

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ค31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เล่มที่

1

ระบบสมการเชิงเส้น

$\text{adj}(A)$

A^{-1}

$C_{ij}(A)$

$\det(A)$

$M_{ij}(A)$

โดย นางพนิดา เจริญสุข

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการ

โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 9



คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่มที่ 1 เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อพัฒนาทักษะการคิดวิเคราะห์ และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยมุ่งเน้นให้นักเรียนเกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มที่ 1 นี้ ได้สอดแทรกเนื้อหาสาระการเรียนรู้และกิจกรรมไว้อย่างหลากหลาย มีลำดับขั้นตอนการทำจากง่ายไปหายาก ช่วยกระตุ้นให้นักเรียนอยากเรียนรู้ ทำความพยายาม ท้าทายความสามารถ เหมาะสมกับวัยและพัฒนาการของนักเรียน มีเนื้อหาสอดคล้องกับสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ จัดทำขึ้นทั้งหมด 7 เล่ม เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น ประกอบไปด้วยคำแนะนำสำหรับครูผู้สอน คำแนะนำสำหรับนักเรียน ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะ ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ แบบทดสอบหลังเรียน แบบบันทึกคะแนน และมีเฉลยแบบทดสอบ เฉลยแบบฝึกทักษะ รวมถึงเกณฑ์การให้คะแนนอยู่ในภาคผนวกท้ายเล่ม

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่มที่ 1 นี้ จักเป็นประโยชน์แก่นักเรียน ผู้สนใจและครูผู้สอนสามารถนำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ ขอขอบคุณผู้เชี่ยวชาญ ผู้มีส่วนร่วม และกัลยาณมิตรทุกท่านที่ให้คำแนะนำ และตรวจสอบแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 นี้ จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

พนิดา เจริญสุข

 สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำแนะนำสำหรับครูผู้สอน	ค
คำแนะนำสำหรับนักเรียน	ง
ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะของนักเรียน	จ
ผลการเรียนรู้	ฉ
จุดประสงค์การเรียนรู้	ฉ
แบบทดสอบก่อนเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	1
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	3
ใบความรู้ที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	4
แบบฝึกทักษะที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	8
ใบความรู้ที่ 2 ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $n > 2$	10
แบบฝึกทักษะที่ 2 ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $n > 2$	17
แบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	21
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	23
แบบบันทึกคะแนน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	24
ภาคผนวก	25
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	26
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร	27
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2 ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $n > 2$	29
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น	33
บรรณานุกรม	34

คำแนะนำสำหรับครูผู้สอน

1. แบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 นี้ ใช้ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบกลุ่มเทคนิค TAI (Team Assisted Individualization) ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามที่จัดให้ไว้อย่างครบถ้วน
2. ชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ วิธีการเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ และร่วมกันทำข้อตกลงในการเรียนรู้ให้ตรงกันระหว่างครูกับนักเรียน
3. ให้นักเรียนอ่านคำแนะนำและขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะก่อนลงมือทำแบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น เป็นรายบุคคล จากนั้นส่งกระดาษคำตอบให้ครูเป็นผู้ตรวจและบันทึกผลคะแนนเก็บไว้
4. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ก่อนลงมือทำแบบฝึกทักษะแต่ละแบบฝึกด้วยความตั้งใจ หลังจากนั้น ให้นักเรียนจับคู่กันภายในกลุ่มตรวจคำตอบจากเฉลยแบบฝึกทักษะในภาคผนวกอย่างรอบคอบและซื่อสัตย์โดยครูจะเป็นผู้ตรวจสอบอีกครั้ง
5. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เมื่อนักเรียนมีปัญหาในการทำแบบฝึกทักษะ หรือไม่เข้าใจในเรื่องที่เรียนครูต้องอธิบายนักเรียนเพิ่มเติมทันทีจนกระทั่งนักเรียนเข้าใจอย่างถ่องแท้
6. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น เป็นรายบุคคลและส่งกระดาษคำตอบให้ครูตรวจ ครูแจ้งผลการตรวจแบบทดสอบหลังเรียนให้นักเรียนทราบแล้วนำไปหาค่าเฉลี่ยเป็นคะแนนความสำเร็จของกลุ่ม



