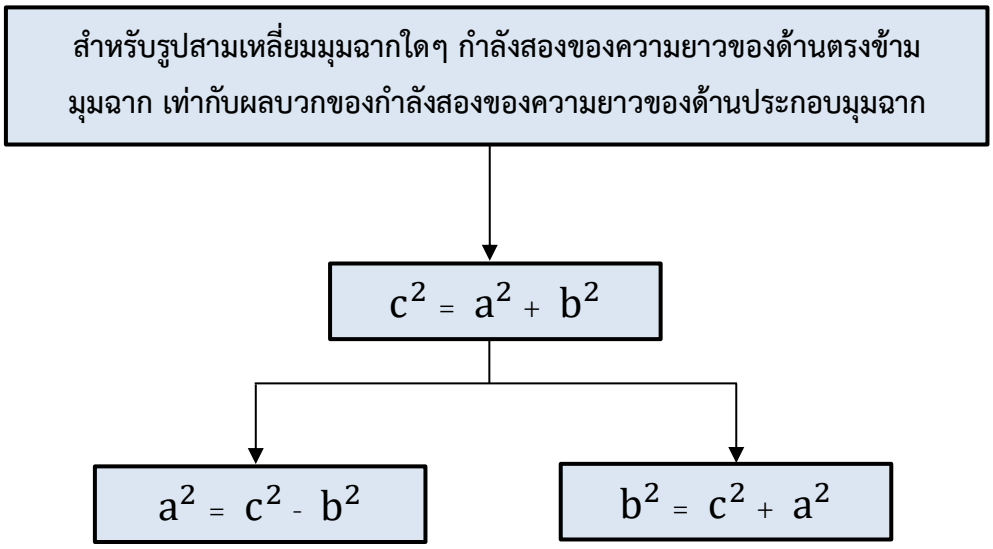
๒.๒ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras' theorem) ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ได้ดังนี้



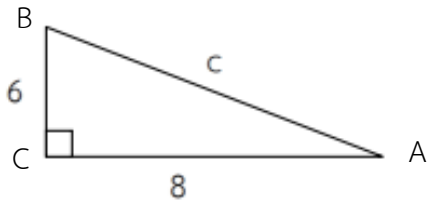
ภาพที่ ๗ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACB ที่มี abc เป็นด้าน

เมื่อกำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังภาพที่ ๗
โดย c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน
จะได้ **ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ** คือ



ภาพที่ ๘ สูตรของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ตัวอย่างที่ ๑ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนดให้ จงหาค่า c



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

จากโจทย์กำหนด a = ๖ หน่วย

b = ๘ หน่วย

แทนค่า $c^2 = 6^2 + 8^2$

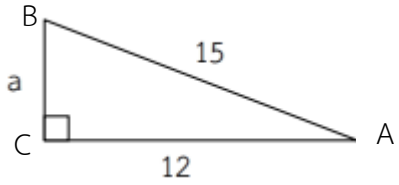
c^2 = ๓๖ + ๖๔

c^2 = ๑๐๐

ดังนั้น c = ๑๐

ตอบ ค่า c มีค่าเท่ากับ ๑๐ หน่วย

ตัวอย่างที่ ๒ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่กำหนดให้ จงหาค่า a



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

จากโจทย์กำหนด c = ๑๕ หน่วย

b = ๑๒ หน่วย

แทนค่า $15^2 = a^2 + 12^2$

a^2 = ๒๒๕ - ๑๔๔

a^2 = ๘๑

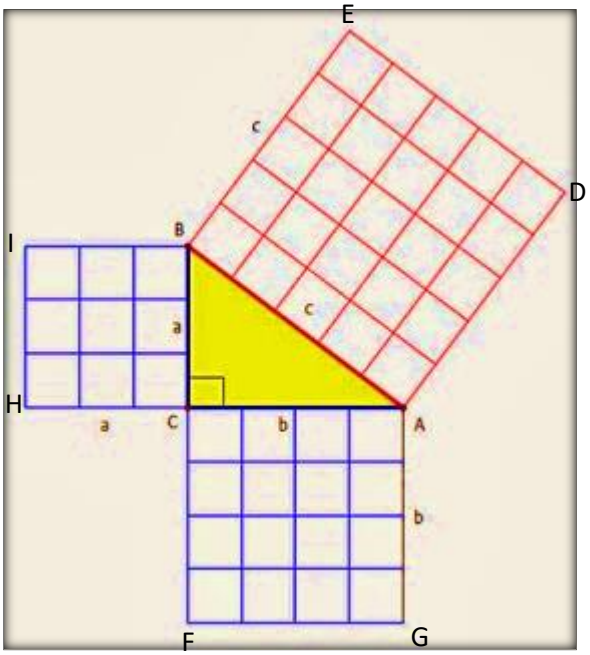
ดังนั้น a = ๙

ตอบ ค่า a มีค่าเท่ากับ ๙ หน่วย

จากการศึกษาความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ ได้มีการศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสาม-เหลี่ยมมุมฉาก โดยการศึกษาพบว่า

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก

โดยสามารถอธิบายได้ดังนี้



ภาพที่ ๙ ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก

มี AB = ๕ หน่วย

มี BC = ๓ หน่วย

มี AC = ๔ หน่วย

สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABDE รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCFG และรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACHI บนด้าน AB ด้าน BC และด้าน AC ตามลำดับ ดังภาพที่ ๙

