

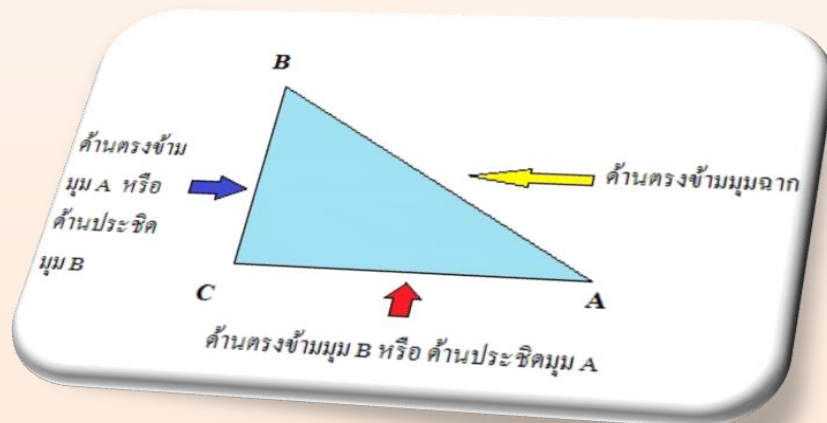
ชุดการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 3
แบบสืบสวนสอบสวน
เรื่อง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

ชุดที่

1

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

อัตราส่วนตรีโกณมิติ



โดย ว่าที่ ร.ท.นิรัตน์ จุลเอียด
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ
โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 9

คำนำ

ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน ชุดนี้เป็น ชุดที่ 1 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มุ่งให้ผู้เรียนใช้ในการศึกษาและฝึกทักษะให้มีความรู้ในเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก หาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คาคะเนระยะทางและความสูง สร้างขึ้นเพื่อเป็นแนวทางในการจัดการ เรียนการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ซึ่งเน้นให้นักเรียนได้แสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ใช้ทักษะ ต่างๆในการแสวงหาความรู้ ทั้งนี้ได้นำเนื้อหา สารการเรียนรู้ที่นักเรียนเคยได้ศึกษามาแล้ว เชื่อมโยงกับความรู้ใหม่ได้อย่างสร้างสรรค์ เพื่อเป็นพื้นฐานการคำนวณและทักษะกระบวนการใน ระดับขั้นที่สูงขึ้นต่อไปให้เกิดการเรียนรู้ได้ง่ายและต่อเนื่องกัน ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ศึกษาหา ความรู้ และสรุปองค์ความรู้ด้วยตนเอง

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียน เพื่อนครู และผู้เชี่ยวชาญ ที่ให้คำปรึกษาและ แนะนำในการจัดทำชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชุดนี้ และหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เนื้อหา สื่อ ตลอดจน ข้อมูลต่างๆที่ได้รวบรวมไว้ในชุดการเรียนรู้จะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนและครูในการพัฒนา กิจกรรมการเรียนการสอนให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้เป็นอย่างดี

ว่าที่ ร.ท.นิรัตน์ จุลเอียด



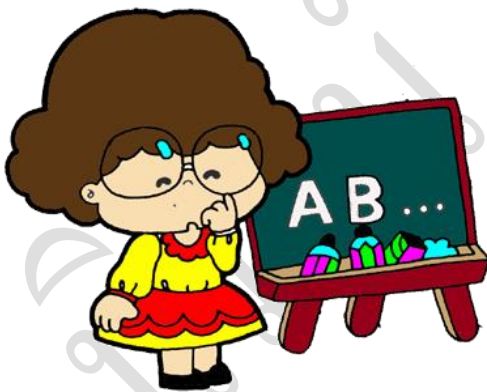
คำชี้แจง

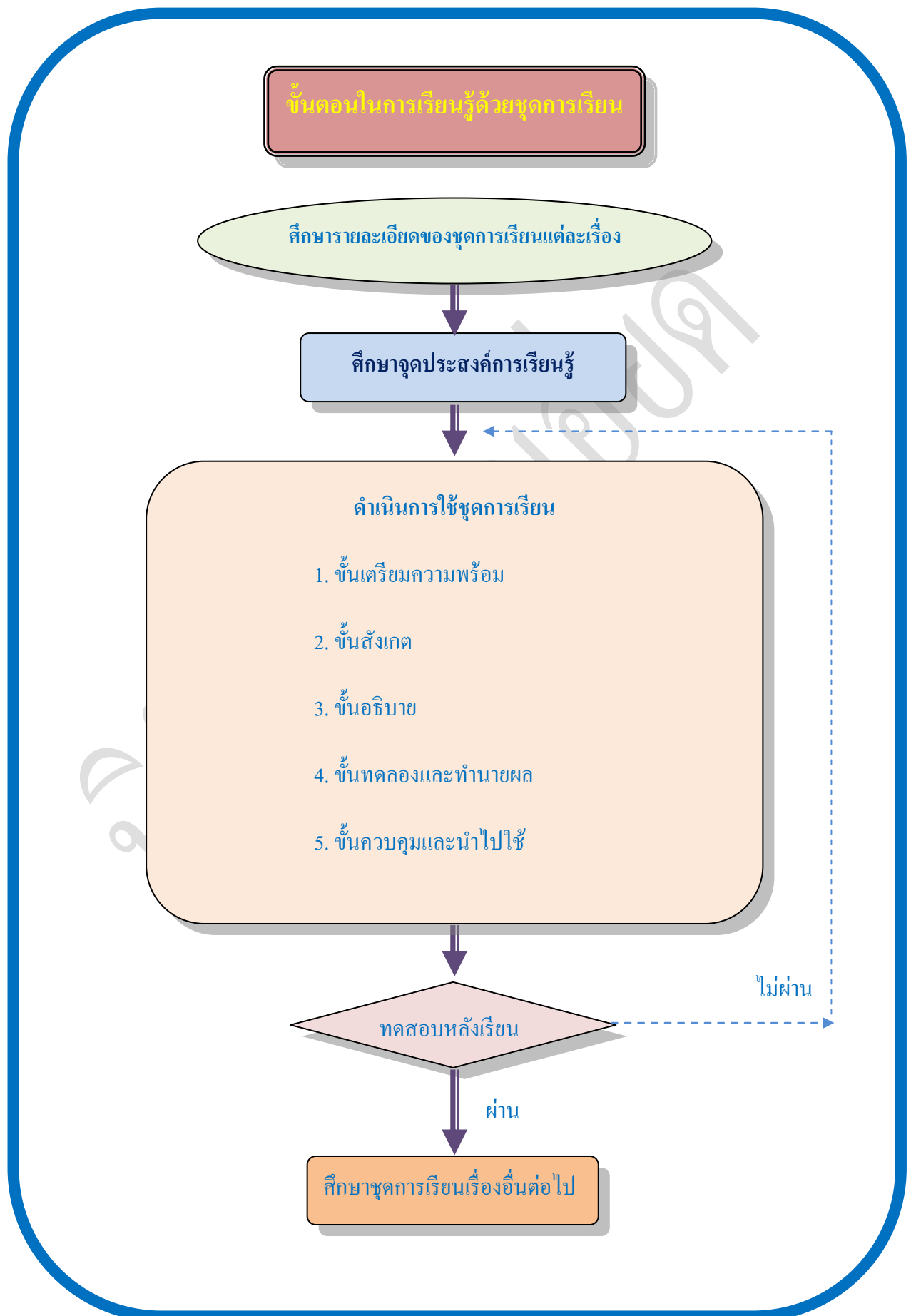
การใช้ชุดการเรียนรู้นี้ ครูจะเป็นผู้นำเสนอกิจกรรมและนักเรียนเป็นผู้ร่วมกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้บรรลุจุดประสงค์ นักเรียนควรปฏิบัติตามนี้

