



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบก่อนเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน
2. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับตัวอักษร ก ข ค หรือ ง ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนนคือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และตัดแกน x ที่จุด (4, 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0, -2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันวงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3 คือข้อใด

- ก. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$
- ข. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$
- ค. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
- ง. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

2. กำหนดให้เส้นตรงที่ผ่านจุด A(a, 5) และ B(1, 2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C(2, 8) และ D(-2, 4) วงกลมที่ลากผ่านจุด A และมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 2) ตัดแกน Y ที่จุดใด

- ก. (0, -3) และ (0, 7)
- ข. (0, -5) และ (0, 5)
- ค. (0, -7) และ (0, 3)
- ง. $(0, 2 + \sqrt{3})$ และ $(0, 2 - \sqrt{3})$

3. ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีสมการ $x - y + 2 = 0$ และ $4x + 3y - 13 = 0$ ตามลำดับ ถ้าวงกลมที่มี (2, -1) เป็นจุดศูนย์กลาง ผ่านจุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของ L_1 และ L_2 แล้ว ข้อใดถูกต้อง

- ก. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด (2, -1) = -2
- ข. ถ้า (0, b) อยู่บนวงกลมนี้ แล้ว $b^2 + 2b - 12 = 0$
- ค. จุด (5, 0) อยู่บนวงกลมนี้
- ง. รัศมีของวงกลมนี้ = $\sqrt{5}$



4. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ เป็นวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็น จุดศูนย์กลางและรัศมีมีค่าเท่าใด

- ก. ไม่เป็นวงกลม
- ข. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 5 หน่วย
- ค. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 3 หน่วย
- ง. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, -1)$ รัศมี 15 หน่วย

5. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

- ก. จุดศูนย์กลาง $(\frac{3}{4}, -1)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย
- ข. จุดศูนย์กลาง $(\frac{3}{4}, 1)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย
- ค. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ รัศมี 3 หน่วย
- ง. จุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ รัศมี 3 หน่วย

6. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม เมื่อกำหนดจุดสัมผัสได้ $x^2 + y^2 + 10y + 7 = 0$ ที่จุด $(3, -2)$

- ก. $x + y + 1 = 0$
- ข. $x - y - 1 = 0$
- ค. $x + y - 1 = 0$
- ง. $x - y + 1 = 0$

7. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$

- ก. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$
- ข. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y + 135 = 0$
- ค. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 135 = 0$
- ง. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y - 135 = 0$

8. ให้ A เป็นวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ และ B เป็นวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ข้อใดถูกต้อง

- ก. วงกลม A ตัดกับ วงกลม B
- ข. วงกลม A สัมผัสกับ วงกลม B
- ค. วงกลม A อยู่ภายใน วงกลม B
- ง. วงกลม A ไม่ได้และไม่สัมผัสกับ วงกลม B



9. วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะห่างเท่าใด

- ก. 3 หน่วย
- ข. 4 หน่วย
- ค. 5 หน่วย
- ง. 6 หน่วย

10. ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางบนแกน x
- ข. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 63 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดตัดของเส้นตรง $x - y = 12$ กับ $x - 2y - 19 = 12$
- ค. วงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 10y = 15$ สัมผัสกับเส้นตรง $x = -4$
- ง. เส้นตรง $x + y + 13 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

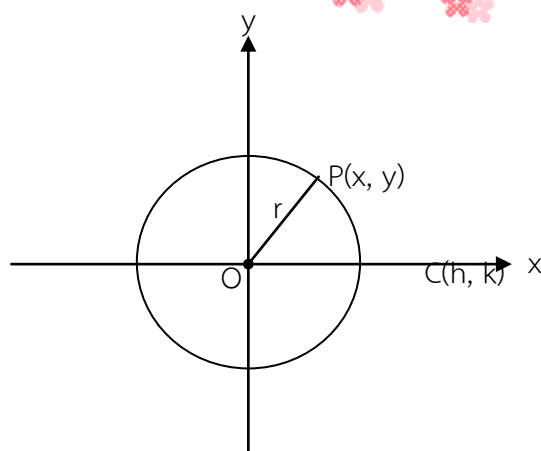




1. สมการวงกลม

นิยามของสมการวงกลม คือ

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งทุกๆ จุดเหล่านี้มีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า **จุดศูนย์กลางของวงกลม** และเรียกระยะทางที่เท่ากันว่า **รัศมีของวงกลม**



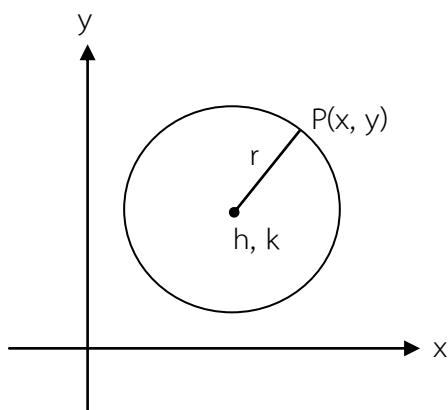
$$x^2 + y^2 = r^2$$



สังเกตได้ว่า ด้านขวามือเป็นค่ายกกำลังสอง ดังนั้น ด้านขวามือต้องไม่เป็นจำนวนลบ และยังเป็นค่าของรัศมีซึ่งต้องมีความมากกว่าศูนย์เสมอ (ถ้าเท่ากับศูนย์ จะกลายเป็นจุด ไม่ใช่วงกลม) ดังนั้น ด้านขวามือต้องมีความมากกว่าศูนย์เสมอ



แต่ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และมีรัศมี r หน่วย จะมีสมการเป็น



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลาง $C(0, 0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย

วิธีทำ จากวงกลมมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$
แทนค่าในสมการจะได้

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

ดังนั้น วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 9\}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 จากสมการ $x^2 + y^2 = 100$ จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม

วิธีทำ จากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว r คือ

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ดังนั้น} \quad r^2 = 100$$

$$r = \sqrt{100}$$

$$r = 10$$

ดังนั้น สมการนี้มีจุดศูนย์กลาง $C(0, 0)$ และรัศมียาว 10 หน่วย **ตอบ**





ตัวอย่างที่ 3 กราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นสมการวงกลม จงบอก
จุดศูนย์กลางและรัศมี

$$1. \quad x^2 + y^2 = 1$$

เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลาง = (0, 0)

รัศมี = 1

$$4. \quad x^2 + y^2 = -25$$

ไม่เป็นสมการวงกลม

$$2. \quad x^2 + y^2 = 0$$

ไม่เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลาง = (0, 0)

รัศมี = 3

$$5. \quad (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลาง = (-3, 1)