จะได้ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABDE เท่ากับ 5^2 = ๒๕ หน่วย

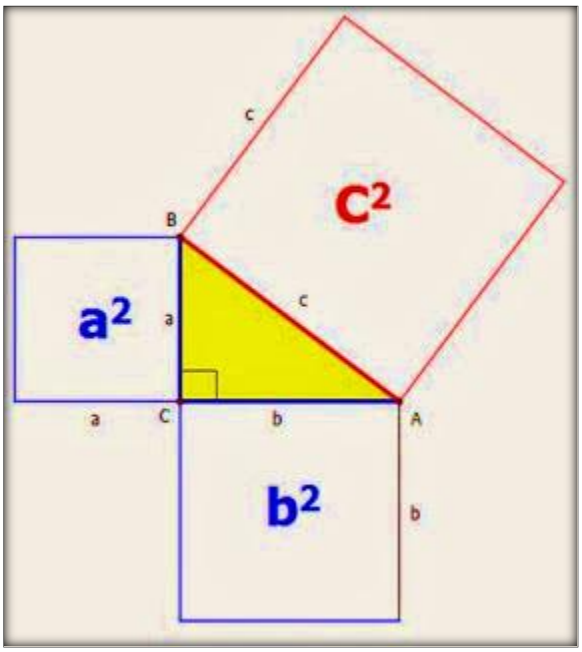
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCFG เท่ากับ 3^2 = ๙ หน่วย

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACHI เท่ากับ 4^2 = ๑๖ หน่วย

ซึ่ง $๒๕ = ๙ + ๑๖$

$๒๕ = ๒๕$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABDE เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCFG และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACHI ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่ว่า $c^2 = a^2 + b^2$



ภาพที่ ๑๐ ความสอดคล้องของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๒.๓ บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นการนำหลักการของเหตุและผลมาใช้ในการพิสูจน์ กล่าวคือ “สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก” ดังจะเห็นได้จากการพิสูจน์ตามตารางที่ ๑ ตารางสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตารางที่ ๑ ตารางสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ชุดที่	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2	$c^2 = a^2 + b^2$ หรือไม่		ΔABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	
						เท่า	ไม่เท่า	เป็น	ไม่เป็น
๑	๑๒	๙	๑๕	๑๔๔+๘๑	๒๒๕	✓		✓	
๒	๑๒	๖	๑๓	๑๔๔+๓๖	๑๖๙		✓		✓
๓	๑๒	๑๒	๑๘	๑๔๔+๑๔๔	๓๒๔		✓		✓
๔	๔	๗.๕	๘.๕	๑๖+๕๖.๒๕	๗๒.๒๕	✓		✓	
๕	๘	๑๕	๑๗	๖๔+๒๒๕	๒๘๙	✓		✓	

จากตารางที่ ๑ ตารางสำรวจรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พบว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมชุดที่ ๑, ๔ และ ๕ มีค่าของกำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน หรือ $c^2 = a^2 + b^2$ นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นการนำผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาเป็นเหตุ และนำเหตุมาเป็นผล ซึ่งอธิบายได้ดังตารางที่ ๒

ตารางที่ ๒ ความเป็นเหตุเป็นผลของทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส	บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส
เหตุ ↓ **ผล**	มีรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	กำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเท่ากับ ผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสอนด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้น
	กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม	รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

บทที่ ๓
วิธีดำเนินการ

โครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส ในการจัดทำโครงงานครั้งนี้คณะผู้จัดทำได้ดำเนินการโดยมีรายละเอียดดังนี้

๑. ตารางการดำเนินงาน
๒. วัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำโครงงาน
๓. วิธีดำเนินการ

๑. ตารางการดำเนินงาน

การจัดทำโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีตารางกำหนดการทำกิจกรรมต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ ๒ ตารางการดำเนินงานโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส

ลำดับ	วัน/เดือน/ปี	กิจกรรม	ผู้รับผิดชอบ
๑	๑-๕ ส.ค. ๒๕๖๖	คัดเลือกหัวข้อโครงงานจากประเด็นที่น่าสนใจ	คณะผู้จัดทำทุกคน
๒	๑๐ ส.ค. ๒๕๖๖	ส่งหัวข้อโครงงานให้ครูที่ปรึกษา	คณะผู้จัดทำทุกคน
๓	๑๔-๑๘ ส.ค. ๒๕๖๖	กำหนดแนวทางและขอบเขตของการศึกษาร่วมกับครูที่ปรึกษา	คณะผู้จัดทำทุกคนและครูที่ปรึกษา
๔	๒๑-๒๕ ส.ค. ๒๕๖๖	ศึกษาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมทุกชนิดโดยเน้นศึกษาไปที่รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	คณะผู้จัดทำทุกคนและครูที่ปรึกษา
๕	๒๘-๓๑ ส.ค. ๒๕๖๖	ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	คณะผู้จัดทำทุกคนและครูที่ปรึกษา
๖	๑-๙ ก.ย. ๒๕๖๖	จัดทำโมเดลความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	คณะผู้จัดทำทุกคนและครูที่ปรึกษา
๗	๑๒-๑๖ ก.ย. ๒๕๖๖	สรุปการศึกษารวบรวม ข้อค้นพบ ความรู้ ทฤษฎี หลักการ แนวคิด ระเบียบวิธี และผลลัพธ์จากการศึกษาต่อครูที่ปรึกษาเพื่อรับการวิพากษ์และแก้ไขจากครูที่ปรึกษา	คณะผู้จัดทำทุกคนและครูที่ปรึกษา