1. นักเรียนต้องปฏิบัติตามขั้นตอนของกิจกรรมฝึกทักษะอย่างเคร่งครัด ดังนี้
 - 1.1 อ่านรายละเอียดของชุดการเรียนรู้ก่อนลงมือปฏิบัติทุกครั้ง
 - 1.2 ปฏิบัติตามคำชี้แจงในกิจกรรมและสรุปท้ายกิจกรรมทุกกิจกรรมที่เน้นกระบวนการกลุ่ม คือช่วยเหลือให้คำแนะนำซึ่งกันและกัน
 - 1.3 หลังจากทำกิจกรรมและสรุปท้ายกิจกรรมในแต่ละกิจกรรม ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยและอภิปรายเกี่ยวกับผลการทำกิจกรรม
 - 1.4 ทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเองให้ผ่านเกณฑ์ (ได้คะแนน ร้อยละ 75 ของคะแนนเต็ม) ในแต่ละแบบฝึก ร่วมกันเฉลยและอภิปรายเกี่ยวกับคำตอบของนักเรียน
 - 1.5 เรียนรู้ทุกกิจกรรมด้วยความตั้งใจและมีความซื่อสัตย์ โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อนตอบ
2. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูอาจปรับเปลี่ยนกิจกรรมและวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ได้ตามความเหมาะสม โดยคำนึงถึงระดับสติปัญญาและความสามารถของผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยครูเป็นผู้คอยชี้แนะและตั้งคำถาม และให้ผู้เรียนสรุปชุดการเรียนรู้ในแต่ละหัวข้อ ซึ่งครูอาจเสริมแต่งตามความเหมาะสม แล้วร่วมกันสรุปกับผู้เรียนอีกครั้งหนึ่ง
3. ถ้านักเรียนมีข้อสงสัยหรือมีปัญหาไม่เข้าใจ สามารถขอคำแนะนำจากครูผู้สอนได้
4. บันทึกคะแนนลงในแบบบันทึกคะแนนเพื่อการพัฒนา

ผลการเรียนรู้

1. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้และคาดคะเนระยะทางและความสูงได้อย่างถูกต้อง
2. แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง
3. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติและเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ไปใช้แก้ปัญหาได้





สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
คู่มือการใช้ชุดการเรียนรู้สำหรับนักเรียน	ข
ผลการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ค
ผังขั้นตอนการเรียนรู้.....	ง
ชุดการเรียนรู้ชุดที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	1
ใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....	2
ใบงานที่ 1 – 1.....	6
ใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 2.....	7
แบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....	10
ใบความรู้ ที่ 1 – 1	12
แบบฝึกทักษะที่ 1 – 1.....	14
แบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ที่ 1.....	16
บรรณานุกรม	18
ภาคผนวก.....	20
เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....	21
เฉลยใบงานที่ 1 – 1.....	24
เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 2.....	25
เฉลยแบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....	28
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 – 1.....	30
เฉลยแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ที่ 1.....	34

ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน ชุดที่ 1

เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

คำชี้แจง ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนชุดที่ 1

1. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง จุดประสงค์การเรียนรู้และสาระการเรียนรู้อย่างละเอียด
2. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มซึ่งครูจัดไว้กลุ่มละ 4 คน แล้วให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาภายในกลุ่มของตัวเอง
3. ให้สมาชิกภายในกลุ่มช่วยกันกำหนดปัญหาและหาคำตอบของกิจกรรมตามขั้นตอนแบบสืบสวนสอบสวน
4. ให้นักเรียนแต่ละคนศึกษาหาข้อสรุปของตนเอง และมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองในการศึกษาชุดการเรียนรู้
5. นำข้อสรุปที่แต่ละคนได้มารวมกันวิเคราะห์เป็นข้อสรุปของกลุ่ม
6. ให้แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอข้อสรุปของกลุ่มสู่ห้องเรียนเพื่อร่วมกันสรุปทั้งห้องเรียน
7. หลังจากนักเรียนศึกษาและทำใบกิจกรรมจากชุดการเรียนรู้เสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้
8. ในการเรียนรู้ด้วยชุดการเรียนรู้ ชุดที่ 1 นักเรียนมีเวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้และคาดคะเนระยะทางและความสูงได้อย่างถูกต้อง

2. แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้อย่างถูกต้อง

เวลาที่ใช้ 3 ชั่วโมง

สื่อการเรียนรู้ ใบความรู้ที่ 1-1 ใบงานที่ 1-1

ใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1-1, 1-2

แบบฝึกทักษะที่ 1-1 และแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ที่ 1



ใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 - 1

สาระการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้
2. หาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้

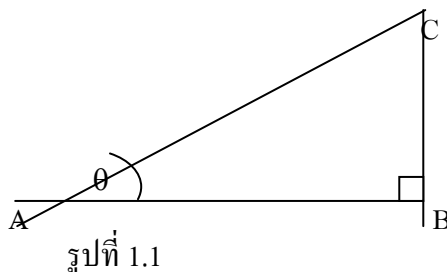
คำชี้แจง ให้ผู้เรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบกิจกรรมแล้วทำงานและกิจกรรมระหว่างเรียน

บทนำ

คำว่า “ตรีโกณมิติ” (Trigonometry) มาจากภาษากรีก ซึ่งหมายถึง การวัดรูปสามเหลี่ยม (Measurement of triangle) ในขั้นต้นตรีโกณมิติเป็นมุมมองในรูปความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม และได้นำไปใช้ในการพัฒนาด้านดาราศาสตร์ การเดินเรือและการสำรวจ ต่อมาในศตวรรษที่ 17 ได้มีการพัฒนาด้านแคลคูลัสและวิทยาศาสตร์กายภาพ ได้มีมุมมองเกี่ยวกับตรีโกณมิติที่แตกต่างออกไปจากเดิม ซึ่งได้มองตรีโกณมิติในรูปของฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง ทำให้การประยุกต์ของตรีโกณมิติได้ขยายกว้างขวางขึ้น เช่น ปรากฏการณ์เกี่ยวกับการหมุน การสั่น รวมไปถึงคลื่นเสียง รังสี การโคจรของโลก การแกว่งของลูกตุ้ม

มุมมองแบบแรกของตรีโกณมิติ คือ มุมมองในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี θ เป็นมุมแหลม ดังแสดงในรูปที่ 1.1



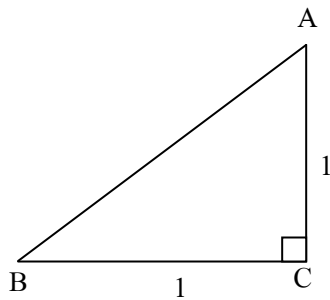
ด้าน AC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก (Hypotenuse)

ด้าน BC เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุม θ (Opposite side)

ด้าน AB เรียกว่า ด้านประชิดมุม θ (Adjacent side)

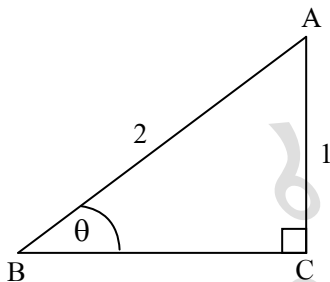
ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากแผนภาพต่อไปนี้แล้วเติมคำลงในช่องว่าง

แผนภาพที่ 1



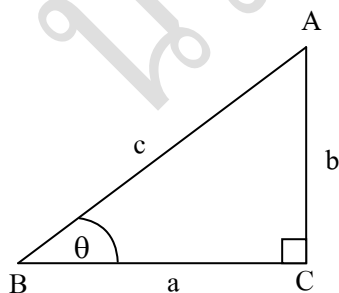
- ด้านที่ยาว 1 หน่วย เรียกว่า
- ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ หน่วย
- นักเรียนหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้โดยใช้

แผนภาพที่ 2



- ถ้าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 1 หน่วย แล้วความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากับ หน่วย หาได้จาก
- จากความรู้เดิมเรื่องตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin \theta = \dots\dots\dots$
- เนื่องจาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\theta = \dots\dots\dots$

แผนภาพที่ 3



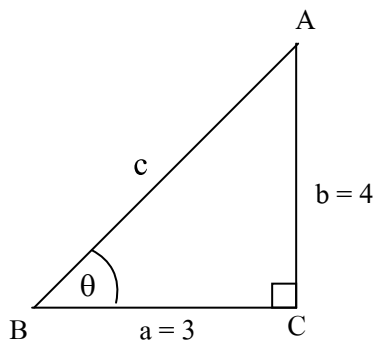
- สามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วยตามลำดับ จะได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก $c = \dots\dots\dots$

$$\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dots\dots\dots$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \dots\dots\dots$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta} = \dots\dots\dots$$

แผนภาพที่ 4



- สามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม B และด้านประชิดมุม B ดังแผนภาพที่ 4 ยาว 4 และ 3 หน่วยตามลำดับ และมี C เป็นมุมฉากยาว c หน่วยแล้ว

