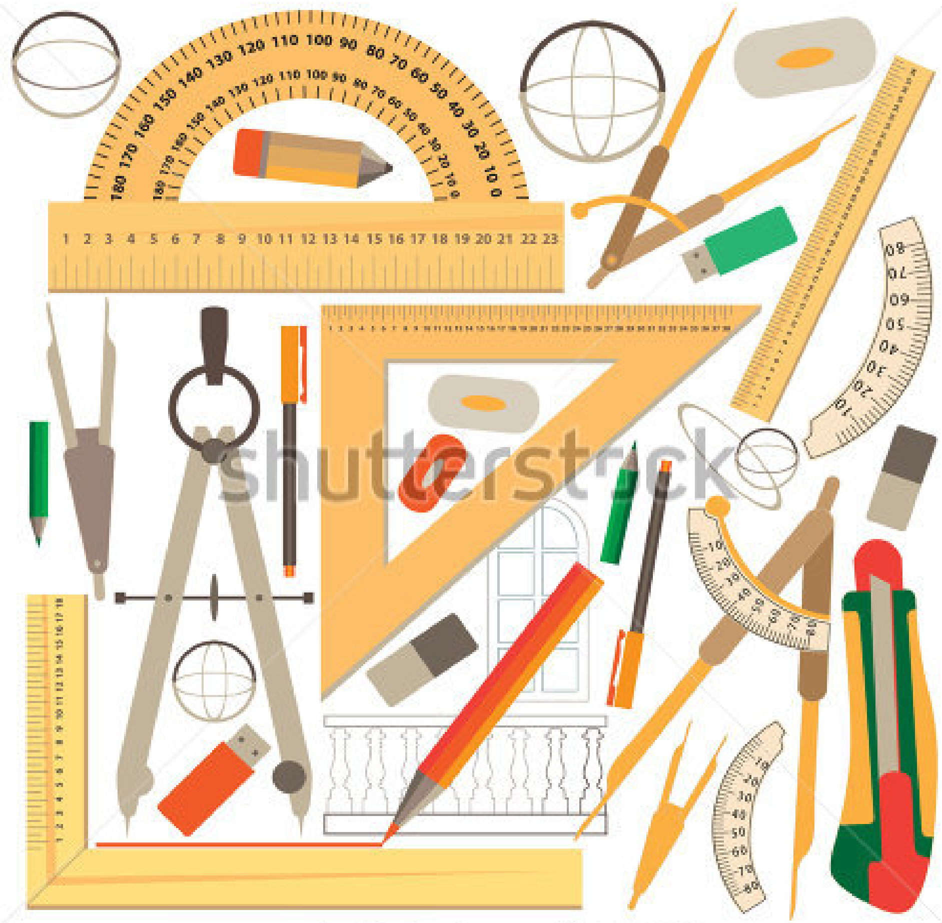
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง เมตริกซ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชุดที่ 2

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์



นางรติกร เส้งสุ้น

ตำแหน่ง ครูชำนาญการ โรงเรียนเสาธงวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 12

คำนำ

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เมตริกซ์ **ชุดที่ 2 เรื่อง** การคูณเมตริกซ์ จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรโรงเรียนเสาธงวิทยา โดยยึดเนื้อหาสาระตามสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ และได้ค้นคว้าจากตำราหลายเล่ม โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีความรู้ ความเข้าใจ มีทักษะในการคิดคำนวณ เรื่อง เมตริกซ์ และสามารถนำความรู้ ความเข้าใจ รวมถึงทักษะทางคณิตศาสตร์ ไปใช้ในชีวิตประจำวัน และเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในระดับสูงต่อไป

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณผู้บริหาร คณะครูอาจารย์โรงเรียนเสาธงวิทยาทุกท่าน ที่ให้ความรู้ให้คำปรึกษาในการจัดทำ ขอขอบพระคุณผู้เชี่ยวชาญทุกท่านที่กรุณาตรวจสอบความสอดคล้องและให้ข้อเสนอแนะ คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไข และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะไปทดลองใช้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะ คำแนะนำ จนทำให้แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เมตริกซ์เสร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอน พัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนให้สูงขึ้น และเป็นส่วนหนึ่งในการยกระดับคุณภาพการศึกษาให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

รติกร เส้งสุ้น

วัตถุประสงค์การทำแบบฝึกทักษะ

1. เพื่อให้นักเรียนมีความรู้เรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
2. เพื่อให้นักเรียนมีทักษะ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และสามารถเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์กับวิชาอื่นๆ ได้
3. เพื่อให้นักเรียนมีทัศคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