ตารางที่ ๒ ตารางการดำเนินงานโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส (ต่อ)

ลำดับ	วัน/เดือน/ปี	กิจกรรม	ผู้รับผิดชอบ
๘	๑๙-๒๓ ก.ย. ๒๕๖๖	จัดพิมพ์รูปเล่มโครงงาน	คณะผู้จัดทำทุกคน
๙	๒๖-๓๐ ก.ย. ๒๕๖๖	จัดทำบอร์ดนำเสนอโครงงานและแผ่นพับแนะนำโครงงาน	คณะผู้จัดทำทุกคน

๒. วัสดุอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำโครงงาน

การจัดทำโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีการใช้วัสดุและอุปกรณ์ในการจัดทำโครงงานดังนี้

๑) หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒
๒) สมุด
๓) ปากกา
๔) กระดาษแข็งสีสันต่างๆ
๕) กรรไกร
๖) คัตเตอร์
๗) กาวสองหน้า
๘) แผ่นพลาสวูด
๙) แผ่นอะคริลิคใส
๑๐) บอร์ด

๓. วิธีดำเนินการ

การจัดทำโครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีวิธีดำเนินการจัดทำโครงงานดังนี้

๓.๑ คณะผู้จัดทำโครงงานร่วมปรึกษาหารือกันเพื่อกำหนดประเด็นที่น่าสนใจของการเรียนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น

๓.๒ เสนอหัวข้อโครงงานที่คณะผู้จัดทำสนใจที่จะศึกษาต่อ ครูที่ปรึกษาโครงงานเพื่อขอรับคำปรึกษาจากคุณครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อชี้แนะแนวทางการทำโครงงาน

๓.๓ กำหนดแนวทางการจัดทำโครงงานและขอบเขตของการศึกษาร่วมกับครูที่ปรึกษาโครงงาน

๓.๔ ศึกษาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมใดมุมหนึ่งมีขนาด ๙๐ องศา ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยม และอีกสองด้านที่เหลือ เรียกว่า ด้านประกอบมุมฉาก และจากการศึกษาพบว่า ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ คือ **สำหรับรูป**

สามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

๓.๕ ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยศึกษาจากการสร้างโมเดลของความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังภาพที่ ๙ ซึ่งจะพบว่า ถ้านำพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบวกกัน จะได้เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นั่นคือ **สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก**

๓.๖ จัดทำโมเดลเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่กล่าวว่า **สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก** หรือ $c^2 = a^2 + b^2$ และ **สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก** โดยจัดทำโมเดลหลายรูปแบบด้วยกัน ดังนี้

- ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็น ๓ ๔ ๕
- ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็น ๖ ๘ ๑๐
- ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็น ๕ ๑๒ ๑๓
- ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็น ๙ ๑๒ ๑๕

๓.๗ สรุปการศึกษารวบรวม ข้อค้นพบ ความรู้ ทฤษฎี หลักการ แนวคิด ระเบียบวิธีและผลลัพธ์จากการศึกษาต่อครูที่ปรึกษาเพื่อรับการวิพากษ์และแก้ไขจากครูที่ปรึกษา

๓.๘ จัดพิมพ์รูปเล่มโครงงาน

๓.๙ จัดทำบอร์ดนำเสนอโครงงานและแผ่นพับแนะนำโครงงาน

บทที่ ๔
ผลการดำเนินงาน

โครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีวัตถุประสงค์ ๑) เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ ๒) เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยจะนำเสนอผลการดำเนินงานตามลำดับวัตถุประสงค์ของโครงงาน ดังนี้

ตอนที่ ๑ การศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส
ตอนที่ ๒ การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ตอนที่ ๑ การศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส

๑.๑ ประวัติของพีทาโกรัส (Pythagoras History)

พีทาโกรัส (Pythagoras) เกิดเมื่อประมาณ ๕๗๐ ปีก่อนคริสตกาล และเป็นบุตรชายของพีทาอิสและเนซาร์คัส พีทาโกรัสแห่งซามอส เป็นนักปราชญ์และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก สันนิษฐานว่าเขาเกิดที่เกาะซามอส แห่งทะเลเอเจียน (Aegean) (ปัจจุบันอยู่ในประเทศกรีซ) พีทาโกรัสได้ก่อตั้งสำนักศึกษาขึ้น โดยมีชื่อว่า “สำนักพีทาโกเรียน” (Pythagorean School) ซึ่งมีชื่อเสียงในด้านปรัชญา คณิตศาสตร์ และธรรมชาติวิทยาหรือวิทยาศาสตร์สมัยใหม่