$$a^2 = \dots\dots\dots, b^2 = \dots\dots\dots$$

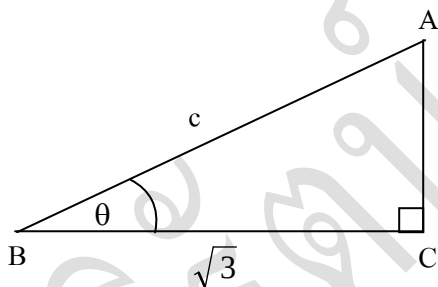
$$\text{และ } c^2 = \dots\dots\dots$$

- เมื่อ θ เป็นขนาดของมุม B ดังนั้น

$$\sin \theta = \dots\dots\dots, \cos \theta = \dots\dots\dots$$

$$\text{และ } \tan \theta = \dots\dots\dots$$

แผนภาพที่ 5



$$- c = \dots\dots\dots$$

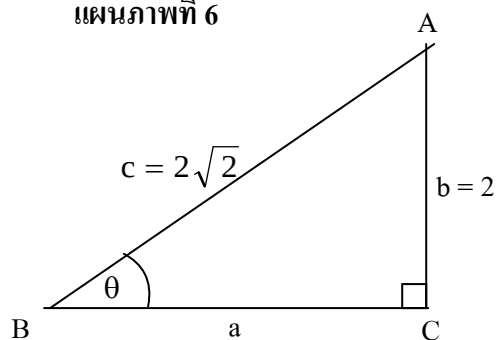
$$- \sin \theta = \dots\dots\dots$$

$$- \cos \theta = \dots\dots\dots$$

$$- \tan \theta = \dots\dots\dots$$

$$- \theta = \dots\dots\dots$$

แผนภาพที่ 6



$$- a = \dots\dots\dots$$

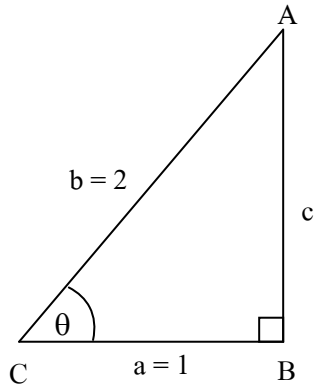
$$- \sin \theta = \dots\dots\dots$$

$$- \cos \theta = \dots\dots\dots$$

$$- \tan \theta = \dots\dots\dots$$

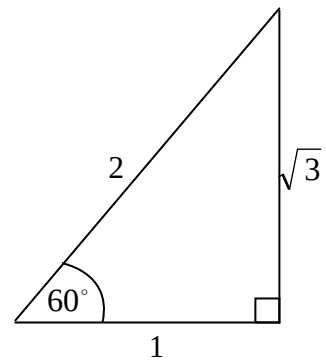
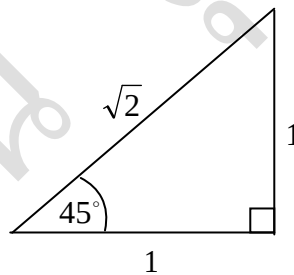
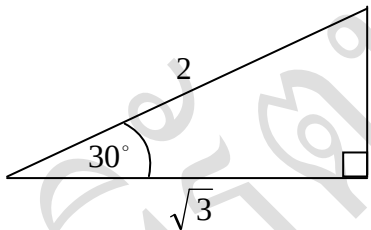
$$- \theta = \dots\dots\dots$$

แผนภาพที่ 7

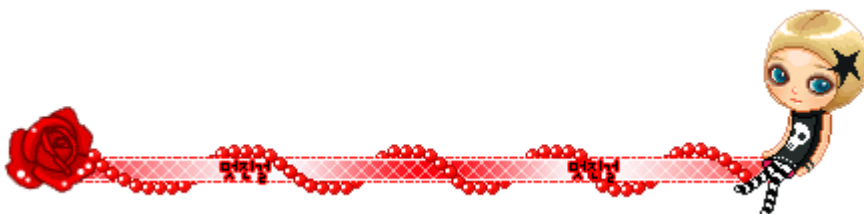


- $c = \dots\dots\dots$
- $\sin \theta = \dots\dots\dots$
- $\cos \theta = \dots\dots\dots$
- $\tan \theta = \dots\dots\dots$
- $\theta = \dots\dots\dots$

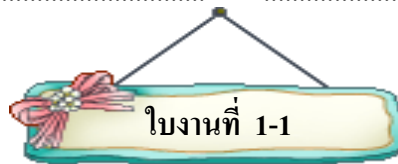
แผนภาพสรุปค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°



- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $\sin 30^\circ = \dots\dots\dots$ | $\sin 45^\circ = \dots\dots\dots$ | $\sin 60^\circ = \dots\dots\dots$ |
| $\cos 30^\circ = \dots\dots\dots$ | $\cos 45^\circ = \dots\dots\dots$ | $\cos 60^\circ = \dots\dots\dots$ |
| $\tan 30^\circ = \dots\dots\dots$ | $\tan 45^\circ = \dots\dots\dots$ | $\tan 60^\circ = \dots\dots\dots$ |

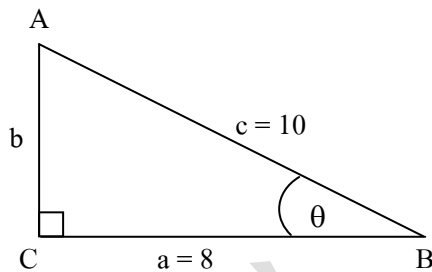


ชื่อ ชั้น เลขที่



คำชี้แจง จงหาค่า $\sin \theta$, $\cos \theta$ และ $\tan \theta$ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

1.



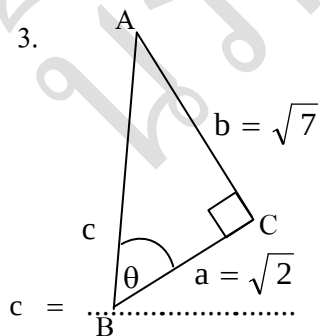
$b = \dots\dots\dots$

$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

3.

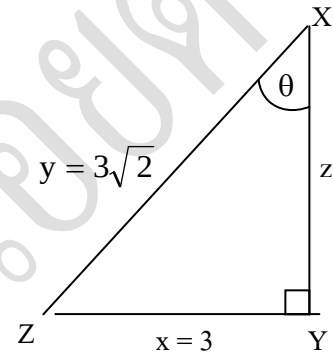


$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

2.