สารบัญ

ชื่อเรื่อง **หน้า**

ส่วนประกอบแบบฝึกทักษะ

1. เอกสารนี้เป็นแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง เมตริกซ์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำขึ้น 4 ชุด ดังนี้

ชุดที่ 1 เรื่องเมตริกซ์ การบวกลบเมตริกซ์

ชุดที่ 2 เรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

ชุดที่ 3 เรื่องดีเทอร์มินันท์ อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์

ชุดที่ 4 เรื่องการใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

2. แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมฉบับนี้ เป็นชุดที่ 2 เรื่อง การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ ประกอบด้วย

2.1 คำแนะนำการใช้แบบฝึกสำหรับครู

2.2. คำแนะนำการใช้แบบฝึกสำหรับนักเรียน

2.3 ขั้นตอนการเรียนแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

2.4 เนื้อหา ตัวอย่าง

2.5 แบบฝึกทักษะ เฉลยแบบฝึกทักษะ

แบบฝึกทักษะที่ 1 การคูณเมตริกซ์ ด้วยเมตริกซ์ 1

แบบฝึกทักษะที่ 2 การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ 2

2.6 แบบทดสอบหลังเรียน

2.7 เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะ

(สำหรับครู)

การใช้แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่องเมตริกซ์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ชุดที่ 1 เรื่องเมตริกซ์ การบวกลบเมตริกซ์ ครูผู้สอนเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุตามวัตถุประสงค์ ครูผู้สอนจึงควรศึกษารายละเอียดการใช้แบบฝึกทักษะ ดังนี้

1. ครูศึกษาแบบฝึกทักษะและอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกชุดก่อนที่จะนำไปจัดการเรียนการสอน
2. ครูเตรียมแบบฝึกทักษะให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดและประเมินผลเพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอนและวิธีการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะอย่างชัดเจน และประโยชน์ที่ได้รับจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ด้วยแบบฝึกทักษะ
5. ครูแจกแบบฝึกทักษะ เพื่อให้นักเรียนได้ศึกษารายละเอียดของแต่ละแบบฝึกทักษะให้เข้าใจ และปฏิบัติกิจกรรมตามแบบฝึกทักษะ
6. ครูให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาให้ความช่วยเหลือนักเรียนเมื่อพบปัญหา
7. เมื่อนักเรียนได้ศึกษาและปฏิบัติกิจกรรมตามแบบฝึกทักษะแล้ว สรุปเนื้อหาเกี่ยวกับความรู้นั้นๆ ร่วมกัน
8. ครูสรุปบทเรียนอีกครั้ง
9. นักเรียนทำแบบฝึกทักษะครบทั้ง 4 ชุดแล้ว ทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
10. การจัดชั้นเรียนอาจจัดให้นักเรียนศึกษาเป็นรายบุคคลหรือรายกลุ่มก็ได้

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะ

(สำหรับนักเรียน)

1. นักเรียนอ่านคำชี้แจงและคำแนะนำในการทำแบบฝึกทักษะให้เข้าใจก่อนทำกิจกรรมทุกครั้ง

2. นักเรียนศึกษาสาระการเรียนรู้ขอชุดแบบฝึกทักษะให้เข้าใจ แล้วลงมือทำแบบทักษะตามลำดับ

3. เมื่อนักเรียนมีปัญหาหรือทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ ให้กลับไปอ่านสาระการเรียนรู้หรือศึกษาตัวอย่างอีกครั้ง หรือศึกษาครูผู้สอน

4. การเขียนคำตอบของชุดแบบฝึกทักษะให้นักเรียนทำด้วยความรอบคอบ ถูกต้องสะอาดเรียบร้อย

5. ฝึกปฏิบัติตามแบบฝึกทักษะตรวจสอบคำตอบตามเฉลย ถ้าไม่ผ่ายเกณฑ์ ให้กลับไปทบทวนใหม่

6. สรุปผลการเรียน ประเมิน ปรับปรุงและพัฒนาตนเอง

7. การศึกษาแบบฝึกทักษะจะไม่บรรลุผลสำเร็จ ถ้านักรียนขาดความสื่อสัตย์ในการทำแบบฝึกทักษะ

แผนภูมิขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะ

ศึกษารายละเอียดของแบบฝึกทักษะ

↓

จัดเตรียมสื่อ วัสดุอุปกรณ์ที่ระบุไว้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้