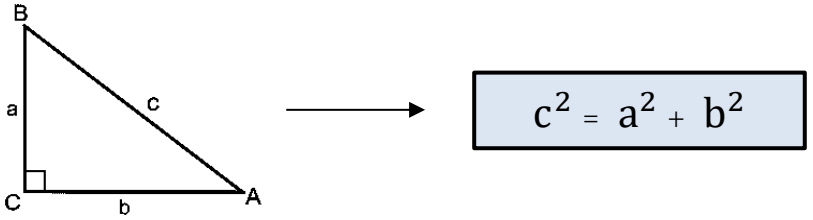
๑.๒ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras’ theorem) ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ

โดย c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแต่ละด้าน

จะได้ ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ คือ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$ ดังภาพที่ ๑๒

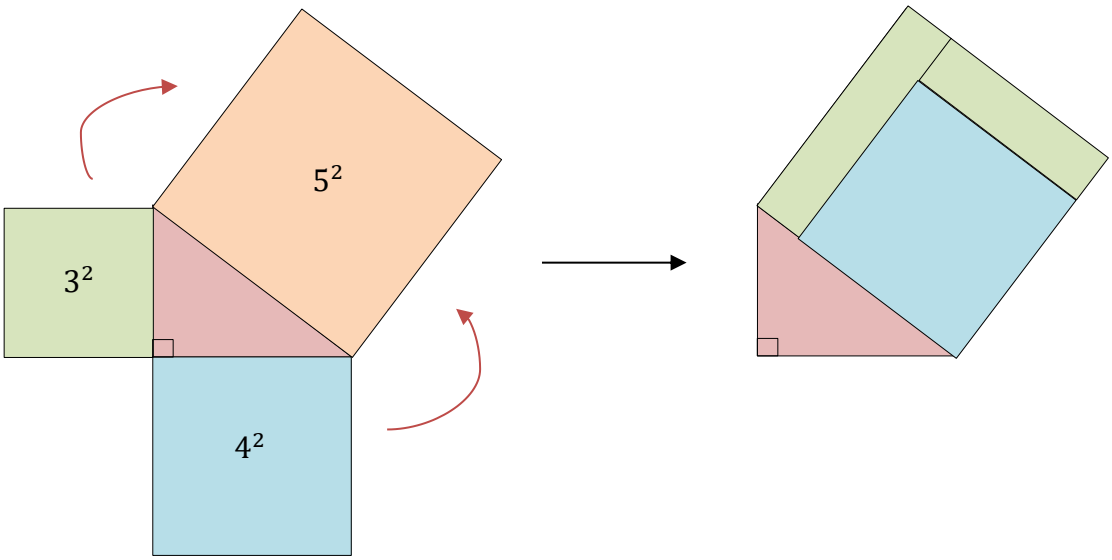


ภาพที่ ๑๑ ความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ

ตอนที่ ๒ การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยศึกษาจากการสร้างโมเดลของความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะพบว่า เมื่อนำพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสของด้านประกอบมุมฉากทั้งสองของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบวกกัน จะได้เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นั่นคือ **สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก** ดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เป็น ๓ ๔ ๕



ภาพที่ ๑๒ แสดงการซ้อนทับกันของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉากกับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก

บทที่ ๕
สรุปและอภิปรายผล

โครงงานเรื่อง พีมหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส มีวัตถุประสงค์ ๑) เพื่อศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยใช้โมเดลรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และ ๒) เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยสามารถสรุปและอภิปรายผลได้ดังนี้

๑. สรุปและอภิปรายผล

โครงงานเรื่อง มหัศจรรย์โมเดลพีทาโกรัส สามารถสรุปและอภิปรายผลตามวัตถุประสงค์ได้ดังนี้

ตอนที่ ๑ การศึกษาและอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก หรือ $c^2 = a^2 + b^2$

ตอนที่ ๒ การศึกษาความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก

๒. ข้อเสนอแนะ

๒.๑ สามารถนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปต่อยอดในการเรียนในระดับที่สูงขึ้นไปได้

๒.๒ สามารถศึกษาเรื่องรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและรูปสามเหลี่ยมชนิดอื่นๆ เพิ่มเติมเพื่อในไปประยุกต์ใช้ในการสร้างโมเดลอื่นๆ ที่เป็นประโยชน์ต่อการเรียนคณิตศาสตร์ต่อไป