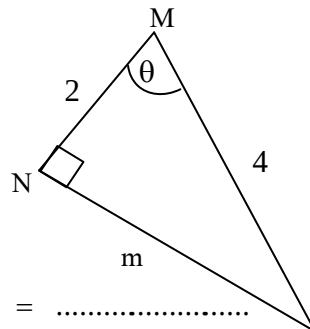
$z = \dots\dots\dots$

$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

4.



$m = \dots\dots\dots$

$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

ใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 - 2

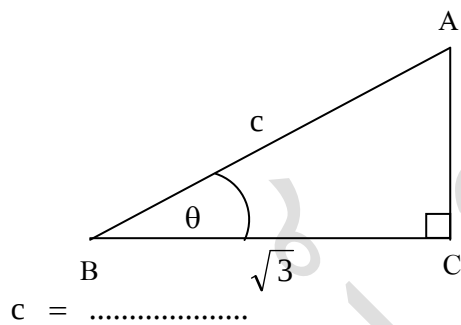
สาระการเรียนรู้ การหาส่วนประกอบของสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้ แก้ไขโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาใบกิจกรรมระหว่างเรียนต่อไปนี้ และเติมค่าลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้

แผนภาพที่ 1

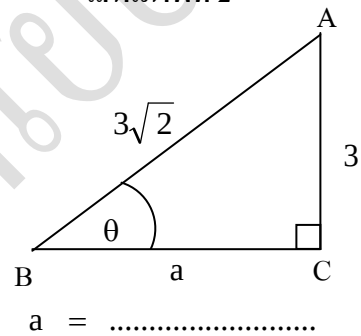


$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

แผนภาพที่ 2

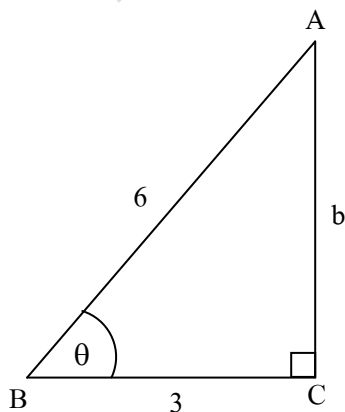


$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

แผนภาพที่ 3



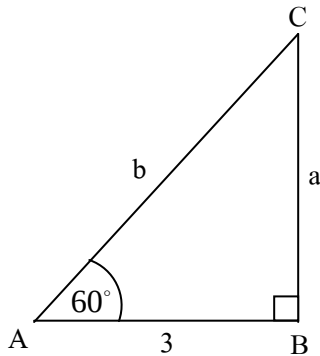
$\sin \theta = \dots\dots\dots$

$\cos \theta = \dots\dots\dots$

$\tan \theta = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 60° และ $\overline{AB}$ ยาว 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

วิธีทำ



- โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง

- โจทย์ต้องการหาอะไร

- จากรูป $\cos 60^\circ = \dots\dots\dots$

- จากความรู้เดิม จะได้ว่า $\cos 60^\circ = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{3}{b} = \dots\dots\dots$

จะได้ว่า $b = \dots\dots\dots$

- นักเรียนสามารถหา $\overline{BC}$ ได้โดยใช้

- จะได้ว่า $a^2 = \dots\dots\dots$ นั่นคือ $a = \dots\dots\dots$

- ถ้าใช้ $\sin 60^\circ$ จะได้ว่า $\sin 60^\circ = \dots\dots\dots$

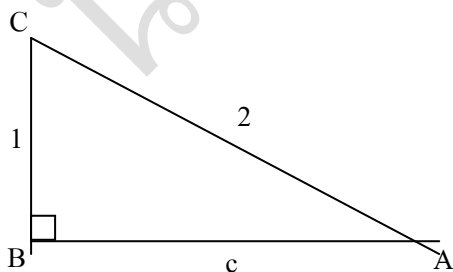
- จากความรู้เดิมได้ว่า $\sin 60^\circ = \dots\dots\dots$

- ดังนั้น $\dots\dots\dots = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a = \dots\dots\dots$ เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉาก $\overline{BC}$ ยาว 1 เมตร $\overline{AC}$ ยาว 2 เมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือและขนาดของมุม A

วิธีทำ



- จากโจทย์ทราบอะไร

- ต้องการหาอะไร

- จากโจทย์และความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วน

ตรีโกณมิติจะได้ว่า $\sin A = \dots\dots\dots$

$\sin 30^\circ = \dots\dots\dots$

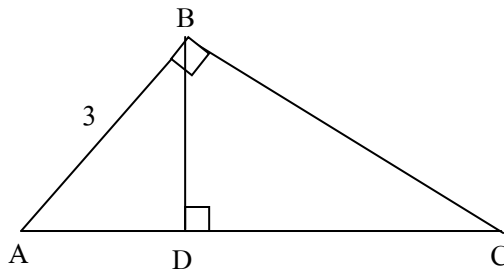
ดังนั้น $A = \dots\dots\dots$

- เราสามารถหา $\overline{AB}$ ได้อย่างไร

- จะได้ว่า ความยาวของ $\overline{AB} = \dots\dots\dots$ เมตร

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉาก $\overline{AB}$ ยาว 3 เมตร $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D ขนาดของมุม C เท่ากับ 30° จงหาความยาวของ $\overline{BD}$ ด้านที่เหลือของสามเหลี่ยม ABC และขนาดของมุม A

วิธีทำ



- โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง
-
- โจทย์ต้องการหาอะไร
-
- จะหา $\overline{AC}$ ได้อย่างไร
-

- ดังนั้น $\overline{AC} =$ เมตร
- $\angle A =$
- จะหา $\overline{BD}$ ได้อย่างไร
-
- $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} =$
- ดังนั้น $\overline{BD} =$
-

จะได้ว่า $\overline{AC}$ ยาว เมตร และ $\overline{BD}$ ยาว เมตร
หา $\overline{BC}$ โดย

.....