รัศมี = 3

$$3. \quad (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 0$$

ไม่เป็นสมการวงกลม

จุดศูนย์กลาง = (3, 5)

$$5. \quad (x - 4)^2 + (y + 6)^2 = -16$$

ไม่เป็นสมการวงกลม



ศึกษาเนื้อหาแล้วไปทำแบบฝึกหัด
กันนะครับ เพื่อนๆ





แบบฝึกทักษะที่ 1

คำชี้แจง

จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม จากโจทย์ที่กำหนดให้
(ข้อละ 1 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จุดศูนย์กลาง $(1, 2)$ และรัศมียาว 6 หน่วย

2. จุดศูนย์กลาง $(1, 0)$ และรัศมียาว 4 หน่วย

3. จุดศูนย์กลาง $(0, -2)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

4. จุดศูนย์กลาง $(1, 2)$ และรัศมียาว 3 หน่วย

5. จุดศูนย์กลาง $(-2, 3)$ และรัศมียาว 4 หน่วย



6. จุดศูนย์กลาง $(3, -4)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

7. จุดศูนย์กลาง $(-4, -5)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

8. จุดศูนย์กลาง $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ และรัศมียาว $\frac{1}{5}$ หน่วย

9. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ และรัศมียาว $\frac{1}{\sqrt{3}}$ หน่วย

10. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ และรัศมียาว 1 หน่วย



2. รูปมาตรฐานของสมการวงกลม



$$\begin{aligned}
 \text{จากสมการ} & \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\
 \text{กระจายสมการได้เป็น} & \quad x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2 \\
 & \quad x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = r^2 \\
 \text{ดังนั้น เขียนสมการวงกลมในรูปมาตรฐานได้เป็น} & \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0
 \end{aligned}$$

การพิจารณาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากสมการในรูปมาตรฐาน

$$\begin{aligned}
 \text{สังเกตว่า} & \quad A = -2h, \quad B = -2k \quad \text{และ} \quad C = h^2 + k^2 - r^2 \\
 \text{จะได้} & \quad h = \frac{A}{-2}, \quad k = \frac{B}{-2} \quad \text{และ} \quad r = \sqrt{-C + h^2 + k^2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น หากเรามีสมการวงกลมที่อยู่ในรูปมาตรฐาน เราสามารถหาจุดศูนย์กลางและรัศมีได้ทันที โดยไม่ต้องจัดรูปสมการขั้นตอนก็ได้

หมายเหตุ สมการวงกลมเขียนให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้เป็น $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงที่ แต่สมการที่อยู่ในรูป $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ อาจไม่ใช่สมการวงกลมก็ได้ ขึ้นอยู่กับค่า r (หรือค่า $-C + h^2 + k^2$) ที่หาได้จากสมการ โดยที่ $-C + h^2 + k^2$ ที่ได้ต้องมากกว่า 0 จึงเป็นสมการวงกลม

- ถ้า $-C + h^2 + k^2 > 0$ สมการในรูปมาตรฐานนี้เป็น สมการวงกลม
- ถ้า $-C + h^2 + k^2 = 0$ สมการในรูปมาตรฐานนี้เป็น จุด ซึ่งเป็นการตัดกรวยลดรูป
- ถ้า $-C + h^2 + k^2 < 0$ สมการในรูปมาตรฐานนี้เป็น ไม่มีกราฟ





ตัวอย่าง จากวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned}\text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{8}{2}, -\frac{4}{2}\right) \\ &= (4, -2)\end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (4, -2) ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned}\text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-8)^2 + (4)^2 - 4(4)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64 + 16 - 16} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \\ &= 4\end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ 4 หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ (4, -2) และรัศมียาว 4 หน่วย **ตอบ**

เพื่อนลองทำแบบฝึกหัดกันนะครับ



แบบฝึกทักษะที่ 2

คำชี้แจง

จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

$$1. \ x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.



3. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 14y + 15 = 0$

A large rectangular area with a pink border, containing horizontal dashed lines for writing.



4. $3x^2 + 3y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$

A large rectangular area with a purple border, containing multiple horizontal dashed lines for writing.



5. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 11 = 0$

A large rectangular box with a pink border, containing multiple horizontal dashed lines for writing.





3. การพิจารณตำแหน่งของจุดใดๆ เทียบกับวงกลม

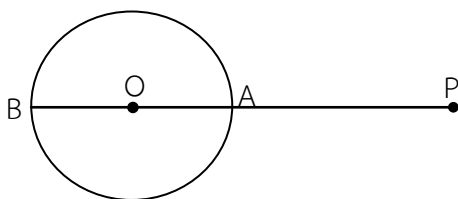


ถ้าจุด $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดใดๆ บนระนาบเดียวกับวงกลม

- จุด $P(x_1, y_1)$ อยู่บนเส้นรอบวง ก็ต่อเมื่อ $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$
- จุด $P(x_1, y_1)$ อยู่ในวงกลม ก็ต่อเมื่อ $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C < 0$
- จุด $P(x_1, y_1)$ อยู่บนอกวงกลม ก็ต่อเมื่อ $x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C > 0$

4. ระยะใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดใดๆ ไปยังวงกลม

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลม O เป็นจุดศูนย์กลาง และ A, B เป็นจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางแล้ว



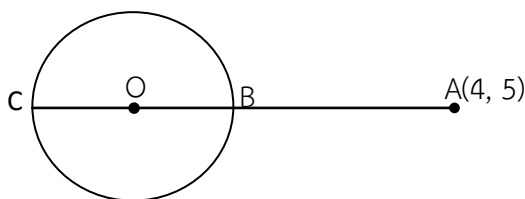
$|BP|$ เป็นระยะไกลที่สุดจากจุด P ไปยังวงกลม

$|AP|$ เป็นระยะใกล้ที่สุดจากจุด P ไปยังวงกลม

และ $|BP| - |AP| = 2r$

ตัวอย่าง จงหาระยะทางที่สั้นที่สุด และยาวที่สุดระหว่างจุด $A(4, 5)$ กับจุดบนวงกลม

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$



หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{6}{2}, \frac{4}{2}\right) \\ &= (-3, 2) \end{aligned}$$



ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(-3, 2)$

$$\begin{aligned}
 \text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง A จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 &= \sqrt{(3+4)^2 + (-2+5)^2} \\
 &= \sqrt{(7)^2 + (3)^2} \\
 &= \sqrt{49 + 9} \\
 &= \sqrt{58}
 \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{BA}) = d - r$$

$$\begin{aligned}
 \text{หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\
 &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 - 4} \\
 &= \sqrt{9 + 4 - 4} \\
 &= \sqrt{9} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{BA}) = \sqrt{58} - 3 \text{ หน่วย}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (\overline{CA}) = \sqrt{58} + 3 \text{ หน่วย}$$