บรรณานุกรม

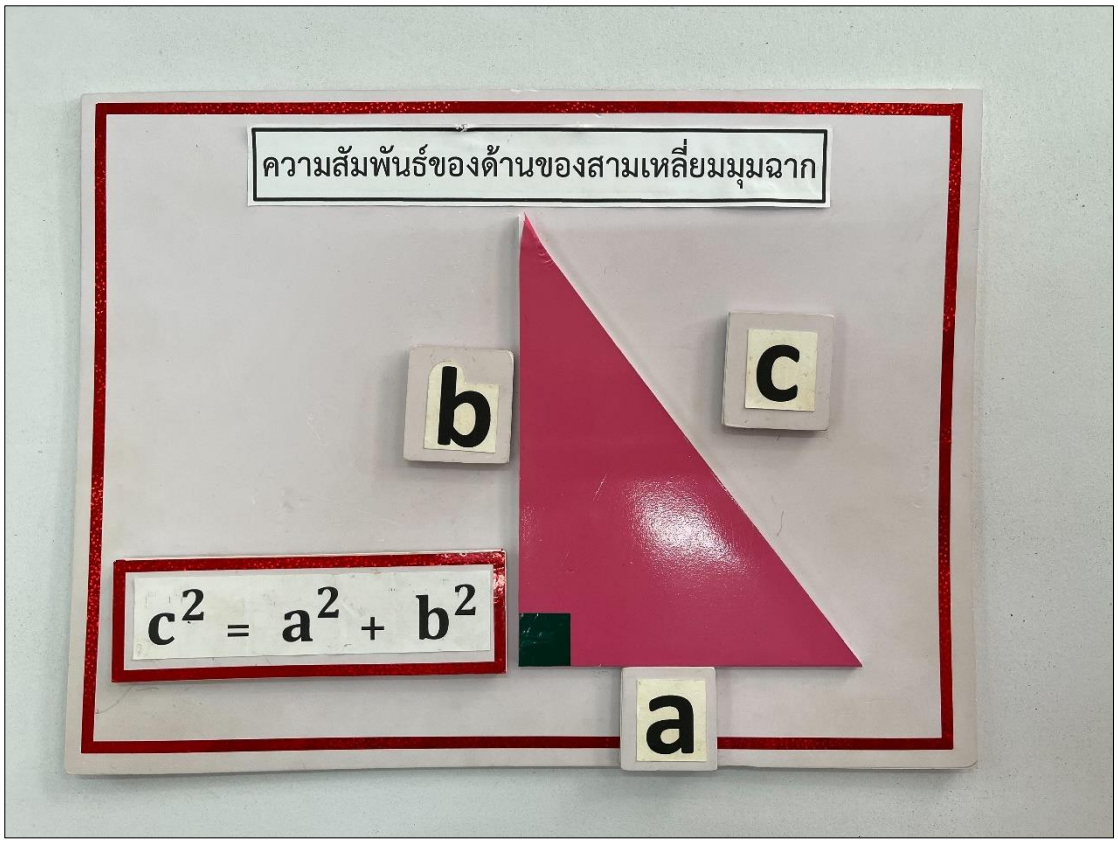
สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑**. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, ๒๕๖๒.

กฤษณะ โสขุมา. **หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๒ เล่ม ๑**. กรุงเทพมหานคร : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, ๒๕๖๒

