

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค 33202
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เล่มที่ 3
อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

จัดทำโดย
นางสาวสุภาภรณ์ แบ่งชั้น
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ
โรงเรียนเทพศิรินทร์สมุทรปราการ
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 6
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค 33202
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เล่มที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

นางสาวสุภาภรณ์ แบ่งปัน
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ
โรงเรียนเทพศิรินทร์ สมุทรปราการ
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 6
สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้เรื่องแคลคูลัสเบื้องต้น รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค33202 ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 5 เล่ม ดังนี้

- เล่มที่ 1 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
- เล่มที่ 2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
- เล่มที่ 3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- เล่มที่ 4 อนุพันธ์อันดับสูง
- เล่มที่ 5 การประยุกต์ของอนุพันธ์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มจัดทำขึ้นเพื่อเป็นสื่อประกอบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 6 รหัสวิชา ค33202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 สอดคล้องกับสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มาตรฐานการเรียนรู้ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรของโรงเรียนเทพศิรินทร์ สมุทรปราการ ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ เนื้อหาที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการและด้านคุณลักษณะ

สำหรับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 3 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ผู้เรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบที่กำหนดให้ได้ ส่งเสริมให้ผู้เรียนและผู้สนใจสามารถศึกษาเนื้อหาและฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์กับโจทย์ที่หลากหลาย อันทำให้ผู้เรียนรู้จักคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ ได้มากขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้ เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นต่อไป มีการเฉลยคำตอบอย่างละเอียด ผู้เรียนสามารถวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ด้วยตนเองได้ในชุดแบบฝึกทักษะเล่มนี้

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ การค้นคว้าหาความรู้ของผู้เรียนและเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ พร้อมทั้งสามารถยกระดับคุณภาพการศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

สุภาภรณ์ แบ่งชั้น



สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับครูผู้สอน	1
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับผู้เรียน	2
ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	3
ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน	4
แบบทดสอบก่อนเรียน	5
ใบความรู้ที่ 3.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ	9
แบบฝึกทักษะที่ 3.1	16
ใบความรู้ที่ 3.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (ต่อ)	21
แบบฝึกทักษะที่ 3.2	24
แบบทดสอบหลังเรียน	27
แบบบันทึกคะแนน	31
บรรณานุกรม	32
ภาคผนวก	33
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	34
เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.1	35
เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.2	43
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	47