↓

ดำเนินการใช้แบบฝึกทักษะ

1. ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1.1 แจ้งวัตถุประสงค์ที่นักเรียนจะได้รับหลังจากปฏิบัติกิจกรรม

1.2 แนะนำสิ่งที่นักเรียนต้องปฏิบัติ

1.3 ทบทวนความรู้โดยการสนทนาซักถาม

2. ขั้นสอน

2.1 ครูสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้

2.2 นักเรียนศึกษาแบบฝึกทักษะ

2.3 นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมตามที่ระบุไว้ในแบบฝึกทักษะ

3. ขั้นสรุป

สรุป แลกเปลี่ยน เรียนรู้

↓

ทดสอบหลังเรียน (Post-test)

↓

ผลการประเมิน → ไม่ผ่าน → ปรับปรุง

↓ ผ่าน

แบบฝึกฉบับสมบูรณ์และเผยแพร่

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่องเมตริกซ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชุดที่ 1 เรื่อง การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

4.การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

บทนิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ ผลคูณ $A\times B$ หรือ AB คือ เมตริกซ์ $c = [c_{ij}]_{m\times r}$ โดยที่

$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$

ตัวอย่าง $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [(1\times 4)+(2\times 4)+(3\times 6)] = [32]$$

ตัวอย่าง $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 3)+(2\times 2)+(3\times 1) \\ (4\times 3)+(5\times 2)+(6\times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง $$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 4 \\ 1\times 3 & 1\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง $$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ จะเห็นว่าคูณกันไม่ได้ เพราะว่าการจับคู่คูณกันไม่พอดี

ดังนั้น AB จะหาได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนหลักของ A = จำนวนแถวของ B

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา AB และ BA

วิธีทำ $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1\times1)+((-1)\times2)+(7\times1) & (1\times1)+((-1)\times1)+(7\times(-3) & (1\times2)+((-1)\times1)+(7\times2) \\ (2\times1)+((-1)\times2)+(8\times1) & (2\times1)+((-1)\times1)+(8\times(-3) & (2\times2)+((-1)\times1)+(8\times2) \\ (3\times1)+(1\times2)+((-1)\times1) & (3\times1)+(1\times1)+((-1)\times(-3) & (3\times2)+(1\times1)+((-1)\times2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2+7 & 1-1-21 & 2-1+14 \\ 2-2+8 & 2-1-24 & 4-1+16 \\ 3+2-1 & 3+1+3 & 6+1-2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & -21 & 15 \\ 8 & -23 & 19 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $\quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+2+6 & -1-1+2 & 7+8-2 \\ 2+2+3 & -2-1+1 & 14+8-1 \\ 1-6+6 & -1+3+2 & 7-24-2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 13 \\ 7 & -2 & 21 \\ 1 & 4 & -19 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง จะได้ว่า $AB \neq BA$ แสดงว่า เมตริกซ์ที่คูณกันได้ เมื่อสลับที่แล้วคูณกันได้ จะได้ผลลัพธ์ไม่เท่ากัน เรียกว่า ขาดสมบัติการสลับที่การคูณ

ข้อสังเกต กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์

1. แม้ว่าผลคูณ AB หาค่าได้ (นิยาม) แต่ผลคูณ BA อาจหาค่าไม่ได้ (ไม่นิยาม) เช่น ถ้า A เป็น 2×3 เมตริกซ์ และ B เป็น 3×4 เมตริกซ์ จะได้ AB เป็น 2×4 เมตริกซ์ แต่ BA ไม่นิยาม เพราะว่าจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

2. แม้ว่าทั้ง AB และ BA นิยามทั้งคู่ แต่ AB กับ BA ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ดังตัวอย่าง

3. $(kA)^n = k^n A^n$ เมื่อ $n \in I^+$

เมตริกซ์เอกลักษณ์

บทนิยาม $I = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = 1$

เมื่อ $i = j$ และ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

ตัวอย่างเช่น $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 2×2

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 3×3

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 4×4

สมบัติเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

1.สมบัติปิดสำหรับการคูณ

ถ้า A และ B เป็น “$n \times n$ เมตริกซ์” หรือ “เมตริกซ์จัตุรัส” (square matrix) ได้ AB และ BA เป็น “$n \times n$ เมตริกซ์” นั่นคือ การคูณเมตริกซ์มีสมบัติปิด

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

2.สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า A และ B เป็น “$n \times n$ เมตริกซ์” จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า $AB \neq BA$ ดังนั้น การคูณเมตริกซ์ไม่มีสมบัติการสลับที่ของการคูณ