.....

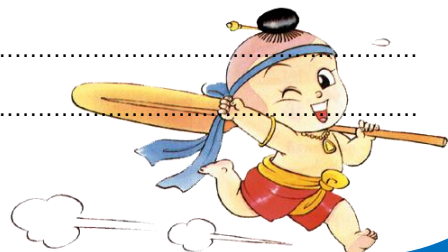
.....

.....

.....

.....

.....





ชื่อ

เลขที่

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนต่อไปนี้

1. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D
 $\overline{AD} = 3$ หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยมี $\hat{C} = 45^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ และ $\overline{AD}$
ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D และ $\overline{AD} = 2$ หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

ใบความรู้ที่ 1-1

สาระการเรียนรู้ การหาระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้ นำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางและความสูงได้

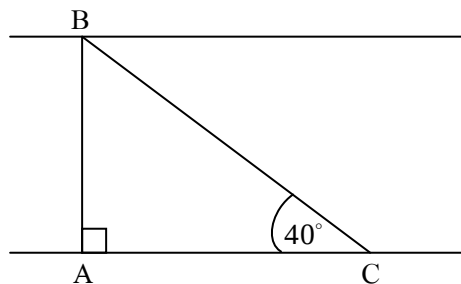
คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาและทำความเข้าใจใบความรู้ต่อไปนี้

ความรู้เกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติสามารถนำไปใช้ในการหาระยะทางและความสูงซึ่งไม่สามารถนำเครื่องมืออย่างใดอย่างหนึ่งได้โดยตรง เช่น การหาความสูงของภูเขา ความกว้างของแม่น้ำ ในการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องเหล่านี้อาศัยการเขียนรูป โดยอาศัยหลักการต่อไปนี้

1. ความสูงของสิ่งที่ต้องการหา เช่น ภูเขา ต้นไม้ ประภาคาร ฯลฯ ตั้งฉากกับพื้นเสมอ
2. มุมเงยหรือมุมยกขึ้น คือ มุมที่เกิดขึ้นจากเส้นระดับตากับเส้นตรงที่ลากจากจุดสังเกตไปยังวัตถุเมื่อวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับตา
3. มุมก้มหรือมุมกดลง คือ มุมที่เกิดจากเส้นระดับตากับเส้นตรงที่ลากจากจุดสังเกตไปยังวัตถุเมื่อวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับตา

ตัวอย่างที่ 1 ชายคนหนึ่งต้องการวัดความกว้างของแม่น้ำ เขายืนอยู่ริมฝั่งที่จุด A แล้วมองข้ามไปที่จุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามซึ่งเป็นระยะที่สั้นที่สุด แล้วเขาเดินเลียบฝั่งแม่น้ำไปเป็นระยะทาง 100 เมตรถึงหยุดที่จุด C วัดมุม ACB ได้ 40° จงหาความกว้างของแม่น้ำ (กำหนด $\tan 40^\circ = 0.839$)

วิธีทำ



จากรูป AB เป็นความกว้างของแม่น้ำ

ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากมี $\hat{A} = 90^\circ$

และ $\hat{C} = 40^\circ$, $\overline{AC} = 100$

$$\text{จะได้ว่า } \tan 40^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \tan 40^\circ$$

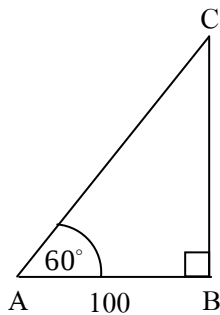
$$\overline{AB} = 100 \times 0.839$$

$$\overline{AB} = 83.9$$

ดังนั้น แม่น้ำกว้าง 83.9 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งอยู่บนพื้นดิน ณ จุดๆหนึ่งเขามองดูยอดเสาตรงเป็นมุมเงย 60° องศา ถ้าชายคนนี้อยู่ห่างจากเสาตรงเป็นระยะ 100 เมตร จงหาความสูงของเสาตรง

วิธีทำ



จากรูป ให้ $\overline{BC}$ เป็นความสูงของเสาตรง, A เป็นจุดที่ชายคนนั้นยืนอยู่

สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\hat{B} = 90^\circ$

และ $\hat{A} = 60^\circ$, $\overline{AB} = 100$ เมตร

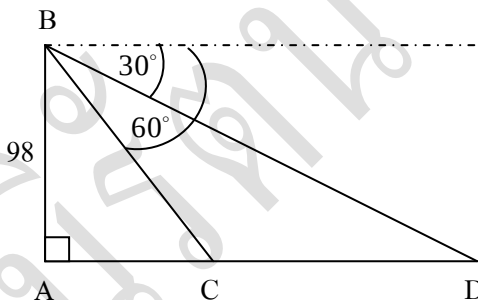
ต้องการหา $\overline{BC}$

$$\begin{aligned}\cos 60^\circ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \\ \overline{BC} &= \overline{AB} \cdot \cos 60^\circ \\ &= 100 \times \frac{1}{2} = 50\end{aligned}$$

ดังนั้น เสาตรงสูง 50 เมตร

ตัวอย่างที่ 3 ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหอคอยซึ่งสูง 98 เมตร มองเห็นคนสองคนบนพื้นดิน ในทิศทางเดียวกันเป็นมุมก้ม 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาว่าคนทั้งสองห่างกันกี่เมตร