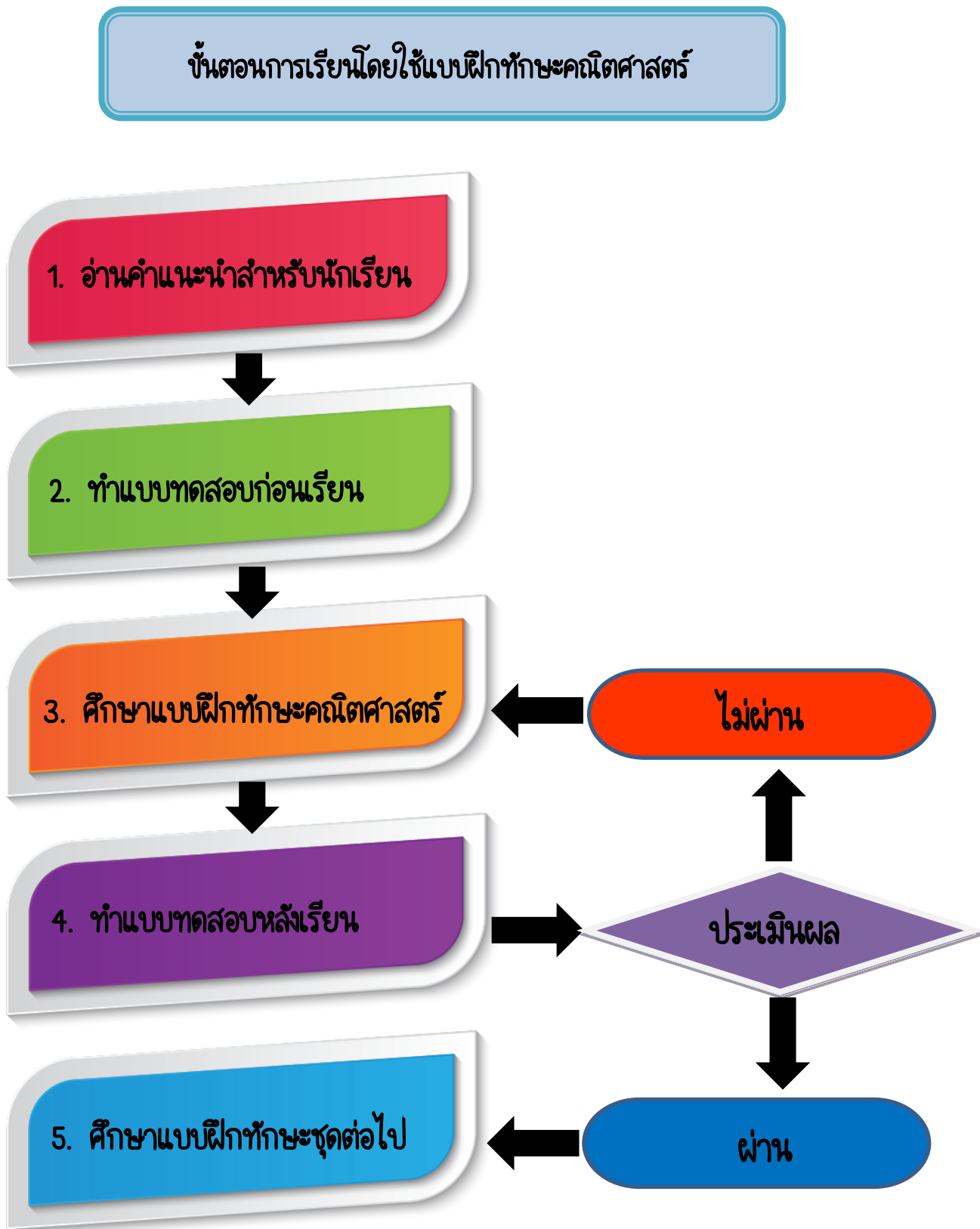


1. ครูผู้สอนศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ครูผู้สอนศึกษาและทำความเข้าใจในเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ครูผู้สอนให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
4. ครูผู้สอนดำเนินการกิจกรรมการเรียนรู้ตามลำดับขั้นตอน
5. ครูผู้สอนให้คำแนะนำและความช่วยเหลือผู้เรียนเมื่อเกิดปัญหา ตามความเหมาะสมและตามศักยภาพของผู้เรียนแต่ละคน
6. ครูผู้สอนให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
7. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ใช้เวลาจัดกิจกรรมการเรียนการสอน จำนวน 2 ชั่วโมง

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ สำหรับผู้เรียน



1. ผู้เรียนศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ผู้เรียนศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่าจะต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ผู้เรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เพื่อตรวจสอบความรู้เดิมในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจสอบคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจละเอียด แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากผู้เรียนไม่เข้าใจหรือมีปัญหา ผู้เรียนสามารถซักถามปัญหาต่าง ๆ ปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้จากเพื่อนหรือครูผู้สอนได้ตลอดเวลา
6. ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ จากนั้นตรวจสอบคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน เพื่อเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจ ให้ผู้เรียนกลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. ผู้เรียนควรซื้อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างทำแบบฝึกทักษะ เพื่อผู้เรียนจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ



แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 3 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ



ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

1. บอกความหมายของฟังก์ชันประกอบได้
2. บอกกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้
3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้

ด้านทักษะกระบวนการ

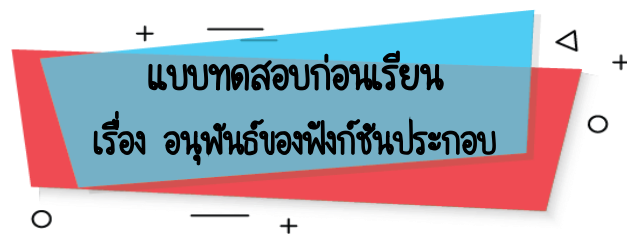
1. การแก้ปัญหา
2. การให้เหตุผล
3. การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. มีความซื่อสัตย์ สุจริต
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้
4. มุ่งมั่นในการทำงาน

สมรรถนะสำคัญของผู้เรียน

1. ความสามารถในการสื่อสาร
2. ความสามารถในการคิด
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา



- คำชี้แจง** 1. แบบทดสอบมีทั้งหมด 10 ข้อ จำนวน 10 คะแนน ใช้เวลา 15 นาที
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย (x) ลงช่องตัวเลือกที่คิดว่าถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. กำหนดให้ $y = (x + 1)^2$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $x + 1$

ข. $2x + 1$

ค. $2(x + 1)^2$

ง. $2x + 2$

2. กำหนดให้ $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^{15}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $15(x^4 - 3x^2 + 1)^{14}$

ข. $15(x^4 - 3x^2 + 1)^{14} (4x^3 - 6x)$

ค. $15(x^4 - 3x^2 + 1)$

ง. $15(x^4 - 3x^2 + 1) (4x^3 - 6x)$

3. กำหนดให้ $y = (3 - 5x^2)^{-3}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-30x}{(3 - 5x^2)^4}$