3.สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ

ถ้า A, B และ C เป็น “$n \times n$ เมตริกซ์” แล้ว จะได้ $(AB)C = A(BC)$ นั่นคือ การคูณเมตริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ของการคูณ

4.สมบัติการมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ

การคูณเมตริกซ์ มี I เป็นเอกลักษณ์การคูณ นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ แล้ว $AI = IA = A$

5.สมบัติการแจกแจง

สำหรับเมตริกซ์ A , B , C ที่สามารถคูณกันได้

$(A + B)C = AC + BC$

$A(B + C) = AB + AC$

ข้อควรระวัง

1. AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA
2. ถ้า $AB = \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = \underline{0}$ หรือ $B = \underline{0}$
3. ถ้า $AB = AC$ โดย $A \neq \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $B = C$
4. ถ้า $AB = AC$ โดย $B \neq \underline{0}$ ไม่จำเป็นที่ $A = C$

แบบฝึกทักษะที่ 1

1. จงหาผลคูณ AB

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$AB = [1(\ldots\ldots\ldots) + 4(\ldots\ldots\ldots)]$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

$AB = [3(\ldots\ldots) + 6(\ldots\ldots.) + (-2)(\ldots\ldots.)]$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(4) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$AB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(5) $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

$AB = [8(\ldots) + 6(\ldots) + (-5)(\ldots) \quad 8(\ldots) + 6(\ldots) + (-5)(\ldots)]$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(6) A = $\begin{bmatrix} 12 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

AB =……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

7) A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 10 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$

AB = $\begin{bmatrix} 3(\dots) + 5(\dots) + 4(\dots) \\ 10(\dots) + 3(\dots) + (-6)(\dots) \end{bmatrix}$

=……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

= ……………………………………………………………………

8) $\begin{bmatrix} 5 & -14 & 6 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$

AB =……………………………………………………..

=……………………………………………………..

=……………………………………………………..

9) A = $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

AB = $\begin{bmatrix} 2(\dots) + 7(\dots) & 2(\dots) + 7(\dots) \\ 1(\dots) + 4(\dots) & 1(\dots) + 4(\dots) \end{bmatrix}$

=…………………………………………………….

=…………………………………………………….

=…………………………………………………….

10) A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

AB = …………………………………………………….

= …………………………………………………….

= …………………………………………………….

11) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

AB =…………………………………………………………….

=……………………………………………………………

=……………………………………………………………

12) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

AB = …………………………………………………………….

=…………………………………………………………….

=…………………………………………………………….

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงหาเมตริกซ์ในแต่ละข้อ

1) AB = …………………………………………………..

=………………………………………………….....

2) BA = …………………………………………………..

=………………………………………………….....

3) A^2 = ……………………………………………………....

= ……………………………………………………

4) A^3 = ……………………………………………………

=……………………………………………………

5) IA = ……………………………………………………

=……………………………………………………

6) AI = ……………………………………………………

=……………………………………………………

7) I^2 = ……………………………………………………….

= ……………………………………………………….

8) $A\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$ = ………………………………………………

=…………………………………………………….

9) $\begin{bmatrix}-8 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}B$ =……………………………………………..

=……………………………………………..

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 8 & 10\\6 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์ในแต่ละข้อ

1) AI = ………………………………………………..

2) IA = ………………………………………………...

3) I^2 = ………………………………………………

4) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 8 & 10\\6 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 0\\0 & -10 & 0\\0 & 0 & -10\end{bmatrix}$ = …………………………..

=…………………………...

4. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ จงหาเมตริกซ์ในแต่ละข้อ

1) A^2 = ………………………………………………………………..

2) B^2 = ………………………………………………………………

3) B^3 = ………………………………………………………………

4) B^3A = ……………………………………………………………..

5) A^2B = ……………………………………………………………..

6) A^2B^6 = ……………………………………………………………

5. จงหาค่า x และ y ในแต่ละข้อ

1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

=…………………………………………………………

=…………………………………………………………..

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

=…………………………………………………………

=…………………………………………………………..

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

=…………………………..……………………………

=…………………………………..……………………

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

=…………………………………………...……………

=……………………………………………………...…..

5) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \end{bmatrix}$

=…………………………………………………………

=…………………………………………………………

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1

1.