แบบฝึกทักษะที่ 3

คำชี้แจง

จงหาระยะไกลที่สุดและใกล้ที่สุดจากจุดใดๆ ไปยังวงกลม
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุด และยาวที่สุดระหว่างจุด Q(6, 8) กับจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 15 = 0$

[illegible]

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

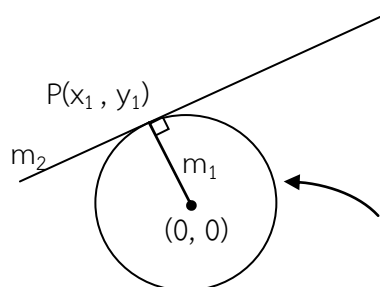
[illegible]



5. การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม เมื่อกำหนดจุดสัมผัสให้



วิธีที่ 1 หลักการคือเส้นสัมผัสจะตั้งฉากกับรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาจุดสัมผัส



$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$m_1 = \frac{x_2 - k}{x_1 - h}, \quad m_2 = \frac{x_1 - h}{x_2 - k}$$

$$y = mx + c$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



มีขั้นตอนในการหาสมการดังนี้ คือ

1. รู้สมการวงกลม และจุดสัมผัส (โจทย์กำหนด)
2. หาคจุดศูนย์กลางจากสมการวงกลม
3. หาความชันของรัศมีที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปจุดสัมผัส (ความชันของเส้นตรงระหว่างจุด 2 จุด)
4. หาความชันของเส้นสัมผัสที่ตั้งฉากกับความชันของรัศมี คูณกันได้ -1)
5. เมื่อทราบความชันของเส้นสัมผัส และจุดสัมผัส นำไปหาสมการเส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลมได้

วิธีที่ 2 เป็นวิธีที่ใช้กับภาคตัดกรวยชนิดอื่นได้ด้วย เมื่อกำหนดจุดสัมผัสเป็น (x_0, y_0) ให้ทำการเปลี่ยนตัวแปรของสมการภาคตัดกรวยที่กำหนด จาก x^2 ให้เป็น xx_0 , x เป็น yy_0 , x เป็น $\frac{x+x_0}{2}$ และ y เป็น $\frac{y+y_0}{2}$ และยุบพจน์ทั้งหมดเข้าด้วยกัน



ตัวอย่าง

จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม เมื่อกำหนดจุดสัมผัสได้
 $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(-3, 4)$

$$\text{หาความชันของเส้นตรงระหว่างจุด } m_1 = \frac{x_2 - k}{x_1 - h} = \frac{4 - 0}{-3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$\text{หาความชันของเส้นสัมผัส } m_2 = \frac{x_1 - h}{x_2 - k} = \frac{-3 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}$$

$$\text{หาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม } y = mx + c$$

$$4 = \frac{3}{4}(-3) + c$$

$$4 = \frac{-3}{4} + c$$

$$4 = \frac{-9}{4} + c$$

$$c = 4 + 2\frac{1}{4}$$

$$= 6\frac{1}{4}$$

$$\therefore y = \frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลม $4y = 3x + 25$ ตอบ



วิธีหาคำตอบ

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x(-3) + y(4) = 25$$

$$-3x + 4y = 25$$

$$4y = 3x + 25$$



แบบฝึกทักษะที่ 4

คำชี้แจง

จกหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. วงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $A(3, 1)$ โดยสัมผัสที่จุด $B(5, 5)$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]



6. ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับวงกลม



รูปความสัมพันธ์เส้นตรงกับวงกลม	ความสัมพันธ์	ลักษณะที่เกิดขึ้น
	$r > d$	ตัดกัน 2 จุด
	$r = d$	สัมผัสกัน
	$r < d$	ไม่ตัดกัน 2 จุด

ตัวอย่าง

ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + 2x + y^2 - 8y - 25 = 0$ กับเส้นตรง $5x + 12y - 4 = 0$ เท่ากับกี่หน่วย และระบุว่าเส้นตรงนั้นสัมผัสกับวงกลมอย่างไร (ตัด 2 จุด, สัมผัส, ไม่สัมผัส)

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม

$(-1, 4)$

หาระยะห่างจากสูตร

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้

$$d = \frac{|5(-1) + 12(4) - 4|}{\sqrt{(5)^2 + (12)^2}}$$

$$= \frac{39}{13} = 3 \text{ หน่วย}$$

หารัศมีวงกลม

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + 25} \\ &= \sqrt{1 + 16 + 25} \\ &= \sqrt{42} \approx 6.4807 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

$\therefore$ เส้นตรงตัดกัน 2 จุด และสัมผัสกัน



แบบฝึกทักษะที่ 5

คำชี้แจง

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $A(6, 2)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

2. จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ และเส้นตรง $x + y = 1$

This image shows a full page of handwriting practice paper. It features multiple sets of horizontal dashed lines spaced evenly down the page, providing a guide for letter height and placement. The background is white, and there are no margins or additional markings.

[illegible]

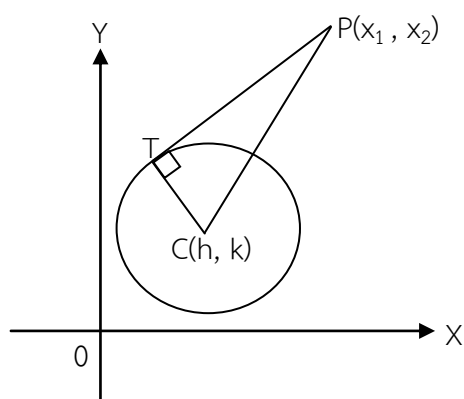
[illegible]



7. การหาความยาวของเส้นสัมผัสจากจุดภายนอกไปยังวงกลม



ให้ C เป็นวงกลมที่มีสมการเป็น $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ และ $P(x_1, y_2)$ เป็นจุดที่อยู่ภายนอกวงกลม



ให้ T เป็นจุดสัมผัส และเนื่องจากรัศมีของวงกลมตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ดังนั้น

$$|PT|^2 = |PC|^2 - |TC|^2$$

แต่จากรูป $|PC|^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$

$$|TC|^2 = r^2$$

ดังนั้น $|PT|^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2$

นั่นคือ ความยาวของเส้นสัมผัสจากจุด $P(x_1, y_2)$ ให้ยังวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ เท่ากับ

$$d = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$$

ข้อสังเกต การหาระยะทางดังกล่าว เหมือนกับการนำสมการของวงกลมมาเขียนในรูป $(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2 = 0$ โดยแทนค่า x และ y ด้วย x_1 และ y_1 ตามลำดับ แล้วนำมาถอดราก ดังนั้น ถ้าสมการที่มีอยู่ในรูปสมการมาตรฐานสามารถหาระยะทางได้จาก