ข. $\frac{30x}{(3 - 5x^2)^4}$

ค. $\frac{-10x}{(3 - 5x^2)^4}$

ง. $\frac{10x}{(3 - 5x^2)^4}$

4. กำหนดให้ $y = \sqrt{-x^2 - 4}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{x}{(x^2 - 4)^2}$

ข. $\frac{x}{(x^2 + 4)^2}$

ค. $\frac{x}{2(x^2 - 4)^2}$

ง. $\frac{2x - 4}{(x^2 + 4)^2}$

5. กำหนดให้ $y = \sqrt[4]{3x^4 - 5}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ข. $\frac{3x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ค. $\frac{3x^3}{\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ง. $\frac{12x^3}{\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

6. กำหนดให้ $y = (3x^2 - 1)^2 (x^3 + 2)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 + 3x^2 - 24x$ ข. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 - 3x^2 - 24x$

ค. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 + 6x^2 - 24x$ ง. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 - 6x^2 - 24x$

7. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^3}$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-6x}{(x^2 + 4)^3}$

ข. $\frac{-3x}{(x^2 + 4)^3}$

ค. $\frac{-3x}{(x^2 + 4)^4}$

ง. $\frac{-6x}{(x^2 + 4)^4}$

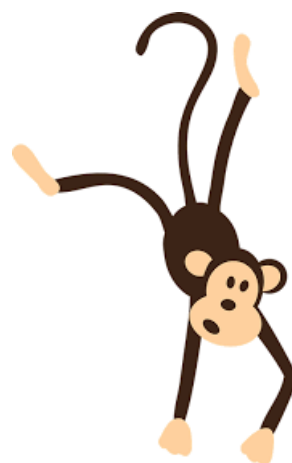
8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{(2x^2 - 3)^3}{\sqrt{4x + 1}}$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 2(2x^2 - 3)^3}{(4x - 1)\sqrt{4x + 1}}$

ข. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3)^3}{4x - 1}$

ค. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 2(2x^2 - 3)^3}{(4x - 1)^2}$

ง. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - (2x^2 - 3)^3}{\sqrt{4x + 1}}$



9. กำหนดให้ $f(x) = \left(\frac{5x-3}{7x+2}\right)^5$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{155(5x-3)^3}{(7x+2)^{21}}$

ข. $\frac{(155-105x)(5x-3)^4}{(7x+2)^{21}}$

ค. $\frac{155(5x-3)^3}{(7x+2)^6}$

ง. $\frac{(155-105x)(5x-3)^4}{(7x+2)^6}$

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{5\sqrt{5}}$

ข. $-\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

ค. $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

ง. $\frac{1}{5\sqrt{5}}$





คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน	
คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
10	



ใบความรู้ที่ 3.1 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ขอให้นักเรียนพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = g(u) = u^5$$

$$u = f(x) = 2x^4 + 3$$

จะได้ $y = g(u) = g(f(x)) = u^5$

นั่นคือ $y = (g \circ f)(x) = (2x^4 + 3)^5$

ฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันประกอบที่เกิดจากฟังก์ชัน f และ g

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบสามารถหาได้ก็ต่อเมื่อสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ประกอบกันได้ ซึ่งเรียกว่า **กฎลูกโซ่ (Chain rule)**

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้ว $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

แสดงโดย ถ้า $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{df(x)} g(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

ซึ่งถ้าให้ $u = f(x)$ และ $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(u)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{df(x)} g(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= \frac{d}{du} g(u) \cdot \frac{d}{dx} (u)$$

และ ถ้า $u = f(x)$ และ $y = g(u)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} g(u) \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{หรือ}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

←|| ใช้ได้เฉพาะฟังก์ชันประกอบ



พิสูจน์ จาก
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{dy}{dx}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(u+k) - f(u)}{k}$$

$$= \frac{dy}{du}$$

และ
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

ดังนั้น
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{du}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



สิ่งที่ต้องสังเกตเห็น

กฎลูกโซ่ (Chain rule)

ถ้า $u = f(x)$ และ $y = g(u)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ดิฟฟังก์ชันของ y หรือ $g(u)$ ข้างนอกก่อน

ดิฟฟังก์ชันของ u หรือ $f(x)$ ข้างใน

หมายเหตุ เราอาจมอง y ให้เป็นฟังก์ชันประกอบที่ซ้อนกันหลาย ๆ ฟังก์ชันก็ได้

จะพบว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{d\Delta} \dots \frac{d\Box}{dx}$