1) $AB = [1(-2) + 4(3)] = [-2 + 12] = [10]$

2) $AB = [-2(1) + 5(6)] = [-2 + 30] = [28]$

3) $AB = [3(-2) + 6(0) + (-2)(5)]$

$= [-6 + 0 + (-10)] = [-16]$

4) $AB = [5(1) + 2(-2) + 6(4)]$

$= [5 + (-4) + 24] = [25]$

5) $AB = [8(3) + 6(2) + (-5)(6) \quad 8(-2) + 6(8) + (-5)(7)]$

$= [24 + 12 + (-30) \qquad (-16) + 48 + (-35)]$

$= [6 \quad -3]$

6) $AB = [12(8) + 5(2) + (2)(4) \quad 12(5) + 5(6) + (2)(-7)]$

$= [96 + 10 + 8 \qquad 60 + 30 + (-14)]$

$= [114 \quad 76]$

7) $AB = \begin{bmatrix} 3(4) + 5(12) + 4(5) \\ 10(4) + 3(12) + (-6)(5) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 + 60 + 20 \\ 40 + 36 + 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92 \\ 46 \end{bmatrix}$

8) $AB = \begin{bmatrix} 5(6) + 14(9) + 6(5) \\ 6(6) + 3(19) + (7)(5) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 30 + 126 + 30 \\ 36 + 27 + 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66 \\ 98 \end{bmatrix}$

9) $AB = \begin{bmatrix} 2(4) + 7(-1) & 2(-7) + 7(2) \\ 1(4) + 4(-1) & 1(-7) + 4(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

10) $AB = \begin{bmatrix} 3(1) - 2(-4) & 3(3) - 2(5) \\ 1(1) + 0(-4) & 1(3) + 0(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

11) $AB = \begin{bmatrix} 1(4)+5(0)+2(3) & 1(-10)+5(4)+2(5) & 1(0)+5(10)+2(2) \\ 3(4)-1(0)+8(3) & 3(-10)-1(4)+8(5) & 3(0)-1(10)+8(2) \\ 7(4)+1(0)+6(3) & 7(-10)+1(4)+6(5) & 7(0)+1(10)+6(2) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 20 & 54 \\ 36 & 6 & 6 \\ 46 & -36 & 22 \end{bmatrix}$

12) $AB = \begin{bmatrix} 12 & 0 & -16 \\ 20 & 8 & 4 \\ 4 & -12 & 24 \end{bmatrix}$

2.

1) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$

2) $BA = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

3) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$

4) $A^3 = A(A^2) = \begin{bmatrix} 24 & 68 \\ 34 & 75 \end{bmatrix}$

5) $IA = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

6) $AI = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

7) $I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8) $A\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 20\\10 & 15\end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix}-8 & 0\\0 & -8\end{bmatrix}B = \begin{bmatrix}-24 & -8\\-16 & 0\end{bmatrix}$

3.

1) $AI = \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 8 & 10\\6 & -1 & 0\end{bmatrix}$

2) $IA = \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 8 & 10\\6 & -1 & 0\end{bmatrix}$

3) $I^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\4 & 8 & 10\\6 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 0 & 0\\0 & -10 & 0\\0 & 0 & -10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & -50 & -30\\-40 & -80 & -100\\-60 & 10 & 0\end{bmatrix}$

4.

1) $A^2 = \begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2) $B^2 = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

3) $B^3 = \begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}$

4) $B^3A = \begin{bmatrix}24 & 0 & 0\\0 & 16 & 0\\0 & 0 & 8\end{bmatrix}$

5) $A^2B = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6) $A^2B^6 = \begin{bmatrix} 576 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 68 \end{bmatrix}$

5.

1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

ตอบ $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

ตอบ $x = \frac{3}{8}$, $y = \frac{7}{4}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

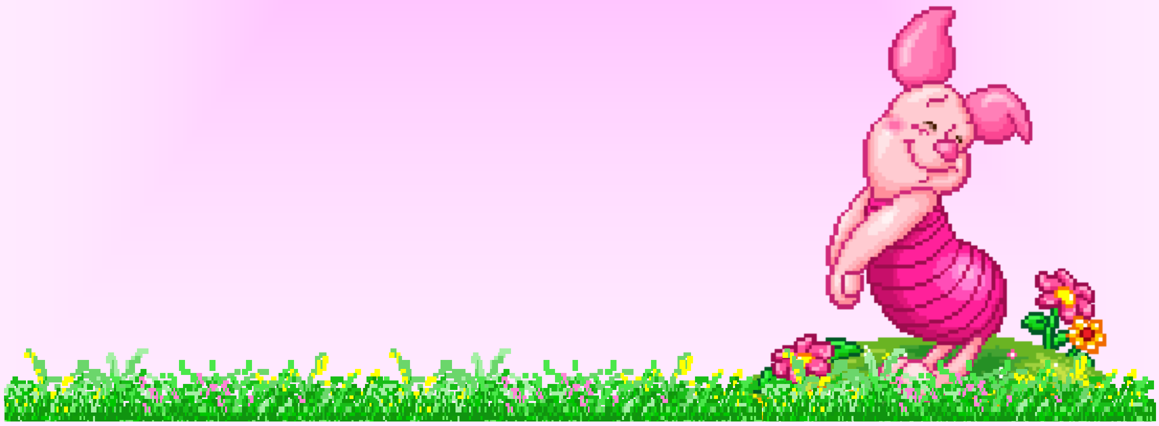
ตอบ $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{16}{5}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