คำแนะนำสำหรับนักเรียน

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น เป็นรายบุคคลลงในกระดาษคำตอบโดยใช้เวลา 20 นาที
2. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาใบความรู้อย่างละเอียดทุกครั้งก่อนลงมือทำแบบฝึกทักษะด้วยความตั้งใจ หลังจากนั้นตรวจแต่ละแบบฝึกทักษะจากเฉลยในภาคผนวกที่ละแบบฝึกตามลำดับอย่างรอบคอบและซื่อสัตย์ แล้วบันทึกคะแนนลงในแบบบันทึกคะแนน ถ้าผลคะแนนจากการทำแบบฝึกทักษะผ่านเกณฑ์ร้อยละ 75 นักเรียนสามารถศึกษาใบความรู้ หรือทำแบบฝึกทักษะต่อไปได้ หากมีสมาชิกในกลุ่มได้คะแนนต่ำกว่าเกณฑ์ ให้สมาชิกในกลุ่มนั้นช่วยเหลือและให้คำแนะนำแก่เพื่อนแล้วทำแบบฝึกทักษะจนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 75
3. ในการทำแบบฝึกทักษะทุกครั้ง ขอให้นักเรียนทำด้วยความตั้งใจ และมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่ลอกเพื่อนหรือเปิดดูเฉลยก่อน ควรทำให้เสร็จในเวลาที่กำหนด หากมีข้อสงสัยในส่วนที่เป็นเนื้อหา ก่อนลงมือทำแบบฝึกทักษะในแต่ละชุด นักเรียนสามารถขอคำปรึกษาและซักถามจากครูผู้สอนได้
4. เมื่อศึกษาใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะผ่านเกณฑ์ร้อยละ 75 ครบทุกชุดแล้ว ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น เป็นรายบุคคลลงในกระดาษคำตอบโดยใช้เวลา 20 นาที

ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะของนักเรียน



ทำความเข้าใจคำแนะนำการใช้
แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน

ทำแบบทดสอบก่อนเรียน

ศึกษาแบบฝึกทักษะ เล่มที่ 1
โดย - ศึกษาใบความรู้
- ทำแบบฝึกทักษะ

ทำแบบทดสอบหลังเรียน

ผ่านเกณฑ์
(ร้อยละ 75)

ไม่ผ่านเกณฑ์

ศึกษาแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์
เล่มที่ 2 เรื่อง ความหมาย
และชนิดของเมทริกซ์



ผลการเรียนรู้

วิเคราะห์และหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้



จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ (K)

นักเรียนสามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นได้

ด้านทักษะกระบวนการ (P)

1. นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล
2. นักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยง

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ (A)

1. นักเรียนมีวินัย
2. นักเรียนใฝ่เรียนรู้





แบบทดสอบก่อนเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

รหัสวิชา ค31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

จำนวน 10 ข้อ

เวลา 20 นาที

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับช่องอักษร ก ข ค หรือ ง ที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้น

ก. $4x = \frac{12}{x}$

ข. $x^2 = 20$

ค. $(x-2)(x+2)=0$

ง. $5x+6=0$

2. คำตอบของสมการ $6-x=3x-18$ ตรงกับข้อใด

ก. 6

ข. 3

ค. -3

ง. -6

3. คำตอบของระบบสมการ $2x-y=1$ และ $x+y=5$ ตรงกับข้อใด

ก. (4, 1)

ข. (2, 3)

ค. (6, -1)

ง. (-4, 9)

4. กำหนดระบบสมการ $x-y=8$ และ $x+y=19$ แล้ว $2x-y$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 23.5

ข. 22.5

ค. 21.5

ง. 20.5

5. คำตอบของระบบสมการ $3x+2y=13$ และ $3x-2y=5$ ตรงกับคำตอบของระบบสมการในข้อใด

ก. $x+2y=8$ และ $2x-2y=-2$

ข. $3x+y=10$ และ $x+y=5$

ค. $2x-y=1$ และ $x+y=5$

ง. $x+y=5$ และ $-x-2y=-7$

6. กำหนดระบบสมการ $3x-2y=6$ และ $6x-5y=30$ แล้ว $x+y$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. -28

ข. -8

ค. 8

ง. 28



7. กำหนดระบบสมการ $x + y + z = 2$, $x - y - z = 0$ และ $x - y + z = 4$

แล้ว xyz มีค่าตรงกับข้อใด

ก. -2

ข. 0

ค. 2

ง. 3

8. ข้อใดกล่าวถึงคำตอบของระบบสมการ $2x + y = 0$, $x + y + z = 2$ และ $x - y = z$ ได้ถูกต้อง