ดิฟข้างนอกก่อน

ดิฟครั้งที่ 1

ดิฟครั้งที่ 2

ดิฟครั้งที่ 3

ดิฟจนถึงเทียบตัวแปร x

เทคนิคการใช้กฎลูกโซ่กับฟังก์ชันประกอบที่ซ้อนกันหลายฟังก์ชัน

หลักการ

- กำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันประกอบที่ซ้อนกันหลาย ๆ ฟังก์ชัน
- ทำการดิฟข้างนอกก่อนแล้วจึงดิฟข้างในไปเรื่อย ๆ จนถึงเทียบตัวแปร x

จะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{d\Delta} \dots \frac{d\Box}{dx}$

ข้างนอก

ข้างใน

- นำเอาผลดิฟแต่ละส่วนจากข้อ 2 ทั้งหมดมาคูณกันก็จะได้ $\frac{dy}{dx}$

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ เรียกว่า กฎลูกโซ่ (chain rule)

สูตร ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(x)$ แล้วฟังก์ชัน $g \circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

จากสูตร ถ้า $u = f(x)$, $y = g(u) = g(f(x))$ และ $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ หาค่าได้แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

เพื่อความสะดวกในการหาฟังก์ชันประกอบ สามารถหาได้จากสูตร

$$y = u^n$$

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$$



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $y = (3x^2 - 7)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = (3x^2 - 7)^5$
 ให้ $u = 3x^2 - 7$
 จะได้ $y = (3x^2 - 7)^5 = u^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(u^5) \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 7)$$

$$= 5u^4 (6x)$$

$$= 30xu^4$$

$$= 30x(3x^2 - 7)^4$$

แทนค่า $u = 3x^2 - 7$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 30x(3x^2 - 7)^4$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $y = \sqrt{1 - 4t + t^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{1 - 4t + t^2} = (1 - 4t + t^2)^{\frac{1}{2}}$
 ให้ $u = 1 - 4t + t^2$
 จะได้ $y = (1 - 4t + t^2)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{d}{dx}(1 - 4t + t^2)$$

$$= \frac{1}{2}(u)^{-\frac{1}{2}} (-4 + 2t)$$

$$\begin{aligned}
 &= u^{-\frac{1}{2}} (t - 2) \\
 &= \frac{t - 2}{\sqrt{u}} \\
 &= \frac{t - 2}{\sqrt{1 - 4t + t^2}}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{t - 2}{\sqrt{1 - 4t + t^2}}$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $y = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} = (x^3 - 2x)^{-2}$

ให้ $u = x^3 - 2x$

จะได้ $y = (x^3 - 2x)^{-2} = u^{-2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{d}{du} (u^{-2}) \cdot \frac{d}{dx} (x^3 - 2x) \\
 &= -2u^{-3} (3x^2 - 2) \\
 &= \frac{4 - 6x^2}{u^3} \\
 &= \frac{4 - 6x^2}{(x^3 - 2x)^3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 6x^2}{(x^3 - 2x)^3}$



ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $s = (2t^3 + t)^{-3}$ จงหา $\frac{ds}{dt}$

วิธีทำ จาก $s = (2t^3 + t)^{-3}$
 ให้ $u = 2t^3 + t$
 จะได้ $s = (2t^3 + t)^{-3} = u^{-3}$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= \frac{d}{du}(u^{-3}) \cdot \frac{d}{dt}(2t^3 + t) \\ &= (-3u^{-4})(6t + 1) \\ &= (-18t - 3) u^{-4} \\ &= \frac{-(18t + 3)}{u^4} \\ &= -\frac{(18t + 3)}{(2t^3 + t)^4}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = -\frac{(18t + 3)}{(2t^3 + t)^4}$



เข้าใจแล้ว...ลองไปทำ
แบบฝึกทักษะกันนะ

แบบฝึกทักษะ 3.1



คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $y = (5x + 1)^2$

วิธีทำ

จาก

$$y = (5x + 1)^2$$

ให้

$$u = 5x + 1$$

จะได้

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(\dots) \cdot \frac{d}{dx}(\dots)$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots$

2. $y = (1 - 4x^3)^6$

วิธีทำ

จาก

$$y = (1 - 4x^3)^6$$

ให้

$$u = \dots$$

จะได้

$$y = \dots$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots$

3. $y = (x^2 + 3x - 5)^3$

วิธีทำ.....