ตอบ $x = 3$, $y = 12$

5) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \end{bmatrix}$

ตอบ $x = 2$, $y = 3$



แบบฝึกทักษะที่ 2

จงหาผลคูณต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

....

....

....

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

....

....

....

4. $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$

....

....

....

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

6. $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

7. $\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

8. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

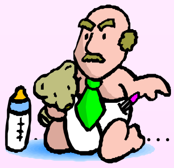
....

....

....

....

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$



13. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

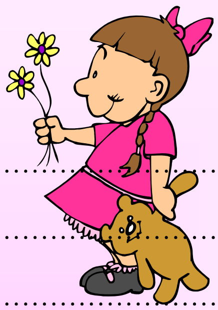
15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$



....

....

....

....

20. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

....

....

....

....

2) BA

....

....

....

....

3) พิจารณาดูว่า AB = BA หรือไม่

....

....

....

....

4) A^2

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

5) B^2

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

6) A^3

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

7) B^3

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

8) $(A + B)(A - B)$

9) $(A + B)^2$

10) $(A - B)^2$

11) พิจารณาดูว่า $(A + B)(A – B) = A^2 – B^2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

12) พิจารณาดูว่า $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

13) พิจารณาดูว่า $(A - B)^2 = A^2 – 2AB + B^2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

21. กำหนด A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

....

....

....

....

....

2) BC

....

....

....

....

....

3) (AB)C

....

....

....

....

....

4) A(BC)

....

....

....

....

....

5) พิจารณาดูว่า (AB)C = A(BC)

....

....

....

....

22. กำหนด A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

....

....

....

....

2) BA

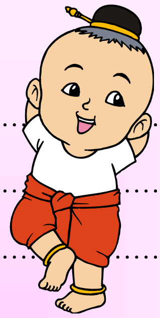
....

....

....

....

3) พิจารณาดูว่า AB = BA หรือไม่



....

....

....

....

4) (A + B)(A – B)

....

....

....

....

5) $(A + B)^2$

....

....

....

....

6) $(A - B)^2$

....

....

....

....

7) A^2

....

....

....

....

8) B^2

....

....

....

....

9) พิจารณาดูว่า $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$ หรือไม่

....

....

....

....

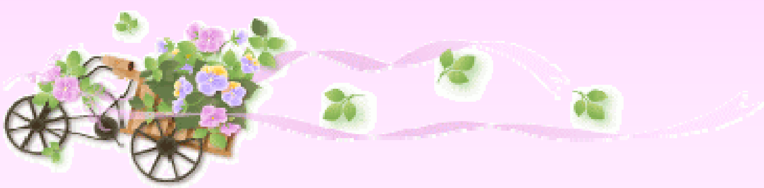
10) พิจารณาดูว่า $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ หรือไม่

....

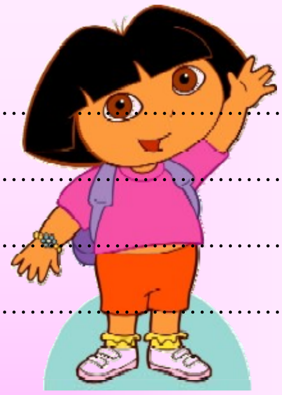
....

....

....



11) พิจารณาดูว่า $(A - B)^2 = A^2 - 2AB - B^2$ หรือไม่



……

……

……

……

23. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $A(B + C)$

……

……

……

……

2) $AB + AC$

……

……

……

……

3) $(A + B)C$

……

……

……

……

4) AC + BC

....

....

....

....

....

5) พิจารณาดูว่า A(B + C) = AB + AC หรือไม่

....

....

....

....

6) พิจารณาดูว่า (A + B)C = AC + BC หรือไม่

....

....

....

....