ก. $x < y < z$

ข. $y < z < x$

ค. $z < x < y$

ง. $y < x < z$

9. กำหนดระบบสมการ $x + y = 5$, $y + z = 6$ และ $2x + z = 7$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $x + y + z = 7$

ข. $-x + y - z = -2$

ค. $2x - y + z = 3$

ง. $x - y - z = -3$

10. กำหนดระบบสมการ $2x + y - z = 2$, $x + 2y - z = 3$ และ $x + y - 2z = 3$

แล้ว $x + y + z$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. -2

ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเสร็จ
แล้วเรามาเริ่มศึกษาใบความรู้ที่ 1
กันเลยค่า



กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ทำได้.....คะแนน



ใบความรู้ที่ 1



ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มี x เป็นตัวแปร คือ $ax + b = 0$
เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$



ตัวอย่าง

$$6x + 4 = 8$$

$$-4x = 20$$

$$x = -5$$

$$3(x + 2) = 4(x - 3)$$

$$x - 0.6 = 12$$

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a และ b ไม่เป็นศูนย์ x และ y เป็นตัวแปร
ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากับหนึ่ง เรียก $ax + by = c$ ว่า “สมการเชิงเส้นสองตัวแปร”



ตัวอย่าง

$$x + y = 3$$

$$2x - 5y = 4$$

$$6(x + 1) = 4(y - 2)$$

$$\frac{x + y}{4} = 5(x - 1)$$

$$5(x - y) + 3 = 0$$

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

ให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เรียก $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ ว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นนี้ คือ ค่าของ x และ y ที่ทำให้สมการทั้งคู่เป็นจริง

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจมีคำตอบเดียว หรือมีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้

ตัวอย่างที่ 1

จงแก้ระบบสมการ

$$x + 3y = -3$$

$$x - 2y = 7$$

วิธีทำ

$$x + 3y = -3 \quad \text{----- (1)}$$

$$x - 2y = 7 \quad \text{----- (2)}$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } 5y = -10$$

$$y = \frac{-10}{5}$$

$$y = -2$$

แทน $y = -2$ ใน (1)

$$\text{จะได้ } x + 3(-2) = -3$$

$$x - 6 = -3$$

$$x = -3 + 6$$

$$x = 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(3, -2)$



อย่าลืม

ตรวจคำตอบนะคะ



ตัวอย่างที่ 2

จงแก้ระบบสมการ

$$x + 4y = 8$$

$$2x - y = -2$$

วิธีทำ

$$x + 4y = 8 \quad \text{----- (1)}$$

$$2x - y = -2 \quad \text{----- (2)}$$

$$2 \times (1) \text{ จะได้ } 2x + 8y = 16 \quad \text{----- (3)}$$

$$(2) - (3) \text{ จะได้ } -9y = -18$$

$$y = \frac{-18}{-9}$$

$$y = 2$$

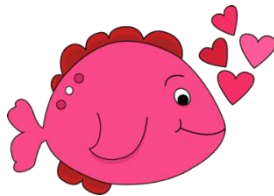
แทน $y = 2$ ใน (1)

$$\text{จะได้ } x + 4(2) = 8$$

$$x = 8 - 8$$

$$x = 0$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ (0, 2)



ตัวอย่างที่ 3

จงแก้ระบบสมการ

$$x + y = 2y$$

$$3(x - y) + 2 = -2x$$

วิธีทำ

$$\text{จาก } x + y = 2y$$

$$\text{จะได้ } x + y - 2y = 0$$

$$x - y = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{และ } 3(x - y) + 2 = -2x$$



เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad & 3x - 3y + 2x = -2 \\ & 5x - 3y = -2 \quad \text{----- (2)} \\ 5 \times (1) \text{ จะได้} \quad & 5x - 5y = 0 \quad \text{----- (3)} \\ (2) - (3) \text{ จะได้} \quad & 2y = -2 \\ & y = \frac{-2}{2} \\ & y = -1 \\ \text{แทน } y = -1 \text{ ใน (1)} \\ \text{จะได้} \quad & x - (-1) = 0 \\ & x + 1 = 0 \\ & x = -1 \\ \text{ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ } & (-1, -1) \end{aligned}$$

เรามาเริ่มทำแบบฝึกทักษะที่ 1
กันเลย



แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



คำชี้แจง : ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1.

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 3y = 3$$

วิธีทำ

$$2x + 3y = 12 \quad \text{----(1)}$$

$$3x - 3y = 3 \quad \text{----(2)}$$

(1) + (2) จะได้

.....