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}$$





หมายเหตุ

1. ถ้า $d = \sqrt{\text{บวก}}$ แสดงว่า จุดที่กำหนดให้อยู่นอกวงกลม
2. ถ้า $d = 0$ แสดงว่า จุดที่กำหนดให้อยู่บนวงกลม
3. ถ้า $d = \sqrt{\text{ลบ}}$ แสดงว่า จุดที่กำหนดให้อยู่ในวงกลม



ตัวอย่าง

จงหาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $(-4, 3)$ ไปสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 20$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 - 20}$$

$$d = \sqrt{16 + 9 - 20}$$

$$= \sqrt{5} \text{ หน่วย}$$





แบบฝึกทักษะที่ 6

คำชี้แจง

จงหาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ไปยังวงกลม
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จุด $A(6, 1)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

2. จุด $A(7, 3)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 11$

3. จุด $A(7, 8)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$



4. จุด $A(-5, 3)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

5. จุด $A(5, 4)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 + 2ky = 0$





8. การหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง



ให้ C_1 แล้ว C_2 เป็นวงกลมที่มีสมการดังนี้

$$C_1: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$C_2: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ณ จุดตัดของวงกลมทั้งสองจะมีค่า x และ y ที่แทนค่าทั้งสองสมการแล้วเป็นจริง ดังนั้นในการหาจุดตัดของวงกลมสองวง จึงใช้หลักการเดียวกับการหาจุดตัดของเส้นตรง คือ นำสมการทั้งสองมาบวกหรือลบกัน เพื่อกำจัดตัวแปร แต่ในกรณีของวงกลมจะทำการลบกันเพื่อกำจัดเทอมที่มีกำลังสอง จะเหลือแต่เทอมกำลังหนึ่ง ทำให้เกิดในรูปสมการเส้นตรง ดังนี้

$$(x^2 + y^2 + Ax + By + C) - (x^2 + y^2 + Dx + Ey + F) = 0$$

$$Ax + By + C - Dx - Ey - F = 0$$

$$(A - D)x + (B - E)y + (C - F) = 0$$

รูปแบบสมการที่แสดงนี้ ไม่ต้องจดจำ เพียงแต่แสดงให้เห็นรูปแบบ ให้เข้าใจแก่หลักการ ก็คือให้นำสมการทั้งสองมาลบกันเท่านั้น

ตัวอย่าง

1. จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0$ กับ $3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0$

$$(x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7)^3 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 21x - 6y + 21 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0$$

รวมสมการได้ $14x + 7y - 21 = 0$

ทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ $2x + y - 3 = 0$

หาจุดตัด $y = 3 - 2x$

แทนในสมการวงกลม $x^2 + (3 - 2x)^2 - 7x - 2(3 - 2x) + 7 = 0$

$$x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 7x - 6 + 4x + 7 = 0$$

$$5x^2 - 15x + 10 = 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 1, 2$$

แทน x ในจุดตัด $y = 3 - 2x$ จะได้ $x = 1; y = 1 \mid x = 2; y = -1$

$\therefore$ จุดตัดของวงกลม $(1, 1)$ และ $(2, -1)$





9. ความสัมพันธ์ระหว่างวงกลมกับวงกลม

รูปความสัมพันธ์วงกลมกับวงกลม	ความสัมพันธ์	ลักษณะที่เกิดขึ้น
	$r_1 + r_2 < d$	ไม่ตัดกัน
	$r_1 + r_2 = d$	สัมผัสกันภายนอก
	$r_1 + r_2 > d$ เมื่อ $r_1 < d$ และ $r_2 < d$	ตัดกัน 2 จุด
	$r_1 + r_2 > d$ เมื่อ $r_2 = r_1 + d$	สัมผัสกันภายใน
	$r_1 + r_2 > d$ เมื่อ $r_2 > r_1 + d$	วงกลมอยู่ภายในวงกลม
	$d = 0$	จุดศูนย์กลางร่วมกัน





ตัวอย่าง

กำหนดให้วงกลมสองวงมีสมการเป็น $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 7 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ จงหาสมการเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับเส้นโยงจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสอง

จุดศูนย์กลางของสมการทั้งสอง $A(-2, 2)$ และ $B(5, 4)$

$$\text{หาความชัน } M_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{5 - (-2)} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore M_1 = \frac{-7}{2}$$

หาสมการ $y = mx + c$

$$3 = \frac{-7}{2} \left(\frac{3}{2} \right) + C$$

$$3 = \frac{-21}{4} + C$$

$$C = 3 + 5\frac{1}{4}$$

$$C = 8\frac{1}{4} = \frac{33}{4}$$

$$\therefore y = \frac{-7x}{2} + \frac{33}{4}$$

ทำการตัดเศษส่วนโดยนำ 4 คูณทั้งสมการ

$$4y = -14x + 33$$

$$14x + 4y - 33 = 0$$

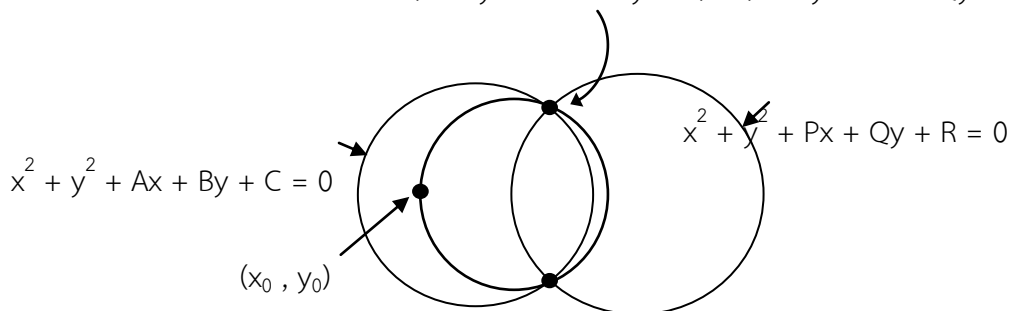




10. การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลม 2 วง และจุด (x_0, y_0) ที่ไม่อยู่ในแนวเดียวกับจุดตัดทั้งสอง

กำหนดให้ วงกลมสองวงมีสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ และ $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$

$$K(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + (x^2 + y^2 + Px + Qy + R) = 0$$



สมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_0, y_0) และผ่านจุดตัดของวงกลมทั้งสอง คือ

$$K(x^2 + y^2 + Ax + By + C) + (x^2 + y^2 + Px + Qy + R) = 0$$

$$\text{เมื่อ } k = \frac{-(x_0^2 + y_0^2 + Px_0 + Qy_0 + R)}{x_0^2 + y_0^2 + Ax_0 + By_0 + C}$$



ตัวอย่าง

กำหนดให้วงกลมมีสมการเป็น $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(2, 1)$ และผ่านจุดตัด 2 จุดของวงกลมทั้งสอง

$$\begin{aligned} \text{แทนค่าลงในสมการ } k &= \frac{-(2^2 + 1^2 - 2(2) - 2(1) - 7)}{2^2 + 1^2 - 10(2) - 4(1) + 25} \\ &= \frac{-(4 + 1 - 4 - 2 - 7)}{4 + 1 - 20 - 4 + 25} = \frac{-(-8)}{6} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}(x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25) + (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7) = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 40x - 16y + 100 + 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y - 21 = 0$$

$$\text{ยุบสมการรวมกัน จะได้ } 7x^2 + 7y^2 - 46x - 22y + 79 = 0$$

$$\therefore \text{สมการวงกลมที่ผ่านจุด } (2, 1) \text{ จะได้ } 7x^2 + 7y^2 - 46x - 22y + 79 = 0$$





แบบฝึกทักษะที่ 7

คำชี้แจง

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ กับ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 13 = 0$ กับ $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 7 = 0$

3. คอร์ดร่วมของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ยาวเท่ากับเท่าใด

[illegible][illegible]



แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบก่อนเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน
2. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับตัวอักษร ก ข ค หรือ ง ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนนคือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะห่างเท่าใด

- ก. 6 หน่วย
- ข. 5 หน่วย
- ค. 4 หน่วย
- ง. 3 หน่วย

2. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$

- ก. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y - 135 = 0$
- ข. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 135 = 0$
- ค. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y + 135 = 0$
- ง. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$

3. ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. เส้นตรง $x + y + 13 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
- ข. วงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 10y = 15$ สัมผัสกับเส้นตรง $x = -4$
- ค. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 63 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดตัดของเส้นตรง $x - y = 12$ กับ $x - 2y - 19 = 12$
- ง. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางบนแกน x



4. กำหนดให้เส้นตรงที่ผ่านจุด $A(a, 5)$ และ $B(1, 2)$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $C(2, 8)$ และ $D(-2, 4)$ วงกลมที่ลากผ่านจุด A และมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 2)$ ตัดแกน Y ที่จุดใด

- ก. $(0, -7)$ และ $(0, 3)$
- ข. $(0, -5)$ และ $(0, 5)$
- ค. $(0, -3)$ และ $(0, 7)$
- ง. $(0, 2 + \sqrt{3})$ และ $(0, 2 - \sqrt{3})$

5. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

- ก. จุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ รัศมี 3 หน่วย
- ข. จุดศูนย์กลาง $(\frac{3}{4}, -1)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย
- ค. จุดศูนย์กลาง $(\frac{3}{4}, 1)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย
- ง. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ รัศมี 3 หน่วย

6. ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และตัดแกน x ที่จุด $(4, 0)$ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, -2)$ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันวงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3 คือข้อใด

- ก. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- ข. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
- ค. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$
- ง. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

7. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม เมื่อกำหนดจุดสัมผัสได้ $x^2 + y^2 + 10y + 7 = 0$ ที่จุด $(3, -2)$

- ก. $x - y + 1 = 0$
- ข. $x + y - 1 = 0$
- ค. $x - y - 1 = 0$
- ง. $x + y + 1 = 0$

8. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ เป็นวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็น จุดศูนย์กลางและรัศมีมีค่าเท่าใด

- ก. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 5 หน่วย
- ข. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 3 หน่วย
- ค. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, -1)$ รัศมี 15 หน่วย
- ง. ไม่เป็นวงกลม



9. ให้ A เป็นวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ และ B เป็นวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ข้อใดถูกต้อง

- ก. วงกลม A ตัดกับ วงกลม B
- ข. วงกลม A สัมผัสกับ วงกลม B
- ค. วงกลม A อยู่ภายใน วงกลม B
- ง. วงกลม A ไม่ได้และไม่สัมผัสกับ วงกลม B

10. ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่มีสมการ $x - y + 2 = 0$ และ $4x + 3y - 13 = 0$ ตามลำดับ ถ้าวงกลมที่มี $(2, -1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง ผ่านจุด A ซึ่งเป็นจุดตัดของ L_1 และ L_2 แล้ว ข้อใดถูกต้อง

- ก. ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด $(2, -1) = -2$
- ข. ถ้า $(0, b)$ อยู่บนวงกลมนี้ แล้ว $b^2 + 2b - 12 = 0$
- ค. จุด $(5, 0)$ อยู่บนวงกลมนี้
- ง. รัศมีของวงกลมนี้ $= \sqrt{5}$







เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1

คำชี้แจง

จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม จากโจทย์ที่กำหนดให้
(ข้อละ 1 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จุดศูนย์กลาง (1, 2) และรัศมียาว 6 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25\}$ ตอบ

2. จุดศูนย์กลาง (1, 0) และรัศมียาว 4 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 16\}$ ตอบ

3. จุดศูนย์กลาง (0, -2) และรัศมียาว 5 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 25\}$ ตอบ

4. จุดศูนย์กลาง (1, 2) และรัศมียาว 3 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9\}$ ตอบ

5. จุดศูนย์กลาง (-2, 3) และรัศมียาว 4 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16\}$ ตอบ

6. จุดศูนย์กลาง (3, -4) และรัศมียาว 5 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x + y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25\}$ ตอบ



7. จุดศูนย์กลาง $(-4, -5)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 4\}$ ตอบ

8. จุดศูนย์กลาง $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ และรัศมียาว $\frac{1}{5}$ หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{5}\}$ ตอบ

9. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ และรัศมียาว $\frac{1}{\sqrt{3}}$ หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}\}$ ตอบ

10. จุดศูนย์กลาง $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ และรัศมียาว 1 หน่วย

วงกลมจะมีความสัมพันธ์เป็น $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x + \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1\}$ ตอบ