24. กำหนด A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

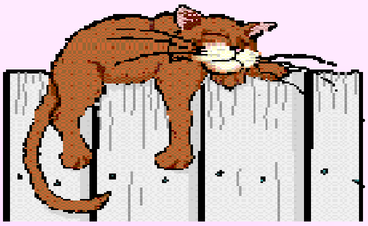
....

....

....

....

2) $(AB)^t$



....

....

....

....

3) B^tA^t

....

....

....

....

4) พิจารณาดูว่า $(AB)^t = B^tA^t$ หรือไม่

....

....

....

....

25. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

....

....

....

....

....

26. กำหนด B = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา B^{-1}

....

....

....

....

....

27.กำหนด C = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา C^{-1}

....

....

....

....

28.กำหนด D = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา D^{-1}

....

....

....

....

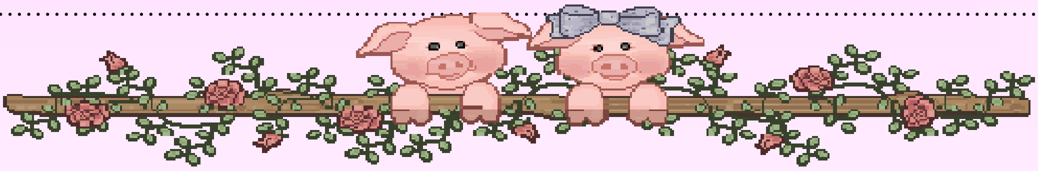
29.กำหนด E = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา E^{-1}

....

....

....

....



30.กำหนด A = $\begin{bmatrix} \sin\Theta & -\cos\Theta \\ \cos\Theta & \sin\Theta \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} เมื่อ $\boldsymbol{\theta} \in R$

31.กำหนด A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

32.กำหนด A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

33.กำหนด A = $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ D = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

2) $(AB)^{-1}$

....

....

....

....

3) A^{-1}

....

....

....

....

4) B^{-1}

....

....

....

....

5) $B^{-1}A^{-1}$

....

....

....

....

6) พิจารณาดูว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

....

....

....

....

34.ถ้า A และ B เป็น 2×2 เมตริกซ์ที่ไม่ใช่เมตริกซ์เอกฐานแล้ว จงแสดงว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

....

....

....

....

35.ถ้า A เป็น non-singular matrix ที่มีมิติ 2×2 แล้ว $(A^{-1})^{t} = (A^{t})^{-1}$

....

....

....

....

....

36.ถ้า x เป็น 2×2 เมตริกซ์ จงหาเมตริกซ์ X จากสมการ $X\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

37.ถ้า x เป็น 2×2 เมตริกซ์ จงหาเมตริกซ์ X จากสมการ $X\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

38.กำหนด $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-2}

....

....

....

....

....

....

39.กำหนด $A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A

....

....

....

....

....

....

40. กำหนด A = $\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\}$

จงพิจารณาว่าเซต A กับการคูณมีสมบัติครบทุกข้อหรือไม่

1) สมบัติปิด
2) สมบัติการสลับที่
3) สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
4) มีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ
5) มีอินเวอร์สสำหรับการคูณ

....

....

....

....

....

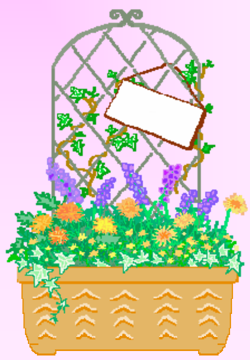
....

....

....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1

1. $\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 23 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix}$
4. $[\, ad + be + cf]$
5. [20]
6. [-14]
7. $[ae + bf + cg + dh]$
8. $\begin{bmatrix} 10 \\ 28 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 16 & 39 \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix} -10 & 29 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 4 & 8 & 20 \\ -20 & 2 & -6 \end{bmatrix}$



17. $\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 14 & 20 \\ 20 & 26 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

20. 1) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}$

2) $BA = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

3) จะเห็นว่า AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

4) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

5) $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$

6) $A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$

7) $B^3 = B \cdot B \cdot B = B^2 \cdot B = B \cdot B^2 = \begin{bmatrix} 26 & 15 \\ 45 & 26 \end{bmatrix}$

8) $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}$

9) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 27 & 27 \\ 54 & 54 \end{bmatrix}$

10) $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

11) จากข้อ 4 และ5 ได้ $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$ จะเห็นว่า $A^2 - B^2$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ

$(A+B)(A-B)$

12) $(A+B)^2$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $A^2 + 2AB + B^2$ ยกเว้น AB =BA