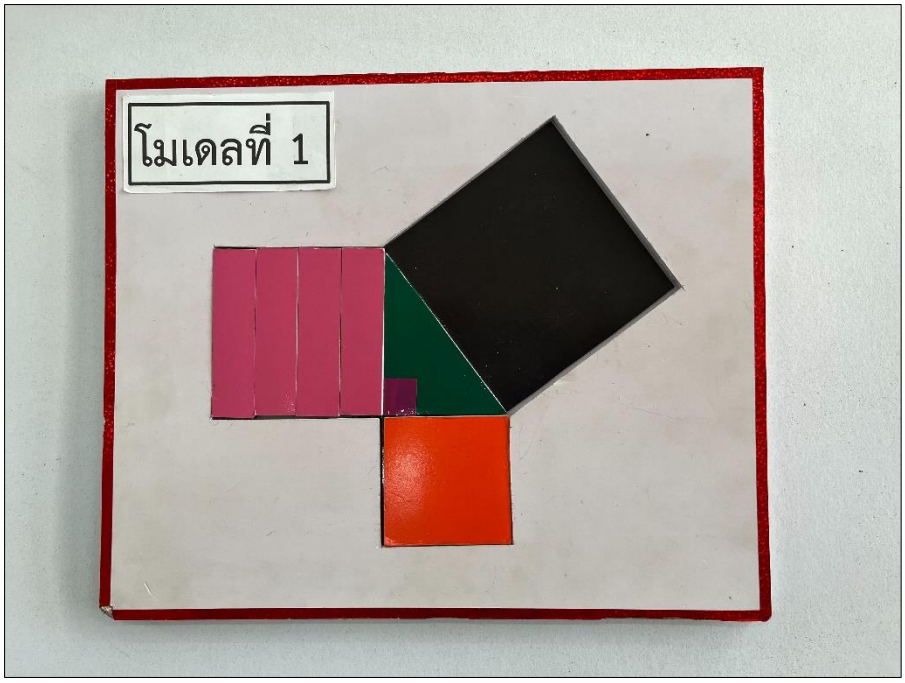
ภาคผนวก

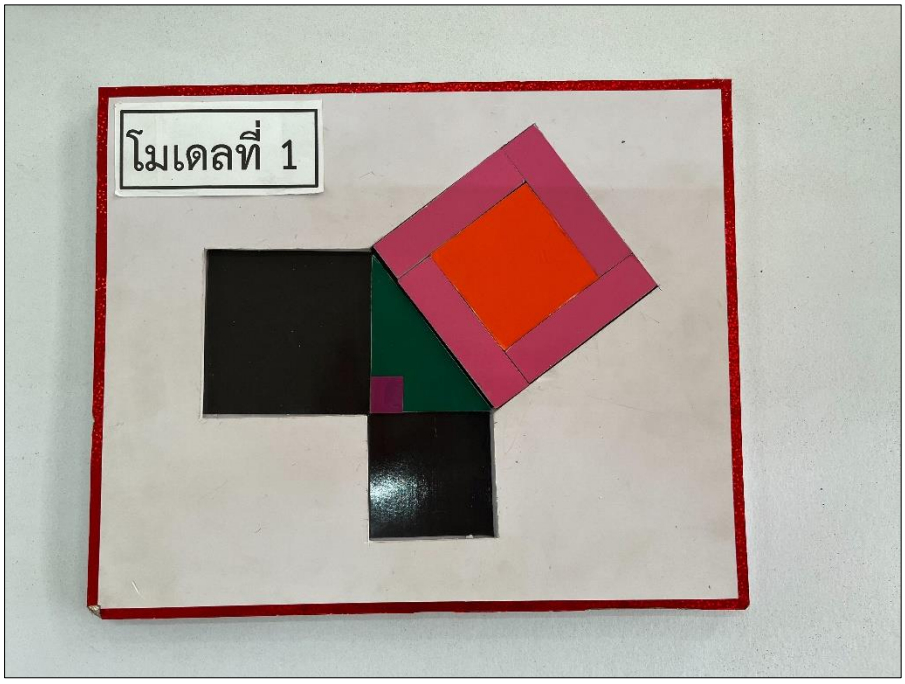
ภาคผนวก ก

โมเดลความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส

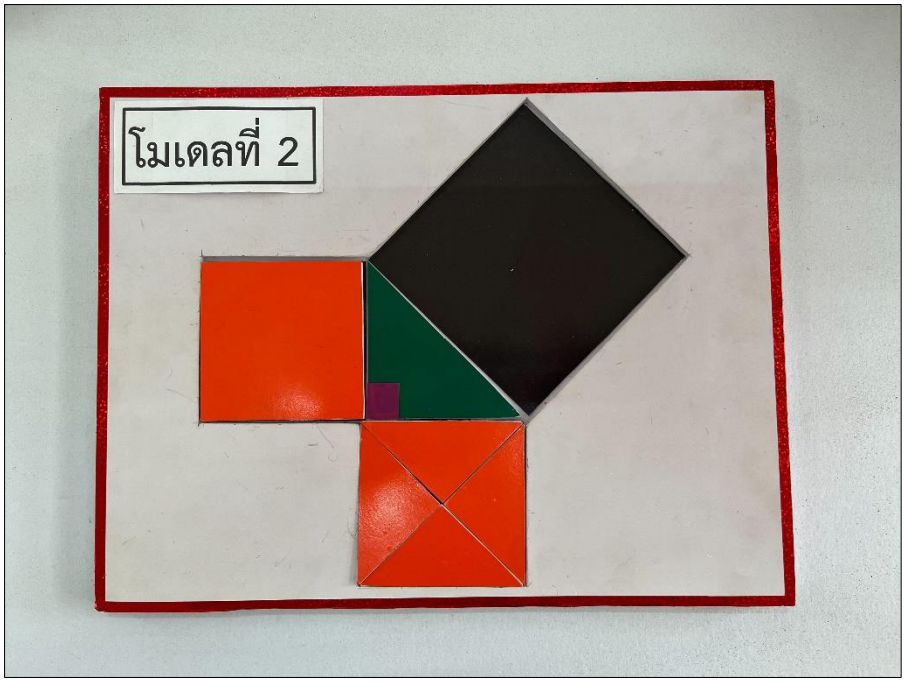


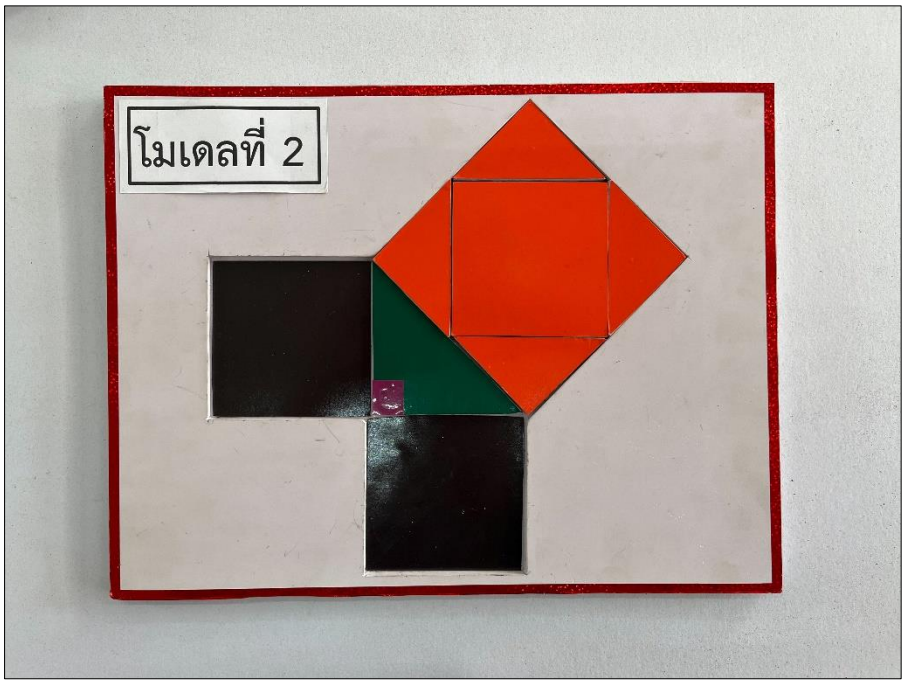
โมเดลที่ ๑ ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