.....

$$x = \text{.....}$$

แทน ใน (1)

จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

$$y = \text{.....}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ



เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

2.

$$2(x - 3) = y - 2$$

$$2x - 3y = 12$$

วิธีทำ

$$2(x - 3) = y - 2 \quad \text{----(1)}$$

$$2x - 3y = 12 \quad \text{----(2)}$$

จาก (1) จะได้

$$2x - 6 = y - 2$$

$$2x - y = 6 - 2$$

$$2x - y = 4 \quad \text{----(3)}$$

(.....) - (.....) จะได้

$$-2y = 8$$

$$y = \text{.....}$$

แทน.....ใน (2)

จะได้

$$x = \text{.....}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ



ใบความรู้ที่ 2

ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร เมื่อ $n > 2$ สมการเชิงเส้น n ตัวแปร

บทนิยาม ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์
 พร้อมกัน เรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ ว่า สมการเชิงเส้น
 n ตัวแปร โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร

ตัวอย่าง



$$-3x + 2y - 3z = 10$$

$$4(x - y) = 6(y + z)$$

$$x + y + 2z - t = 3$$

$$-5x = 4 + y$$

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = x_4$$

ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร

บทนิยาม ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึง ชุดของสมการ
 เชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร
 จำนวน m สมการ โดยที่ $m \geq 2$

คำตอบของระบบสมการนี้ คือ จำนวน n จำนวน ที่นำไปแทนตัวแปร
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ในทุก ๆ สมการ ตามลำดับ แล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

จากบทนิยาม จะเห็นได้ว่า ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร และประกอบด้วยสมการเชิงเส้น m สมการ ($m \geq 2$) จะมีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ เป็นสมการเชิงเส้น ทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน



ในระบบสมการเชิงเส้นที่มี n ตัวแปร มักนิยมแทนตัวแปร ดังนี้

n	ตัวแปร	ตัวอย่าง
2	x, y	$x + 5y = 3$
3	x, y, z	$x - y + z = 1$
4	x, y, z, t	$x + 2y + 3z - 4t = 10$
5	$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$	$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 100$

เราอาจให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ แทนตัวแปร กรณี n คือ 2, 3 หรือ 4 ก็ได้้นะคะ และสำหรับคำตอบของระบบสมการนิยมเขียนในรูปของ n สิ่งอันดับ (Ordered n - tuple) เช่น $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$



เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1

จงแก้ระบบสมการ

$$x + y + z = 3$$

$$x - y - z = -1$$

$$x - y + z = 5$$

วิธีทำ

$$x + y + z = 3 \quad \text{----- (1)}$$

$$x - y - z = -1 \quad \text{----- (2)}$$

$$x - y + z = 5 \quad \text{----- (3)}$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

$$(2) - (3) \text{ จะได้ } -2z = -6$$

$$z = \frac{-6}{-2}$$

$$z = 3$$

แทน $x = 1$ และ $z = 3$ ใน (1)

$$\text{จะได้ } 1 + y + 3 = 3$$

$$y = -1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(1, -1, 3)$

ระบบสมการนี้
มีคำตอบเดียวนะค่ะ

ลองตรวจคำตอบดูนะค่ะ

แทน $x = 1, y = -1$ และ $z = 3$

แทนลงใน (1)

$$\text{จะได้ } 1 + (-1) + 3 = 3$$

$$3 = 3$$

สมการเป็นจริง

หรือ แทนลงใน (2)

$$\text{จะได้ } 1 - (-1) - 3 = -1$$

$$-1 = -1$$

สมการเป็นจริง

หรือ แทนลงใน (3)

$$\text{จะได้ } 1 - (-1) + 3 = 5$$

$$5 = 5$$

สมการเป็นจริง

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 2

จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned}x - y + z &= 2 \\x + y - 3z &= 2 \\3x - y - z &= 6\end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x - y + z = 2 \quad \text{----- (1)}$$

$$x + y - 3z = 2 \quad \text{----- (2)}$$

$$3x - y - z = 6 \quad \text{----- (3)}$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 2x - 2z = 4 \quad \text{----- (4)}$$

$$(1) + (3) \text{ จะได้ } 4x - 2y = 8 \quad \text{----- (5)}$$

$$\text{จาก (4) จะได้ } -2z = 4 - 2x$$

$$z = \frac{4 - 2x}{-2}$$

$$z = \frac{-2(-2 + x)}{-2}$$

$$z = -2 + x$$

$$\text{หรือ } z = x - 2$$

$$\text{จาก (5) จะได้ } -2y = 8 - 4x$$

$$y = \frac{8 - 4x}{-2}$$

$$y = \frac{-2(-4 + 2x)}{-2}$$

$$\text{หรือ } y = 2x - 4$$

$$y = -4 + 2x$$

แทน $y = 2x - 4$ และ $z = x - 2$ ใน (1)

$$\text{จะได้ } x - (2x - 4) + (x - 2) = 2$$

$$2 = 2$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(x, 2x - 4, x - 2)$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$