13) $(A-B)^2$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $A^2 - 2AB + B^2$ ยกเว้น AB =BA

21. 1) $AB = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

2) $BC = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

3) $(AB)C = \begin{bmatrix} -19 & -13 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$

4) $A(BC) = \begin{bmatrix} -19 & -13 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$

5) จะเห็นว่า (AB)C = A(BC)

22. 1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) จะเห็นว่า AB = BA

4) $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

5) $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

6) $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$

7) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

8) $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$

9) จะเห็นว่า $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ทั้งนี้เพราะว่า $AB = BA$

10) จะเห็นว่า $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ทั้งนี้เพราะว่า $AB = BA$

11) จะเห็นว่า $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ ทั้งนี้เพราะว่า $AB = BA$

23. 1) $A(B+C) = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 32 & 30 \end{bmatrix}$

2) $AB + AC = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 32 & 30 \end{bmatrix}$

3) $(A+B)C = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$

4) $AC + BC = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 21 & 28 \end{bmatrix}$

5) จะเห็นว่า $A(B+C) = AB + AC$

6) จะเห็นว่า $(A+B)C = AB + AC$

24. 1) $AB = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$

2) $(AB)^t = \begin{bmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$

3) $A^t B^t = \begin{bmatrix} 10 & 22 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$

4) $(AB)^t = A^t B^t$

25. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

27. $C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

28. $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

29. หา E^{-1} ไม่ได้ เพราะเมตริกซ์เอกฐาน หรือ $ad - bc = 0$

30. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

31. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A$

32. หา A^{-1} ไม่ได้เพราะ A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

33. 1) $AB = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

2) $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$

3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

4) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -21 \\ -8 & 13 \end{bmatrix}$

6) จะเห็นว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

34. ให้ $B^{-1}A^{-1} = X$

$B(B^{-1}A^{-1}) = BX$ (คูณด้วยเมตริกซ์ B ทางซ้ายทั้ง 2 ข้าง)

$(BB^{-1})(A^{-1}) = BX$ (เปลี่ยนกลุ่มการคูณได้)

$IA^{-1} = BX$ (อินเวอร์สการคูณ)

$A^{-1} = BX$ (เอกลักษณ์การคูณ)

$A \cdot A^{-1} = A(BX)$ (คูณด้วยเมตริกซ์ A ทางซ้ายทั้ง 2 ข้าง)

$I = AB(X)$ (อินเวอร์สการคูณ)

$(AB^{-1}) \cdot I = (AB^{-1}) \cdot (AB)X$ (คูณด้วย $(AB)^{-1}$ ทางซ้ายทั้ง 2 ข้าง)

$(AB^{-1}) = IX$ (อินเวอร์สการคูณ)

$(AB^{-1}) = X$ (เอกลักษณ์การคูณ)

$\therefore (AB^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$

35. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ซึ่ง $ad - bc \neq 0$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-c}{ad-bc} \\ \dfrac{-b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$(A^t)^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

36. $X\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}^{-1}$

$$XI = \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}-7 & 5\\-4 & 3\end{bmatrix}$$

37. $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$

$$IX = \begin{bmatrix}3 & -2\\-4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix}-1 & 4\\2 & -5\end{bmatrix}$$

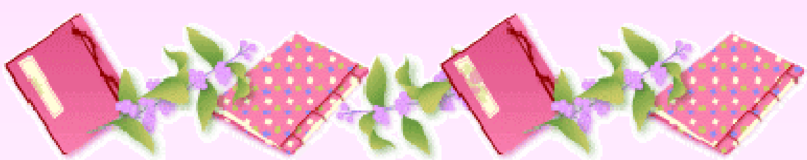
38. $A^{-2} = A^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -3\\-3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\-3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & -21\\-21 & 34\end{bmatrix}$

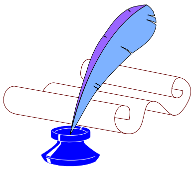
39. $\because A = (A^{-1})^{-1}$

$$= \begin{bmatrix}6 & 1\\11 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-11 & 6\end{bmatrix}$$

40. A กับการคูณ มีสมบัติครบทุกข้อ คือ

1. สมบัติปิด
2. สมบัติการสลับที่
3. สมการการเปลี่ยนกลุ่ม
4. มีเอกลักษณ์ คือ $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
5. มีอินเวอร์สการคูณ





แบบฝึกทักษะเรื่องเมตริกซ์

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

โรงเรียนเสาธงวิทยา