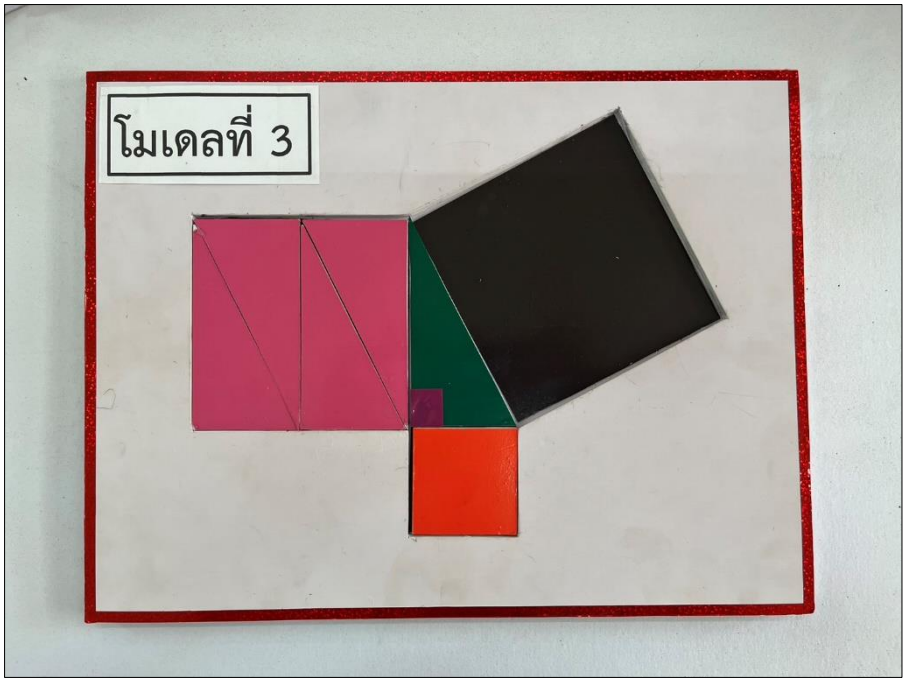


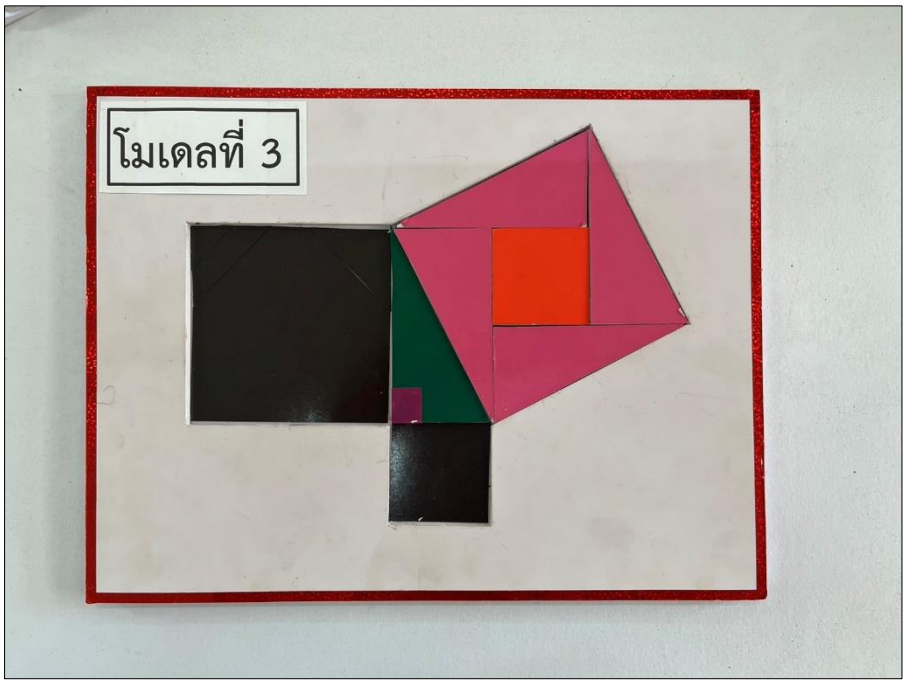
โมเดลที่ ๒ ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