ระบบสมการนี้
มีหลายคำตอบนะค่ะ



ตัวอย่างคำตอบของระบบสมการนี้



ตัวอย่าง	x	$y = 2x - 4$	$z = x - 2$	คำตอบของระบบสมการ
1	-1	$y = 2(-1) - 4 = -6$	$z = (-1) - 2 = -3$	$(-1, -6, -3)$
2	0	$y = 2(0) - 4 = -4$	$z = 0 - 2 = -2$	$(0, -4, -2)$
3	3	$y = 2(3) - 4 = 2$	$z = 3 - 2 = 1$	$(3, 2, 1)$

ลองตรวจคำตอบดูนะคะ

คำตอบของระบบสมการ $(-1, -6, -3)$

$$\text{แทนลงใน (1) จะได้ } (-1) - (-6) + (-3) = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (2) จะได้ } (-1) + (-6) - 3(-3) = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (3) จะได้ } 3(-1) - (-6) - (-3) = 6$$

$$6 = 6 \text{ สมการเป็นจริง}$$



คำตอบของระบบสมการ $(0, -4, -2)$

$$\text{แทนลงใน (1) จะได้} \quad 0 - (-4) + (-2) = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (2) จะได้} \quad 0 + (-4) - 3(-2) = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (3) จะได้} \quad 3(0) - (-4) - (-2) = 6$$

$$6 = 6 \text{ สมการเป็นจริง}$$

คำตอบของระบบสมการ $(3, 2, 1)$

$$\text{แทนลงใน (1) จะได้} \quad 3 - 2 + 1 = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (2) จะได้} \quad 3 + 2 - 3(1) = 2$$

$$2 = 2 \text{ สมการเป็นจริง}$$

$$\text{หรือ แทนลงใน (3) จะได้} \quad 3(3) - 2 - 1 = 6$$

$$6 = 6 \text{ สมการเป็นจริง}$$



ทุกคำตอบนั้นทำให้
สมการเป็นจริงทั้งหมด
แสดงว่าระบบสมการนี้
มีหลายคำตอบค่ะ

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{aligned} \text{จงแก้ระบบสมการ} \quad & x + y - z = 1 \\ & x + 2y - 2z = 2 \\ & 2x + 3y - 3z = 4 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x + y - z = 1 \quad \text{----- (1)}$$

$$x + 2y - 2z = 2 \quad \text{----- (2)}$$

$$2x + 3y - 3z = 4 \quad \text{----- (3)}$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 2x + 3y - 3z = 3 \quad \text{----- (4)}$$

ถ้า (x, y, z) เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดแล้ว

(x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (1), (2), (3)

และถ้า (x, y, z) สอดคล้องกับสมการ (1), (2) แล้ว

(x, y, z) ต้องสอดคล้องกับสมการ (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า ไม่มี x, y, z ที่ทำให้สมการ (3) และ (4)

เป็นจริงพร้อมกัน

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

ระบบสมการนี้

ไม่มีคำตอบนะคะ



แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปรเมื่อ $n > 2$



คำชี้แจง : ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

1.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 9 \\ x - 3y + 2z &= -11 \\ 3x - y - z &= -3 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x + 2y - 3z = 9 \quad \text{----(1)}$$

$$x - 3y + 2z = -11 \quad \text{----(2)}$$

$$3x - y - z = -3 \quad \text{----(3)}$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } \dots\dots\dots \text{----(4)}$$

$$\dots\dots \times (\dots\dots) \text{ จะได้ } 6x - 2y - 2z = -6 \quad \text{----(5)}$$

$$(1) + (5) \text{ จะได้ } \dots\dots\dots \text{----(6)}$$

$$\text{จาก (4) จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots \text{----(7)}$$

$$\text{จาก (6) จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots \text{----(8)}$$

$$\text{แทน } x = \dots\dots\dots \text{ และ } y = \dots\dots\dots \text{ ใน (1)}$$

$$\text{จะได้ } \dots\dots\dots$$

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

นำ 7 คูณตลอด

จะได้

.....

.....

.....

.....