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

4. $s = (7t^5 - 3t^2 + t)^{-4}$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = \dots\dots\dots$

5. $s = (t^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = (x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. $y = \sqrt[3]{4x + x^2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $f(x) = \frac{1}{(x^3 - x + 2)^2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{1}{(x^3 - x + 2)^2} = (x^3 - x + 2)^{-2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - 5x^2}}$ จงหา $f'(1)$



คะแนน

เพื่อนๆ ตรวจสอบความถูกต้อง
จากเฉลยในภาคผนวก และบันทึกคะแนน
ด้วยนะ



ใบความรู้ที่ 3.2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (ต่อ)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบที่กล่าวมา อาจมีบางกรณีที่ฟังก์ชันที่กำหนดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันผลระหว่างฟังก์ชันประกอบกับฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลบวก ผลต่าง ผลคูณ ผลหาร หรือรากที่ n ของฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าว โดยใช้สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบและสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันทั้ง 8 สูตร ตามที่ได้เรียนมาก่อนหน้านี้แล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $f(x) = (2x^2 - 1)(5x + 1)^3$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = (2x^2 - 1)(5x + 1)^3$

$f(x)$

$g(x)$

จะพบว่า ฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูปผลคูณ ดังนั้น การหาอนุพันธ์ของผลคูณเราทำได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f'(x) &= (2x^2 - 1) \frac{d}{dx} (5x + 1)^3 + (5x + 1)^3 \frac{d}{dx} (2x^2 - 1) \\ &= (2x^2 - 1) [(3)(5x + 1)^2 (5)] + (5x + 1)^3 (4x) \\ &= 15(2x^2 - 1)(5x + 1)^2 + 4x(5x + 1)^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 15(2x^2 - 1)(5x + 1)^2 + 4x(5x + 1)^3$



ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $f(x) = \frac{(6x+1)^2}{(3x-5)^3}$ จงหา $f'(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{(6x+1)^2}{(3x-5)^3}$

$f(x)$
 $g(x)$

จะพบว่า ฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูปผลคูณ ดังนั้น การหาอนุพันธ์ของผลหารเราทำได้ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x-5)^3 \frac{d}{dx} (6x+1)^2 - (6x+1)^2 \frac{d}{dx} (3x-5)^3}{[(3x-5)^3]^2} \\ &= \frac{(3x-5)^3 [2(6x+1)(6)] - (6x+1)^2 [3(3x-5)^2 (3)]}{(3x-5)^6} \\ &= \frac{(72x+12)(3x-5)^3 - 9(6x+1)^2 (3x-5)^2}{(3x-5)^6} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{(72x+12)(3x-5)^3 - 9(6x+1)^2 (3x-5)^2}{(3x-5)^6}$



ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ จงหา $f'(-1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$f'(x) = \frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(1) - (1) \frac{d}{dx}(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}{[(9-x^2)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$$= \frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}(0) - (1)\left(\frac{1}{2}(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\right)}{(9-x^2)}$$

$$= \frac{x}{(9-x^2)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt[3]{(9-x^2)^2}}$$

ดังนั้น $f'(-1) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(9-(-1)^2)^2}}$

$$= -\frac{1}{4}$$

ไปทำแบบฝึกทักษะ
กันต่อนะ



แบบฝึกทักษะ 3.2



คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

1. $y = (x - 1)^5 (3x + 1)^2$

วิธีทำ จาก $y = (x - 1)^5 (3x + 1)^2$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = (x - 1)^5 \frac{d}{dx} \dots + \dots \frac{d}{dx} (x - 1)^5$

=

=

=

=

=

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots$

2. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 2x + 3}}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 2x + 3}} = \frac{x^2}{(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}}$

=

=

=

=

=

=

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots$

$$3. y = \frac{(7x + 5)^8}{(8x - 2)^4}$$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$4. S = \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)^7$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

- คำชี้แจง** 1. แบบทดสอบมีทั้งหมด 10 ข้อ จำนวน 10 คะแนน ใช้เวลา 15 นาที
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย (X) ลงช่องตัวเลือกที่คิดว่าถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. กำหนดให้ $y = (x + 1)^2$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $x + 1$

ข. $2x + 1$

ค. $2x + 2$

ง. $2(x + 1)^2$

2. กำหนดให้ $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^{15}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $15(x^4 - 3x^2 + 1)$

ข. $15(x^4 - 3x^2 + 1)^{14}$

ค. $15(x^4 - 3x^2 + 1)(4x^3 - 6x)$

ง. $15(x^4 - 3x^2 + 1)^{14}(4x^3 - 6x)$

3. กำหนดให้ $y = (3 - 5x^2)^{-3}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-30x}{(3 - 5x^2)^4}$

ข. $\frac{-10x}{(3 - 5x^2)^4}$

ค. $\frac{10x}{(3 - 5x^2)^4}$

ง. $\frac{30x}{(3 - 5x^2)^4}$

4. กำหนดให้ $y = \sqrt{-x^2 - 4}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}$

ข. $-\frac{x}{(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}$

ค. $\frac{x}{2(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}}$

ง. $\frac{2x - 4}{(x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}}$

5. กำหนดให้ $y = \sqrt[4]{3x^4 - 5}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ข. $\frac{3x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ค. $\frac{3x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