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

คำชี้แจง

จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right) \\ &= (-2, 3) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (-2, 3) ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned} \text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (3)^2 - 8} \\ &= \sqrt{4 + 9 - 8} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ $\sqrt{5}$ หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ (-2, 3) และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย ตอบ



$$2. x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{6}{2}, \frac{0}{2}\right) \\ &= (3, 0) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (3, 0) ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned} \text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + 7} \\ &= \sqrt{9 + 0 + 7} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ 4 หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ (3, 0) และรัศมียาว 4 หน่วย ตอบ



$$3. \ 2x^2 + 2y^2 - 6x + 14y + 15 = 0$$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned} \text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4} - \frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{58}{4} - \frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{29}{2} - \frac{15}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{14}{2}} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ $\sqrt{7}$ หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ และรัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย **ตอบ**



$$4. \ 3x^2 + 3y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{6}{2}, -\frac{8}{2}\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (3, -4) ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned} \text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (4)^2 - 15} \\ &= \sqrt{9 + 16 - 15} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ $\sqrt{10}$ หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ (3, -4) และรัศมียาว $\sqrt{10}$ หน่วย ตอบ



$$5. 4x^2 + 4y^2 + 12x - 16y - 11 = 0$$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)} &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ ①

หาความยาวรัศมีของวงกลม (r)

$$\begin{aligned} \text{จากความยาวรัศมีของวงกลม (r)} &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (2)^2 + \frac{11}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{11}{4}} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวรัศมีของวงกลม (r) คือ 3 หน่วย ②

เพราะฉะนั้นวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางที่ $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ และรัศมียาว 3 หน่วย ตอบ



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3

คำชี้แจง

จงหาระยะใกล้ที่สุดและไกลที่สุดจากจุดใดๆ ไปยังวงกลม
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุด และยาวที่สุดระหว่างจุด $Q(6, 8)$ กับจุดบนวงกลม
 $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 15 = 0$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned}\text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{2}, -\frac{8}{2}\right) \\ &= (-1, -4)\end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(-1, -4)$

$$\begin{aligned}\text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง } Q \text{ จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(6 - (-1))^2 + (8 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{49 + 144} \\ &= \sqrt{193}\end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{RQ}) = d - r$$

$$\begin{aligned}\text{หาความยาวรัศมีของวงกลม } (r) &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 - 15} \\ &= \sqrt{1 + 16 - 15} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{RQ}) = \sqrt{193} - \sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (\overline{PQ}) = \sqrt{193} + \sqrt{2} \text{ หน่วย}$$



2. สมการวงกลม $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 75 = 0$ มีความยาวของรัศมีของวงกลม 20 หน่วย จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมและระยะทางที่ยาวที่สุด โดยวัดจากจุด $A(4, 7)$

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned}\text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{8}{2}, -\frac{6}{2}\right) \\ &= (4, -3)\end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(4, -3)$

$$\begin{aligned}\text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง } A \text{ จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(4-4)^2 + (7-(-3))^2} \\ &= \sqrt{0+100} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (\overline{BA}) = d + r$$

$$\begin{aligned}\text{หาความยาวรัศมีของวงกลม } (r) &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 75} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 75} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10\end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (\overline{BA}) = 10 + 10 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น หาระยะทางที่ยาวที่สุด} = 10 + 10 = 20 \text{ หน่วย} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$



3. สมการของ $x^2 + y^2 + x - y - 5 = 0$ กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงกลม $(3, -1)$ จงหา ระยะทางที่สั้นที่สุดและระยะทางที่ยาวที่สุด ซึ่งวัดตามแนวตรงจากจุด $K(5, 2)$ ไปยังจุดบนเส้นรอบวง ของวงกลม

จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) คือ $(3, -1)$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง } K \text{ จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(5-3)^2 + (2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{IK}) = d - r$$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวรัศมีของวงกลม } (r) &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 5} \\ &= \sqrt{36 + 1 + 5} \\ &= \sqrt{42} \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\overline{IK}) = \sqrt{42} - \sqrt{13} \text{ หน่วย}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (\overline{GK}) = \sqrt{42} + \sqrt{13} \text{ หน่วย}$$



4. ถ้า ℓ_1 และ ℓ_2 เป็นความยาวที่ยาวที่สุดและสั้นที่สุด ตามลำดับ ซึ่งวัดตามแนวตรงจากจุด $P(8, 4)$ ไปยังจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 17 = 0$ แล้ว ℓ_2 มีค่าเท่าใด

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) \\ &= (2, 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(1, 2)$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง } P \text{ จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(8-2)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{36 + 9} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

$$\text{ระยะทางที่สั้นที่สุด } (\ell_2) = d - r$$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวรัศมีของวงกลม } (r) &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 17} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 17} \\ &= \sqrt{22} \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (\ell_2 - r) = \sqrt{45} - \sqrt{22} \text{ หน่วย } \underline{\text{ตอบ}}$$



5. ถ้า l_1 และ l_2 เป็นความยาวที่ยาวที่สุดและสั้นที่สุด ตามลำดับ ซึ่งวัดตามแนวตรงจากจุด $P(10, 7)$ ไปยังจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ แล้ว $l_1 + l_2$ มีค่าเท่าใด

หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k)

$$\begin{aligned} \text{จากจุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) \\ &= (2, 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(2, 1)$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวจากจุดศูนย์กลางถึง } P \text{ จะได้ } d &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(10-2)^2 + (7-1)^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\text{ระยะทางที่ยาวที่สุด } (l_1) = d + r$$

$$\begin{aligned} \text{หาความยาวรัศมีของวงกลม } (r) &= \sqrt{A^2 + B^2 - C} \\ &= \sqrt{(2)^2 + 1^2 + 20} \\ &= \sqrt{20 + 1 + 20} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\text{หาระยะทางที่ยาวที่สุด } (l_1 + r) = 10 + 5 = 15 \text{ หน่วย}$$

$$\text{หาระยะทางที่สั้นที่สุด } (l_2 - r) = 10 - 5 = 5 \text{ หน่วย}$$

$$\text{ดังนั้น } l_1 + l_2 = 15 + 5 = 20 \text{ หน่วย} \quad \underline{\text{ตอบ}}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4

คำชี้แจง

จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. วงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A(3, 1) โดยสัมผัสที่จุด B(5, 5)

$$\text{หาความชันของเส้นตรงระหว่างจุด } m_1 = \frac{x_2 - k}{x_1 - h} = \frac{5 - 1}{5 - 3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\text{หาความชันของเส้นสัมผัส } m_2 = \frac{x_1 - h}{x_2 - k} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{หาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม } y &= mx + c \\ 5 &= -\frac{1}{2}(5) + c \\ 5 + \frac{5}{2} &= c \\ c &= 5 + 2\frac{1}{2} \\ c &= 4 + 2\frac{1}{2} \\ &= 7\frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{-1x}{2} + \frac{15}{2}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลม $2y = -x + 15$ ตอบ



2. กำหนดจุดสัมผัสที่จุด $(2, -1)$ จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม

เปลี่ยนตัวแปรของสมการภาคตัดกรวยที่กำหนด จาก $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0$ ให้เป็น
 $x(2) + y(-1) + \frac{5(x+2)}{2} - \frac{6(y-1)}{2} - 21 = 0$

นำ 2 คูณทั้งสมการจะได้ $4x - 2y + 5x + 10 - 6y + 6 - 42 = 0$
 ยุบพจน์ทั้งหมดเข้าด้วยกัน $9x - 8y - 26 = 0$
 ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลม $9x - 8y - 26 = 0$ ตอบ

3. จงหาสมการรูปทั่วไปของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 2)$ และสัมผัสเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 197 = 0$

หาความชันของเส้นตรงระหว่างจุด 2 จุด จาก $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ จากโจทย์ที่

กำหนดให้ $A = 21, B = 20, C = 197, x_1 = -3, x_2 = 2$

หาระยะห่างระหว่างจุด) กับเส้นตรง $21x + 20y + 197 = 0$

$$\begin{aligned} \text{จากระยะห่าง } r = d &= \frac{|(21)(-3) + (20)(2) + 197|}{\sqrt{(21)^2 + (20)^2}} \\ &= \frac{|-63 + 40 + 197|}{\sqrt{841}} \\ &= \frac{174}{29} \\ &= 6 \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ $C(-3, 2)$ และ $r = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \text{สมการวงกลมคือ } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 6^2 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 36 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปทั่วไปของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ และสัมผัสเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 197 = 0$ คือ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$ ตอบ



4. ถ้า l เป็นเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ โดยสัมผัสที่จุด $(-3, 1)$ แล้วสมการของ l คือข้อใด

เปลี่ยนตัวแปรของสมการภาคตัดกรวยที่กำหนด จาก $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$ ให้เป็น

$$x(-3) + y(1) + \frac{4(x-3)}{2} - \frac{2(y+1)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ลดรูปของสมการจะได้} \quad & -3x + y + 2x - 6 + y + 1 = 0 \\ \text{ยุบพจน์ทั้งหมดเข้าด้วยกัน} \quad & -x + 2y - 5 = 0 \\ \text{ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสวงกลม} \quad & 0 = x - 2y + 5 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

5. สมมติ $A(3, k)$ อยู่ในควอดรนต์ที่หนึ่ง เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมที่มีรัศมี = 4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และ L เป็นเส้นสัมผัสกับวงกลมที่จุด $A(3, k)$ จุดที่ L ตัดกับแกน X คือจุดใด

$$\begin{aligned} \text{จากสมการวงกลม} \quad & x^2 + y^2 = 16 \\ \text{จะได้} \quad & 3^2 + k^2 = 16 \\ & 9 + k^2 = 16 \\ & k^2 = 16 - 9 \\ & k^2 = 7 \\ & k = \pm\sqrt{7} \\ \text{สมการอยู่ในควอดรนต์ที่หนึ่ง} \quad & k = \sqrt{7} \\ \text{ดังนั้น จุดสัมผัสเส้นตรงอยู่ที่} \quad & A(3, \sqrt{7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หาสมการเส้นตรง } L \text{ จากสมการวงกลม } x^2 + y^2 = 16 \text{ ที่จุด } A(3, \sqrt{7}) \\ \text{จะได้} \quad & x(3) + \sqrt{7}(y) = 16 \\ & 3x + \sqrt{7}y = 16 \\ \text{จากโจทย์แกน } y \text{ เป็น } 0 \text{ ดังนั้น} \quad & x(3) = 16 \\ & x = \frac{16}{3} \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5

คำชี้แจง

จงหาความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงกับวงกลม (ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $A(6, 2)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
หาความยาวเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $A(6, 2) = (x_1, y_1)$

$$d = \sqrt{(6-2)^2 + (2+3)^2 - 25}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4 \text{ หน่วย}$$

$\therefore$ ความยาวของเส้นสัมผัสคือ 4 หน่วย

2. จงหาจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$ และเส้นตรง $x + y = 1$

เปลี่ยนสมการ $x + y = 1$ ใหม่เป็น $y = 1 - x$

แทนใน $x^2 + (1 - x)^2 - x - 3(1 - x) = 0$

กระจายสมการ $x^2 + 1 - 2x + x^2 - x - 3 + 3x = 0$

จะได้ $2x^2 = 2$

$$x^2 = \frac{2}{2}$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

ดังนั้น หาจุดตัดของวงกลมได้ $x = 1 ; y = 1 - 1 = 0$

$$x = -1 ; y = 1 - (-1) = 2$$

$\therefore$ จุดตัดสมการมี 2 จุด คือ $(1, 0)$ และ $(-1, 2)$



3. จงหาสมการวงกลมที่สัมผัส $x + y + 4 = 0$ และ $7x - y + 4 = 0$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $4x + 3y - 2 = 0$

หาจุดศูนย์กลางวงกลม (h, k) โดยแทน h เป็น a ในจุดศูนย์กลางบนเส้นตรง
จะได้

$$4a + 3y - 2 = 0$$

$$3y = 2 - 4a$$

$$y = \frac{2 - 4a}{3}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางคือ $(a, \frac{2 - 4a}{3})$

$$\text{หาระยะห่างจากสูตร } d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|a + \frac{2 - 4a}{3} + 4|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{|7a - \frac{2 - 4a}{3} + 4|}{\sqrt{(7)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{|3a + 2 - 4a + 12|}{3\sqrt{2}} = \frac{|21a - 2 + 4a + 12|}{3\sqrt{50}}$$

$$= \frac{|-a + 14|}{\sqrt{2}} = \frac{|25a + 10|}{5\sqrt{2}}$$

$$= |-5a + 70| = |25a + 10|$$

$$= (-5a + 70 - 25a - 10)(-5a + 70 + 25a + 10) = 0$$

$$= (-30a + 60)(20a + 80) = 0$$

$$a = (2, -4)$$

$$\text{ถ้า } a = 2 \text{ จะได้ } \frac{2 - 4a}{3} = \frac{2 - 4(2)}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\text{ถ้า } a = -4 \text{ จะได้ } \frac{2 - 4(-4)}{3} = \frac{2 + 16}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางจะได้ $(2, -2)$ และ $(-4, 6)$

$$\text{หารัศมีวงกลมที่สัมผัส } x + y + 4 = 0 \text{ จะได้ } r_1 = \frac{|2 + (-2) + 4|}{\sqrt{2}}$$



$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$r_2 = \frac{|-4 + 6 + 4|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{สมการวงกลมที่สัมผัส คือ } (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 8$$

$$(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 18$$

4. จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ซึ่งสัมผัสวงกลมนี้ ณ จุดที่ส่งกลมตัดกับเส้นตรง $x + y - 4 = 0$