.....

$$z = \dots\dots\dots$$

แทน $z = \dots\dots\dots$ ใน (7)

จะได้

.....

$$y = \dots\dots\dots$$

แทน $z = \dots\dots\dots$ ใน (8)

จะได้

.....

$$x = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ



เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

2.

$$\begin{aligned}x - 3y - t &= 1 \\x - 3z - 2t &= 1 \\x + y + 5z + 2t &= -4 \\-x - y - 5z + 2t &= 16\end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x - 3y - t = 1 \quad \text{----(1)}$$

$$x - 3z - 2t = 1 \quad \text{----(2)}$$

$$x + y + 5z + 2t = -4 \quad \text{----(3)}$$

$$-x - y - 5z + 2t = 16 \quad \text{----(4)}$$

$$(3) + (4) \text{ จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$t = \dots\dots\dots$$

$$\text{แทน } t = \dots\dots\dots \text{ ใน (1)}$$

$$\text{จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots \quad \text{----(5)}$$

$$\text{แทน } t = \dots\dots\dots \text{ ใน (2)}$$

$$\text{จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$z = \dots\dots\dots \quad \text{----(6)}$$

$$\text{แทน } y = \dots\dots\dots, z = \dots\dots\dots \text{ และ } t = \dots\dots\dots \text{ ใน (3)}$$

$$\text{จะได้ } \dots\dots\dots$$

นำ 3 คูณตลอด

$$\text{จะได้ } \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots$$

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

แทน $x = 1$ ใน (5)

จะได้

$$y = \dots\dots\dots$$

แทน $x = 1$ ใน (6)

จะได้

$$z = \dots\dots\dots$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ





แบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2

รหัสวิชา ค31202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

จำนวน 10 ข้อ

เวลา 20 นาที

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับช่องอักษร ก ข ค หรือ ง ที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว

1. คำตอบของระบบสมการ $2x - y = 1$ และ $x + y = 5$ ตรงกับข้อใด

ก. (4, 1)

ข. (2, 3)

ค. (6, -1)

ง. (-4, 9)

2. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้น

ก. $4x = \frac{12}{x}$

ข. $x^2 = 20$

ค. $(x - 2)(x + 2) = 0$

ง. $5x + 6 = 0$

3. คำตอบของสมการ $6 - x = 3x - 18$ ตรงกับข้อใด

ก. 6

ข. 3

ค. -3

ง. -6

4. กำหนดระบบสมการ $3x - 2y = 6$ และ $6x - 5y = 30$ แล้ว $x + y$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. -28

ข. -8

ค. 8

ง. 28

5. กำหนดระบบสมการ $x - y = 8$ และ $x + y = 19$ แล้ว $2x - y$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 23.5

ข. 22.5

ค. 21.5

ง. 20.5

6. กำหนดระบบสมการ $x + y + z = 2$, $x - y - z = 0$ และ $x - y + z = 4$ แล้ว xyz มีค่าตรงกับข้อใด

ก. -2

ข. 0

ค. 2

ง. 3

7. คำตอบของระบบสมการ $3x + 2y = 13$ และ $3x - 2y = 5$ ตรงกับคำตอบของระบบสมการในข้อใด
- ก. $x + 2y = 8$ และ $2x - 2y = -2$ ข. $3x + y = 10$ และ $x + y = 5$
ค. $2x - y = 1$ และ $x + y = 5$ ง. $x + y = 5$ และ $-x - 2y = -7$
8. กำหนดระบบสมการ $2x + y - z = 2$, $x + 2y - z = 3$ และ $x + y - 2z = 3$ แล้ว $x + y + z$ มีค่าตรงกับข้อใด
- ก. 0 ข. 1
ค. 2 ง. -2
9. ข้อใดกล่าวถึงคำตอบของระบบสมการ $2x + y = 0$, $x + y + z = 2$ และ $x - y = z$ ได้ถูกต้อง
- ก. $x < y < z$ ข. $y < z < x$
ค. $z < x < y$ ง. $y < x < z$
10. กำหนดระบบสมการ $x + y = 5$, $y + z = 6$ และ $2x + z = 7$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- ก. $x + y + z = 7$ ข. $-x + y - z = -2$
ค. $2x - y + z = 3$ ง. $x - y - z = -3$



กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				



คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ทำได้.....คะแนน



แบบบันทึกคะแนน
เล่มที่ 1 ระบบสมการ

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ผลการพัฒนา
แบบทดสอบก่อนเรียน	10		
แบบทดสอบหลังเรียน	10		