วิธีทำ



ให้ $\overline{AB}$ เป็นความสูงของหน้าผา

C และ D เป็นคนสองคนบนพื้นดิน

โดยความรู้เรื่องเส้นขนาน จะได้ว่า

$\hat{ADB} = 30^\circ$, $\hat{ACB} = 60^\circ$,

$\hat{CBD} = 30^\circ$

ดังนั้น BCD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี

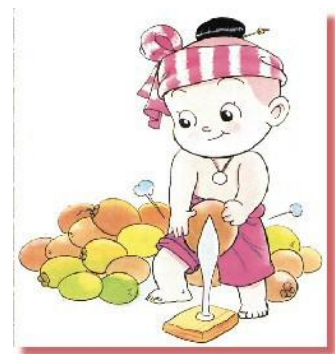
$\overline{BC} = \overline{CD}$

พิจารณา สามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin \hat{ACB} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \\ \overline{BC} &= \frac{\overline{AB}}{\sin \hat{ACB}} = \frac{98}{\sin 60^\circ}\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{BC} = \overline{CD} = \frac{98}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{196}{\sqrt{3}}$$

นั่นคือ คนทั้งสองยืนห่างกัน $\frac{196\sqrt{3}}{3}$ เมตร





แบบฝึกทักษะที่ 1 - 1

ชื่อ ชั้น เลขที่

1. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นกองหินบนพื้นดินเบื้องล่างในแนวเดียวกับ
เชิงผาเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่ากองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผากี่เมตร

วิธีทำ
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุดๆหนึ่งเขามองดูยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30 องศา เมื่อเขาเดิน
เข้าไปใกล้เสาธงเป็นระยะ 100 เมตร เขาจะเห็นมุมเงยของยอดเสาธงเป็น 60 องศา จงหา
ความสูงของเสาธง

วิธีทำ
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3. เด็กคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาเหนือระดับน้ำทะเล 100 เมตร มองเห็นเรือสองลำทอดสมอยู่ในทะเลในแนวเดียวกันเป็นมุมก้ม 60° และ 45° ตามลำดับ จงหาว่าเรือสองลำอยู่ห่างกันกี่เมตร

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. นักเรียนคนหนึ่งยืนห่างจากอาคารเรียน 50 เมตร มองเห็นโคนเสาธงซึ่งปักอยู่บนยอดอาคารเป็นมุมเงย 45° และมองเห็นปลายเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

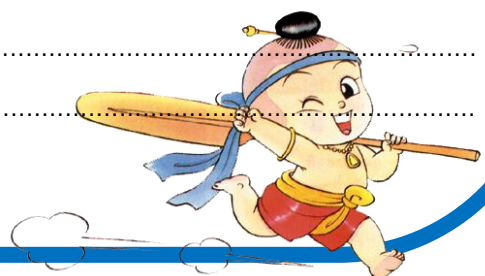
.....

.....

.....

.....

.....



6. ในสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งมี C เป็นมุมฉาก ถ้า $\cos A = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$

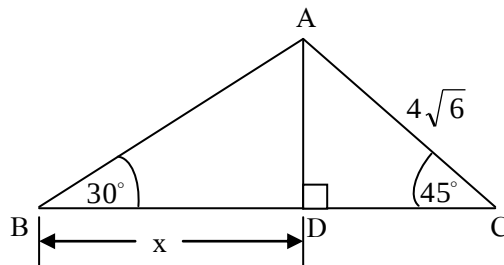
ก. $\sqrt{3} - 1$

ข. $\sqrt{3} + 1$

ค. $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

ง. $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$

7. จากรูป จงหาค่า x



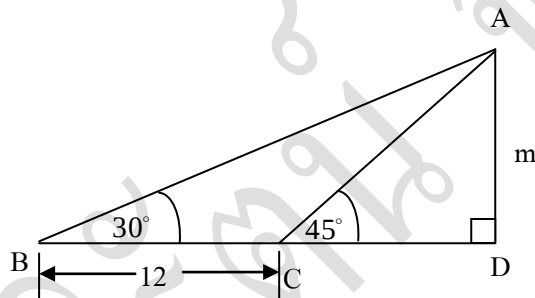
ก. $4\sqrt{3}$

ข. $5\sqrt{3}$

ค. 10

ง. 12

8. จากรูป จงหาค่า m



ก. $\frac{12}{\sqrt{3} - 1}$

ข. $\frac{\sqrt{3} - 1}{12}$

ค. $\frac{8}{\sqrt{3} + 1}$

ง. $\frac{\sqrt{3} + 1}{8}$

9. มองเห็นเสาอากาศวิทยุบนยอดดึก เมื่อขึ้นห่างจากดึกเป็นระยะทาง $40\sqrt{3}$ เมตร ซึ่งมุมเงยที่เท่ากับยอดเสาอากาศและยอดดึกเป็น 60° และ 30° ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาอากาศ

ก. 40 เมตร

ข. 60 เมตร

ค. 80 เมตร

ง. 120 เมตร

10. จากยอดคอคอยแห่งหนึ่งซึ่งสูง 100 เมตร เมื่อมองก้มลงมาเห็นวัตถุสองชนิดบนพื้นดินซึ่งอยู่ทางทิศตะวันตก ทำให้มุมก้มมีขนาดเท่ากับ 30° และ 45° ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสองโดยประมาณ

ก. 72 เมตร

ข. 73 เมตร

ค. 74 เมตร

ง. 75 เมตร

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ. หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2546.
- บุปผา เชื้อสกุล. การสอนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอนซ่อมเสริม. วิทยานิพนธ์ ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต. บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2544.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. เอกสารวิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์, 2535.
- _____. คู่มือการจัดการเรียนรู้สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2544.
- _____. สาระและมาตรฐานหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน วิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2544.
- _____. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว, 2548.
- สมศักดิ์ อ้วนสาเล. การสร้างแบบทดสอบวินิจฉัยวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ในจังหวัดหนองบัวลำภู. วิทยานิพนธ์ ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2540.
- สุนทร ชนะกอก. การเปรียบเทียบผลการสอนตรีโกณมิติระหว่างวิธีเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. วิทยานิพนธ์ ศิลปศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2538.
- _____. เอกสารคำสอน : การเรียนการสอนตรีโกณมิติในระดับชั้นมัธยมศึกษา. ภาควิชามัธยมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2528.
- อรสา มากสาคร. การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่อง"ฟังก์ชันตรีโกณมิติ" ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนมัธยมวัดดุสิตาราม กรุงเทพมหานคร โดยการใช้สื่อประสม. วิทยานิพนธ์ ศิลปศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2537.