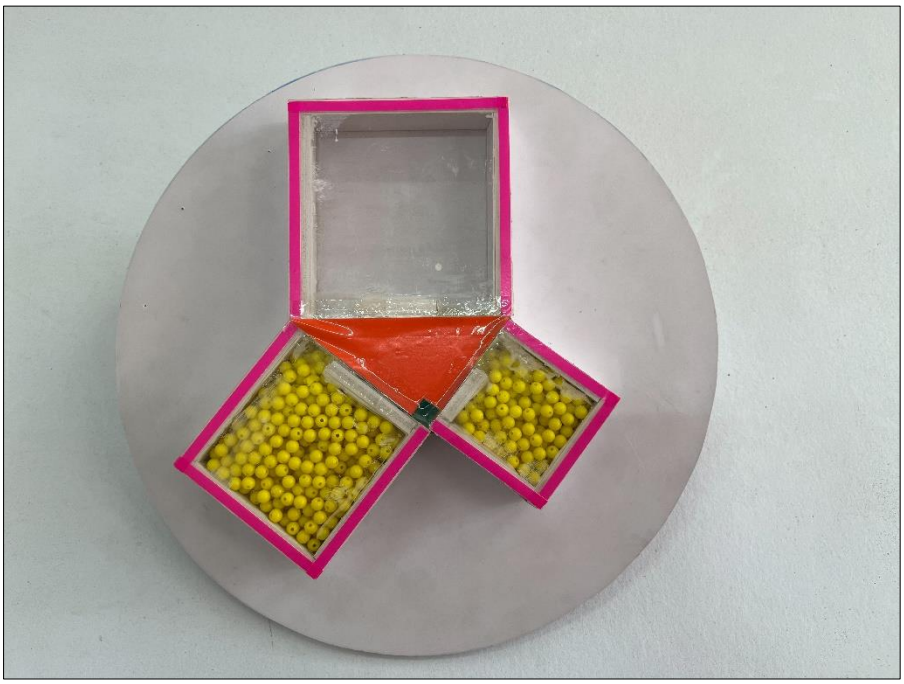


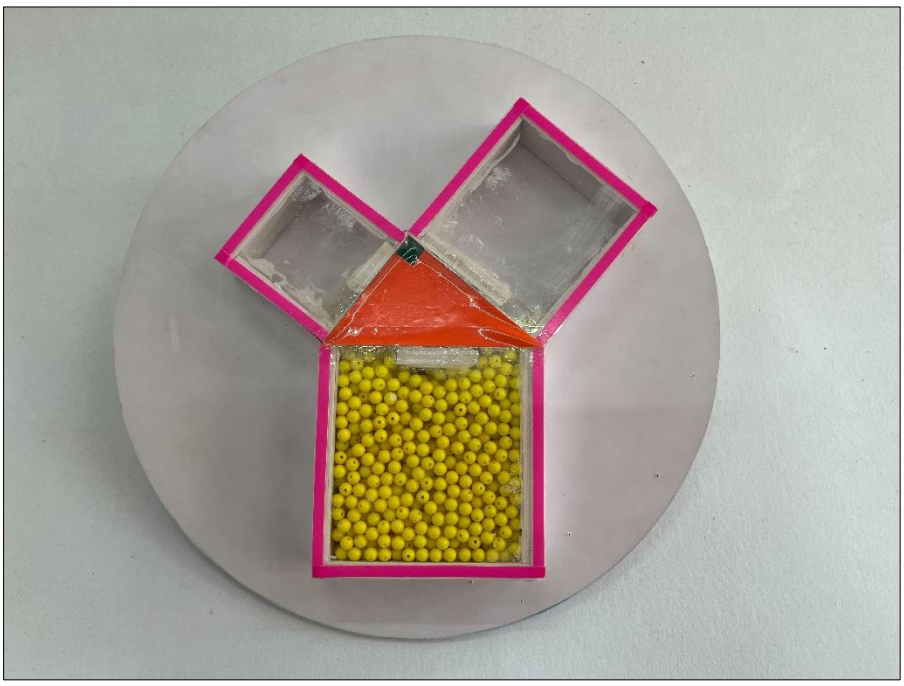
โมเดลที่ ๓ ความสัมพันธ์ของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



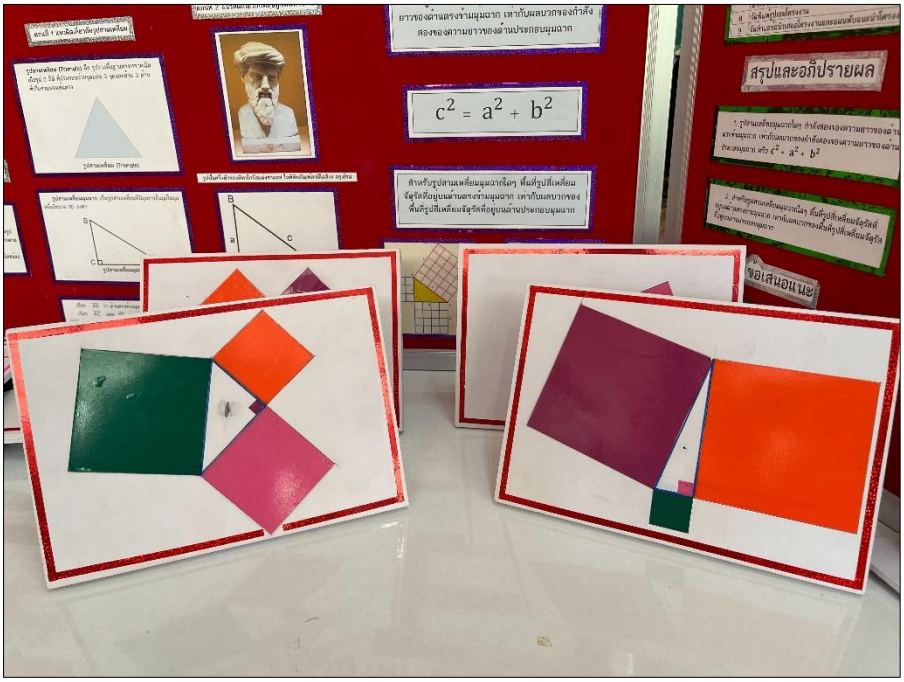


โมเดลพีทาโกรัส





โมเดลสื่อการสอนเรื่องพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



ภาคผนวก ข

ภาพการทำโครงงานของคณะผู้จัดทำ

ภาพการทำโครงงานของคณะผู้จัดทำ

โรงเรียนบ้านวังหว้า

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาขอนแก่น เขต 2