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ผลการประเมิน	
			ผ่านเกณฑ์	ไม่ผ่านเกณฑ์
แบบฝึกทักษะที่ 1	10			
แบบฝึกทักษะที่ 2	20			

เกณฑ์การประเมิน

- ◇ มีการพัฒนา หมายถึง คะแนนสอบหลังเรียนมากกว่าคะแนนก่อนเรียน
- ◇ ในแต่ละแบบฝึกทักษะนักเรียนจะต้องทำแบบฝึกทักษะถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 75
 - ★ แบบฝึกทักษะที่ 1 นักเรียนจะต้องทำแบบฝึกทักษะถูกไม่น้อยกว่า 7.5 คะแนน
 - ★ แบบฝึกทักษะที่ 2 นักเรียนจะต้องทำแบบฝึกทักษะถูกไม่น้อยกว่า 15 คะแนน



ภาคผนวก





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้น

ข้อ	คำตอบ
1	ง
2	ก
3	ข
4	ค
5	ง
6	ก
7	ก
8	ง
9	ข
10	ก



เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบก่อนเรียน

(ข้อละ 1 คะแนน จำนวน 10 ข้อ รวม 10 คะแนน)

- ❖ ตอบถูก 1 ข้อ ได้ 1 คะแนน
- ❖ ตอบผิด 1 ข้อ หรือไม่ตอบ ได้ 0 คะแนน



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



คำชี้แจง : ให้นักเรียนแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

1.

$$2x + 3y = 12$$

$$3x - 3y = 3$$

วิธีทำ

$$2x + 3y = 12 \quad \text{-----(1)}$$

$$3x - 3y = 3 \quad \text{-----(2)}$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 5x = 15 \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$x = \frac{15}{5}$$

$$x = 3 \quad 1 \text{ คะแนน}$$

แทน $x = 3$ ใน (1)

$$\text{จะได้ } 2(3) + 3y = 12 \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$6 + 3y = 12$$

$$3y = 12 - 6$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2 \quad 1 \text{ คะแนน}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ (3, 2) 1 คะแนน



2.

$$2(x - 3) = y - 2$$

$$2x - 3y = 12$$

วิธีทำ

$$2(x - 3) = y - 2 \quad \text{-----}(1)$$

$$2x - 3y = 12 \quad \text{-----}(2)$$

จาก (1) จะได้

$$2x - 6 = y - 2$$

$$2x - y = 6 - 2$$

$$2x - y = 4 \quad \text{-----}(3)$$

(2) - (3) จะได้

$$-2y = 8$$

1 คะแนน

$$y = \frac{8}{-2}$$

$$y = -4$$

1 คะแนน

แทน $y = -4$ ใน (2)

จะได้

$$2x - 3(-4) = 12$$

1 คะแนน

$$2x + 12 = 12$$

$$2x = 12 - 12$$

$$2x = 0$$

$$x = \frac{0}{2}$$

$$x = 0$$

1 คะแนน

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $(0, -4)$

1 คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกทักษะที่ 1

(ข้อละ 5 คะแนน จำนวน 2 ข้อ รวม 10 คะแนน)



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปรเมื่อ $n > 2$ 

คำชี้แจง : ให้นักเรียนแก้ระบบสมการเชิงเส้น ต่อไปนี้

1.

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 9 \\x - 3y + 2z &= -11 \\3x - y - z &= -3\end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x + 2y - 3z = 9 \quad \text{----(1)}$$

$$x - 3y + 2z = -11 \quad \text{----(2)}$$

$$3x - y - z = -3 \quad \text{----(3)}$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } 5y - 5z = 20 \quad \text{----(4)} \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$2 \times (3) \text{ จะได้ } 6x - 2y - 2z = -6 \quad \text{----(5)} \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$(1) + (5) \text{ จะได้ } 7x - 5z = 3 \quad \text{----(6)} \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$\text{จาก (4) จะได้ } 5(y - z) = 20$$

$$y - z = \frac{20}{5}$$

$$y - z = 4$$

$$y = z + 4 \quad \text{----(7)} \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$\text{จาก (6) จะได้ } 7x = 5z + 3$$