ง. $\frac{12x^3}{4\sqrt[4]{(3x^4 - 5)^3}}$

6. กำหนดให้ $y = (3x^2 - 1)^2 (x^3 + 2)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ตรงกับข้อใด

ก. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 + 3x^2 - 24x$ ข. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 - 3x^2 - 24x$

ค. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 + 6x^2 - 24x$ ง. $63x^6 - 30x^4 + 72x^3 - 6x^2 - 24x$

7. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4)^3}$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-6x}{(x^2 + 4)^3}$

ข. $\frac{-3x}{(x^2 + 4)^3}$

ค. $\frac{-6x}{(x^2 + 4)^4}$

ง. $\frac{-3x}{(x^2 + 4)^4}$

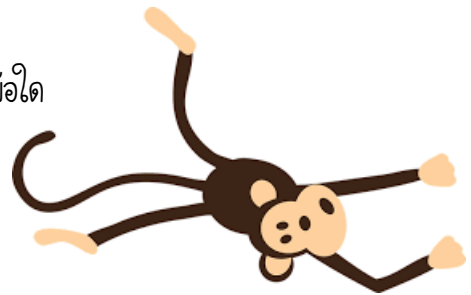
8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{(2x^2 - 3)^3}{\sqrt{4x + 1}}$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - (2x^2 - 3)^3}{\sqrt{4x + 1}}$

ข. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3)^3}{4x - 1}$

ค. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 2(2x^2 - 3)^3}{(4x - 1)^2}$

ง. $\frac{(48x^2 - 12x)(2x^2 - 3)^2 - 2(2x^2 - 3)^3}{(4x - 1)\sqrt{4x + 1}}$



9. กำหนดให้ $f(x) = \left(\frac{5x-3}{7x+2}\right)^5$ แล้ว $f'(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{155(5x-3)^3}{(7x+2)^6}$

ข. $\frac{(155-105x)(5x-3)^4}{(7x+2)^6}$

ค. $\frac{155(5x-3)^3}{(7x+2)^{21}}$

ง. $\frac{(155-105x)(5x-3)^4}{(7x+2)^{21}}$

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

ข. $-\frac{1}{5\sqrt{5}}$

ค. $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

ง. $\frac{1}{5\sqrt{5}}$





คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน	
คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
10	



แบบบันทึกคะแนน

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 3 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผลการประเมิน
แบบทดสอบก่อนเรียน	10			
แบบทดสอบหลังเรียน	10			
ผลการพัฒนา				

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์ *	ไม่ผ่านเกณฑ์ **
แบบฝึกทักษะ 3.1	10				
แบบฝึกทักษะ 3.2	10				
รวม	20				

สรุปผลการประเมิน



ผ่านเกณฑ์การประเมิน



ไม่ผ่านเกณฑ์การประเมิน

เกณฑ์การประเมิน

- * ผลการพัฒนา หมายถึง คะแนนแบบทดสอบหลังเรียนมากกว่าคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน
- * ผ่านเกณฑ์ หมายถึง ในแต่ละแบบฝึกทักษะผู้เรียนจะต้องทำแบบฝึกทักษะได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
- ** ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายถึง ในแต่ละแบบฝึกทักษะผู้เรียนทำแบบฝึกทักษะได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 80 ของคะแนนเต็ม

บรรณานุกรม

- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ภาคเรียนที่ 2**.
กรุงเทพฯ: บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด.
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. **คู่มือ คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 6**. กรุงเทพฯ: บริษัท สำนักพิมพ์
เดอะบุคส์ จำกัด.
- รังสรรค์ มณีเล็ก และประทุมพร ศรีวัฒนกุล. (2550). **สื่อการเรียนรู้สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 2 สมบูรณ์แบบ**. กรุงเทพฯ: พิมพ์ครั้งที่ 1. โรงพิมพ์วัฒนาพานิช
จำกัด.
- ศักดิ์สิน แก้วประจบ. (2555). **หนังสือคู่มือเสริมรายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 4 – 6 เล่ม 6**.
กรุงเทพฯ: เพลิดเพลิน การพิมพ์.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตร
แกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- _____. (2557). **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระ
การเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.
กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.





เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.1



1. $y = (5x + 1)^2$

วิธีทำ จาก $y = (5x + 1)^2$
 ให้ $u = 5x + 1$
 จะได้ $y = u^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(5x + 1) \\ &= 2u(5) \\ &= 10u \\ &= 10(5x + 1) \\ &= 50x + 10\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 50x + 10$



2. $y = (1 - 4x^3)^6$

วิธีทำ จาก $y = (1 - 4x^3)^6$
 ให้ $u = 1 - 4x^3$
 จะได้ $y = u^6$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}(u^6) \cdot \frac{d}{dx}(1 - 4x^3) \\ &= 6u^5(-12x^2) \\ &= -72x^2u^5 \\ &= -72x^2(1 - 4x^3)^5\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = -72x^2(1 - 4x^3)^5$



3. $y = (x^2 + 3x - 5)^3$

วิธีทำ จาก $y = (x^2 + 3x - 5)^3$
 ให้ $u = x^2 + 3x - 5$
 จะได้ $y = u^3$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 5) \\ &= 3u^2(2x + 3) \\ &= (6x + 9)u^2 \\ &= (6x + 9)(x^2 + 3x - 5)^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = (6x + 9)(x^2 + 3x - 5)^2$



4. $s = (\pi^5 - 3t^2 + t)^{-4}$

วิธีทำ จาก $s = (\pi^5 - 3t^2 + t)^{-4}$
 ให้ $u = \pi^5 - 3t^2 + t$
 จะได้ $s = u^{-4}$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= \frac{d}{du}(u^{-4}) \cdot \frac{d}{dt}(\pi^5 - 3t^2 + t) \\ &= -4u^{-5}(35t^4 - 6t + 1) \\ &= (-140t^4 + 24t - 4)u^{-5} \\ &= \frac{-140t^4 + 24t - 4}{u^5} \\ &= \frac{-140t^4 + 24t - 4}{(\pi^5 - 3t^2 + t)^5}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = \frac{-140t^4 + 24t - 4}{(\pi^5 - 3t^2 + t)^5}$



5. $s = (t^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

วิธีทำ จาก $s = (t^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$
 ให้ $u = t^2 - 1$
 จะได้ $s = u^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt} \\ &= \frac{d}{du} (u^{\frac{2}{3}}) \cdot \frac{d}{dt} (t^2 - 1) \\ &= \left(\frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} \right) (2t) \\ &= \left(\frac{4t}{3} \right) (u^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \frac{4t}{3u^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{4t}{3\sqrt[3]{t^2 - 1}}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = \frac{4t}{3\sqrt[3]{t^2 - 1}}$



6. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} = (x^2 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$
ให้ $u = x^2 - 2x + 3$

จะได้ $y = u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(u^{\frac{1}{2}}) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 3)$$

$$= \left(\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}\right)(2x - 2)$$

$$= \frac{x - 1}{u^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$



$$7. y = \sqrt[3]{4x + x^2}$$

วิธีทำ จาก $y = \sqrt[3]{4x + x^2} = (4x + x^2)^{\frac{1}{3}}$
 ให้ $u = 4x + x^2$
 จะได้ $y = u^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} (u^{\frac{1}{3}}) \cdot \frac{d}{dx} (4x + x^2) \\ &= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} (4 + 2x) \\ &= \frac{4 + 2x}{3u^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{4 + 2x}{3\sqrt[3]{(4x + x^2)^2}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{4 + 2x}{3\sqrt[3]{(4x + x^2)^2}}$



$$8. f(x) = \frac{1}{(x^3 - x + 2)^2}$$

วิธีทำ จาก $y = f(x) = \frac{1}{(x^3 - x + 2)^2} = (x^3 - x + 2)^{-2}$

ให้ $u = x^3 - x + 2$

จะได้ $f(x) = u^{-2}$

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du}(u^{-2}) \cdot \frac{d}{dx}(x^3 - x + 2)$$

$$= -2u^{-3}(3x^2 - 1)$$

$$= \frac{-6x^2 + 2}{u^3}$$

$$= \frac{-6x^2 + 2}{(x^3 - x + 2)^3}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{-6x^2 + 2}{(x^3 - x + 2)^3}$



9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$

ให้ $u = x^2 + 1$

จะได้ $f(x) = u^{-\frac{1}{2}}$

กฎลูกโซ่ จะได้ $f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$= \frac{d}{du} (u^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} (2x)$$

$$= -\frac{x}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

ดังนั้น $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$



10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-5x^2}}$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-5x^2}} = (1-5x^2)^{-\frac{1}{3}}$

ให้ $u = 1-5x^2$

จะได้ $f(x) = u^{-\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d}{du} (u^{-\frac{1}{3}}) \cdot \frac{d}{dx} (1-5x^2)$$

$$= -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} (-10x)$$

$$= \frac{10x}{3u^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{10x}{3\sqrt[3]{(1-5x^2)^4}}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{10(1)}{3\sqrt[3]{(1-5(1)^2)^4}} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะ 3.2