เขียนความสัมพันธ์ของ $y = 4 - x$ แทนในสมการวงกลม

จะได้

$$x^2 + (4 - x)^2 - 2x - 2(4 - x) = 0$$

กระจายสมการ

$$x^2 + 16 - 8x + x^2 - 2x - 8 + 2x = 0$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

ดังนั้น แทนค่า x ใน $y = 4 - 2 = 2$

จุดสัมผัสของสมการวงกลมคือ (2, 2)

$$\text{หาสมการเส้นสัมผัสวงกลมจะได้ } x(2) + y(2) - 2\frac{(x+2)}{2} - 2\frac{(y+2)}{2} = 0$$

$$2x + 2y - x - 2 - y - 2 = 0$$

$$x + y - 4 = 0$$

$\therefore$ สมการเส้นสัมผัสวงกลมมีเส้นเดียวกัน คือ $x + y - 4 = 0$



5. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{หาระยะห่างจุดสัมผัส } r = d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{|8(-3) - 6(-5) - 1|}{\sqrt{(8)^2 + (6)^2}} \\ &= \frac{|-24 + 30 - 1|}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

จะได้ $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} c &= 9 + 25 - \frac{1}{4} \\ &= 34 - \frac{1}{4} \\ &= 33\frac{3}{4} = \frac{135}{4} \end{aligned}$$

แทนลงในสมการจะได้ $x^2 + y^2 + (3)8x + (5)6y + (1)\frac{135}{4} = 0$

$$x^2 + y^2 + 24x + 30y + 135 = 0$$

$\therefore$ สมการคือ $x^2 + y^2 + 24x + 30y + 135 = 0$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 6

คำชี้แจง

จงหาความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ ไปยังวงกลม
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จุด A(6, 1) ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$$d = \sqrt{(6-1)^2 + (1+2)^2 - 9}$$

$$d = \sqrt{25 + 9 - 9}$$

$$= 5 \text{ หน่วย}$$

2. จุด A(7, 3) ไปสัมผัสกับวงกลม $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 11$

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + (3+6)^2 - 11}$$

$$d = \sqrt{9 + 25 - 11}$$

$$= \sqrt{23} \text{ หน่วย}$$

3. จุด A(7, 8) ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

$$d = \sqrt{7^2 + 8^2 - 6(7) - 6(8) + 9}$$

$$d = \sqrt{49 + 64 - 42 - 48 + 9} = \sqrt{32}$$

$$= 4\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$



4. จุด $A(-5, 3)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

$$d = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 - 6(-5) + 2(3) - 15}$$

$$d = \sqrt{25 + 9 + 30 + 6 - 15} =$$

$$= \sqrt{55} \text{ หน่วย}$$

5. จุด $A(5, 4)$ ไปสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 + 2ky = 0$

$$1 = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2k(4)}$$

$$1 = \sqrt{25 + 16 + 8k} = -40 = 8k; k = \frac{-40}{8}$$

$$k = -5 \text{ หน่วย}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 7

คำชี้แจง

จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม 2 วง
(ข้อละ 2 คะแนน รวม 10 คะแนน)

1. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ กับ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

รวมสมการได้ $2x - 4y + 24 = 0$

$$x - 2y + 12 = 0$$

2. จงหาสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 + 5x + 3y - 13 = 0$ กับ $x^2 + y^2 - 4x - 3y + 7 = 0$

$$x^2 + y^2 + 5x + 3y - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 3y + 7 = 0$$

รวมสมการได้ $x - y + 6 = 0$

3. คอร์ดร่วมของวงกลม $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ยาวเท่ากับเท่าใด

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

รวมสมการได้ $4x = 0$

$$x = 1$$

แทน x ในสมการ $1^2 + y^2 = 4$

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ จุดตัด $(1, \sqrt{3})$ และ $(1, -\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$



4. จงหาความยาวของคอร์ดร่วมของวงกลม $x^2 + y^2 - 5 = 0$ กับวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\text{รวมสมการได้} \quad -2x + 4 = 0$$

$$4 = 2x$$

$$x = 2$$

$$\text{แทนในสมการ} \quad 2^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$4 + y^2 - 5 = 0$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

จุดตัด (2, 1) และ (2, -1)

∴ ความยาวคอร์ดร่วมจะยาวเท่ากับ 2 หน่วย

5. ค่าของ k ที่ทำให้เส้นสัมผัสจากจุด A(3, -1) ไปสัมผัสกับวงกลม $2x^2 + 2y^2 + kx - y - 5 = 0$ ยาวเท่ากับ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ หน่วย คือค่าในข้อใด

$$C : 2x^2 + 2y^2 + kx - y - 5 = 0$$

$$: x^2 + y^2 + \frac{k}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2} = 0$$

$$d = \sqrt{9 + 1 + \frac{3k}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}} = 5\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3k+16}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3k+16}{2} = \frac{25}{2}$$

$$3k = 9$$

$$k = 3$$



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน-หลังเรียน



ก่อนเรียน

1. ข
2. ก
3. ข
4. ข
5. ก
6. ค
7. ค
8. ง
9. ก
10. ง



หลังเรียน

1. ง
2. ข
3. ก
4. ค
5. ข
6. ค
7. ข
8. ก
9. ง
10. ข



บรรณานุกรม



- กนกวรรณ อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร : เดอะบุ๊กส์ จำกัด,
2554.
- กมล เอกไทยเจริญ. Advanced Series คณิตศาสตร์ ม.4-5-6 เล่ม 3 ตรรกศาสตร์และเรขาคณิต
วิเคราะห์. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิง, 2555.
- กวิยา เนาวประทีป. หนังสือชุดเทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย. กรุงเทพมหานคร :
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2556.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพมหานคร : พ.ศ. พัฒนา
, 2554.
- _____. คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร : พ.ศ. พัฒนา, 2556.
- เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. คู่มือและเทคนิคคลัด โจทย์คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2
ค01, ค042. กรุงเทพมหานคร : SCIENCE CENTER, 2555.
- ณรงค์ ปันนิมและคณะ. คู่มือ-เตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร :
ภูมิบัณฑิต, 2547.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. หนังสือเรียนเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่ 2. พิมพ์ครั้งที่ 2.
กรุงเทพมหานคร : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2555.
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร :
เดอะบุ๊กส์ จำกัด, 2555.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์
เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพมหานคร : สกสค. ลาดพร้าว, 2553.
- _____. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. พิมพ์ครั้งที่ 4.
กรุงเทพมหานคร : สกสค. ลาดพร้าว, 2556.