$$x = \frac{5z + 3}{7} \quad \text{----(8)} \quad 1 \text{ คะแนน}$$

$$\text{แทน } x = \frac{5z + 3}{7} \text{ และ } y = z + 4 \text{ ใน (1)}$$

$$\text{จะได้ } \frac{5z + 3}{7} + 2(z + 4) - 3z = 9 \quad 1 \text{ คะแนน}$$

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

นำ 7 คูณตลอด

$$\text{จะได้ } 5z + 3 + 7(2)(z + 4) - 7(3z) = 7(9)$$

$$5z + 3 + 14z + 56 - 21z = 63$$

$$59 - 2z = 63$$

$$z = \frac{63 - 59}{-2}$$

$$z = \frac{4}{-2}$$

$$z = -2$$

1 คะแนน

แทน $z = -2$ ใน (7)

$$\text{จะได้ } y = -2 + 4$$

$$y = 2$$

1 คะแนน

แทน $z = -2$ ใน (8)

$$\text{จะได้ } x = \frac{5(-2) + 3}{7}$$

$$x = -1$$

1 คะแนน

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $(-1, 2, -2)$

1 คะแนน



2.

$$\begin{aligned}x - 3y - t &= 1 \\x - 3z - 2t &= 1 \\x + y + 5z + 2t &= -4 \\-x - y - 5z + 2t &= 16\end{aligned}$$

วิธีทำ

$$x - 3y - t = 1 \quad \text{----(1)}$$

$$x - 3z - 2t = 1 \quad \text{----(2)}$$

$$x + y + 5z + 2t = -4 \quad \text{----(3)}$$

$$-x - y - 5z + 2t = 16 \quad \text{----(4)}$$

$$(3) + (4) \text{ จะได้ } 4t = 12$$

$$t = \frac{12}{4}$$

$$t = 3$$

1 คะแนน

แทน $t = 3$ ใน (1)

1 คะแนน

$$\text{จะได้ } x - 3y - 3 = 1$$

$$y = \frac{x - 4}{3} \quad \text{----(5)}$$

1 คะแนน

แทน $t = 3$ ใน (2)

1 คะแนน

$$\text{จะได้ } x - 3z - 2(3) = 1$$

$$z = \frac{x - 7}{3} \quad \text{----(6)}$$

1 คะแนน

$$\text{แทน } y = \frac{x - 4}{3}, z = \frac{x - 7}{3} \text{ และ } t = 3 \text{ ใน (3)}$$

$$\text{จะได้ } x + \left(\frac{x - 4}{3}\right) + 5\left(\frac{x - 7}{3}\right) + 2(3) = -4$$

1 คะแนน

นำ 3 คูณตลอด

$$\text{จะได้ } 3x + x - 4 + 5(x - 7) + 18 = -12$$

$$9x - 21 = -12$$

$$x = \frac{-12 + 21}{9}$$

$$x = \frac{9}{9}$$

$$x = 1$$

1 คะแนน

เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

แทน $x = 1$ ใน (5)

จะได้

$$y = \frac{1-4}{3}$$

$$y = -1$$

1 คะแนน

แทน $x = 1$ ใน (6)

จะได้

$$z = \frac{1-7}{3}$$

$$z = \frac{-6}{3}$$

$$z = -2$$

1 คะแนน

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้ คือ $(1, -1, -2, 3)$

1 คะแนน

เกณฑ์การให้คะแนนแบบฝึกทักษะที่ 2

(ข้อละ 10 คะแนน จำนวน 2 ข้อ รวม 20 คะแนน)





เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 ระบบสมการเชิงเส้น

ข้อ	คำตอบ
1	ข
2	ง
3	ก
4	ก
5	ค
6	ก
7	ง
8	ก
9	ง
10	ข



เกณฑ์การให้คะแนนแบบทดสอบหลังเรียน

(ข้อละ 1 คะแนน จำนวน 10 ข้อ รวม 10 คะแนน)

- ❖ ตอบถูก 1 ข้อ ได้ 1 คะแนน
- ❖ ตอบผิด 1 ข้อ หรือไม่ตอบ ได้ 0 คะแนน



บรรณานุกรม

กวิยา เนาวประทีป. 2556. **เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ : เมตริกซ์**. กรุงเทพมหานคร:

สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

กระทรวงศึกษาธิการ. 2552. **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**.

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.

----- . 2553. **คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6** .

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.,ลาดพร้าว.

ชนวัฒน์(สันติ) สนทราพรพล. 2553. **แบบฝึกหัดและเทคนิคคิดโจทย์เร็วคณิตศาสตร์เพิ่มเติม**

ม.4 เล่ม 2 .กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์ SCIENCE CENTER

----- . 2556. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6** .

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.,ลาดพร้าว.

----- . 2557. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3** .

กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ สกสค.,ลาดพร้าว.