1. $y = (x - 1)^5 (3x + 1)^2$

วิธีทำ จาก $y = (x - 1)^5 (3x + 1)^2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= (x - 1)^5 \frac{d}{dx}(3x + 1)^2 + (3x + 1)^2 \frac{d}{dx}(x - 1)^5 \\ &= (x - 1)^5 (2)(3x + 1)(3) + (3x + 1)^2 (5)(x - 1)^4(1) \\ &= (6)(x - 1)^5 (3x + 1) + (5)(3x + 1)^2 (x - 1)^4 \\ &= [(x - 1)^4 (3x + 1)] [6x - 6 + 15x + 5] \\ &= [(x - 1)^4 (3x + 1)] (21x - 1) \\ &= (x - 1)^4 (63x^2 + 18x - 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = (x - 1)^4 (63x^2 + 18x - 1)$



2. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 2x + 3}}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - 2x + 3}} = \frac{x^2}{(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x^2) - (x^2) \frac{d}{dx}(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}}{[(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}]^2} \\ &= \frac{(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}(2x) - \left[(x^2) \left(\frac{1}{2} \right) (x^4 - 2x + 3)^{-\frac{1}{2}} (4x^3 - 2) \right]}{[(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}]^2} \\ &= \frac{(x^4 - 2x + 3)^{\frac{1}{2}}(2x) - (x^2)(x^4 - 2x + 3)^{-\frac{1}{2}}(2x^3 - 1)}{x^4 - 2x + 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^4 - 2x + 3)(2x) - (2x^5 - x^2)}{x^4 - 2x + 3} \\
 &= \frac{2x^5 - 4x^2 + 6x - 2x^5 + x^2}{x^4 - 2x + 3} \\
 &= \frac{-3x^2 + 6x}{x^4 - 2x + 3} \\
 \text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 + 6x}{x^4 - 2x + 3}
 \end{aligned}$$



3. $y = \frac{(7x + 5)^8}{(8x - 2)^4}$

วิธีทำ จาก $y = \frac{(7x + 5)^8}{(8x - 2)^4}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{(8x - 2)^4 \frac{d}{dx} (7x + 5)^8 - (7x + 5)^8 \frac{d}{dx} (8x - 2)^4}{[(8x - 2)^4]^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(8x - 2)^4 (8)(7x + 5)^7 (7) - (7x + 5)^8 (4)(8x - 2)^3 (8)}{(8x - 2)^8} \\
 &= \frac{(56)(8x - 2)^4 (7x + 5)^7 - (32)(7x + 5)^8 (8x - 2)^3}{(8x - 2)^8} \\
 &= \frac{8(8x - 2)^3 (7x + 5)^7 [(7)(8x - 2) - (4)(7x + 5)]}{(8x - 2)^8} \\
 &= \frac{8(7x + 5)^7 (56x - 14 - 28x - 20)}{(8x - 2)^5} \\
 &= \frac{8(7x + 5)^7 (28x - 34)}{(8x - 2)^5} \\
 \text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} &= \frac{8(7x + 5)^7 (28x - 34)}{(8x - 2)^5}
 \end{aligned}$$



$$4. s = \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)^7$$

วิธีทำ จาก $s = \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)^7$

กำหนดให้ $u = \frac{4 + 3t}{1 - 2t}$

จะได้ $s = u^7$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{du}(u^7) \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)$$

$$= 7u^6 \left[\frac{(1 - 2t) \frac{d}{dt}(4 + 3t) - (4 + 3t) \frac{d}{dt}(1 - 2t)}{(1 - 2t)^2} \right]$$

$$= 7u^6 \left[\frac{(1 - 2t)(3) - (4 + 3t)(-2)}{(1 - 2t)^2} \right]$$

$$= 7 \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)^6 \left[\frac{3 - 6t + 8 + 6t}{(1 - 2t)^2} \right]$$

$$= 7 \left(\frac{4 + 3t}{1 - 2t} \right)^6 \left[\frac{11}{(1 - 2t)^2} \right]$$

$$= \frac{77(4 + 3t)^6}{(1 - 2t)^8}$$

ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = \frac{77(4 + 3t)^6}{(1 - 2t)^8}$



5. $f(x) = (5x - x^2)^2 (1 + 2x^3)^3$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (5x - x^2)^2 (1 + 2x^3)^3$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } f'(x) &= (5x - x^2)^2 \frac{d}{dx} (1 + 2x^3)^3 + (1 + 2x^3)^3 \frac{d}{dx} (5x - x^2)^2 \\ &= (5x - x^2)^2 (3)(1 + 2x^3)^2 (6x^2) + (1 + 2x^3)^3 (2)(5x - x^2)(5 - 2x) \\ &= 18x^2 (5x - x^2)^2 (1 + 2x^3)^2 + (1 + 2x^3)^3 (5x - x^2)(10 - 4x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(1) = 18(5 - 1)^2 (1 + 2)^2 + (1 + 2)^3 (5 - 1)(10 - 4)$

$$\begin{aligned}&= 18(16)(9) + 27(4)(6) \\ &= 2,592 + 648 \\ &= 3,240\end{aligned}$$