อนก หิรัญ. คณิตศาสตร์ 012. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์. 2537.

Thomas W. Hungerford. **Contemporary Trigonometry A Graphing Approach**. Barbara Britton, 2003

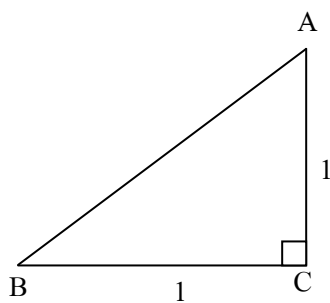
Lason Hostetler Hodgkins. **College Algebra Concept and Models Second Edition**. D.C. Heath and Company, 1996.

_____.Precalculus Seventh Edition. Boston New York : Houghton Company, 2007.



เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 - 1

แผนภาพที่ 1



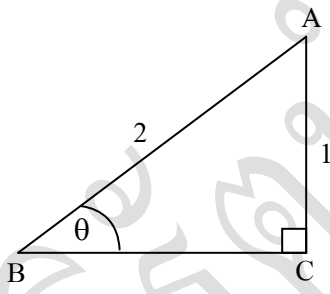
-> ด้านที่ยาว 1 หน่วย เรียกว่าด้านประกอบมุมฉาก

-> ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ $\sqrt{2}$ หน่วย

-> นักเรียนหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากได้โดยใช้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

แผนภาพที่ 2



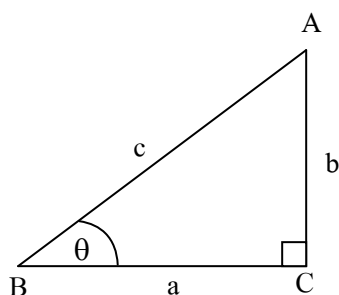
-> ถ้าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 2 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 1 หน่วย แล้วความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากับ 3 หน่วย

หาได้จาก $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$

-> จากความรู้เดิมเรื่องตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\sin \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

-> เนื่องจาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\theta = 30^\circ$

แผนภาพที่ 3



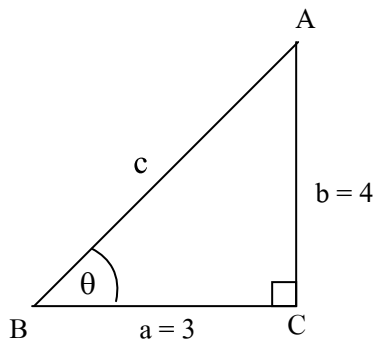
-> สามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วยตามลำดับ จะได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม}\theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม}\theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม}\theta} = \frac{b}{a}$$

แผนภาพที่ 4



-> สามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม B และด้าน
ประชิดมุม B ดังแผนภาพที่ 4 ยาว 4 และ 3 หน่วย
ตามลำดับ และมี C เป็นมุมฉากยาว c หน่วยแล้ว

$$a^2 = \dots 9 \dots, b^2 = \dots 16 \dots$$

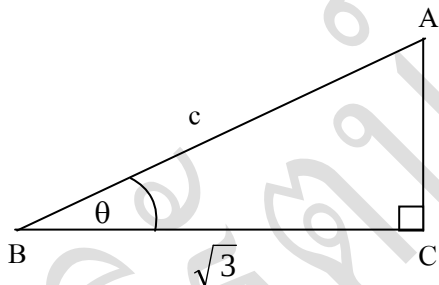
$$\text{และ } c^2 = \dots 9 + 16 = 25 \dots c = 5 \dots$$

-> เมื่อ θ เป็นขนาดของมุม B ดังนั้น

$$\sin \theta = \dots \frac{4}{5} \dots, \cos \theta = \dots \frac{3}{5} \dots$$

$$\text{และ } \tan \theta = \dots \frac{4}{3} \dots$$

แผนภาพที่ 5



$$-> c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

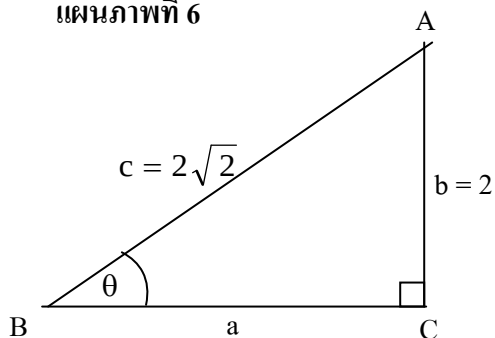
$$-> \sin \theta = \dots \frac{1}{2} \dots$$

$$-> \cos \theta = \dots \frac{\sqrt{3}}{2} \dots$$

$$-> \tan \theta = \dots \frac{1}{\sqrt{3}} \dots$$

$$-> \theta = \dots 30^\circ \dots$$

แผนภาพที่ 6



$$-> a = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

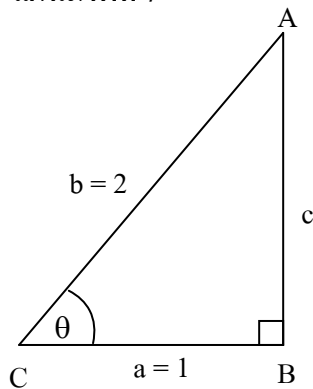
$$-> \sin \theta = \dots \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots$$

$$-> \cos \theta = \dots \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \dots$$

$$-> \tan \theta = \dots \frac{2}{2} = 1 \dots$$

$$-> \theta = \dots 45^\circ \dots$$

แผนภาพที่ 7



$$\rightarrow c = \sqrt{(2)^2 - (1)^2} = \sqrt{3}$$

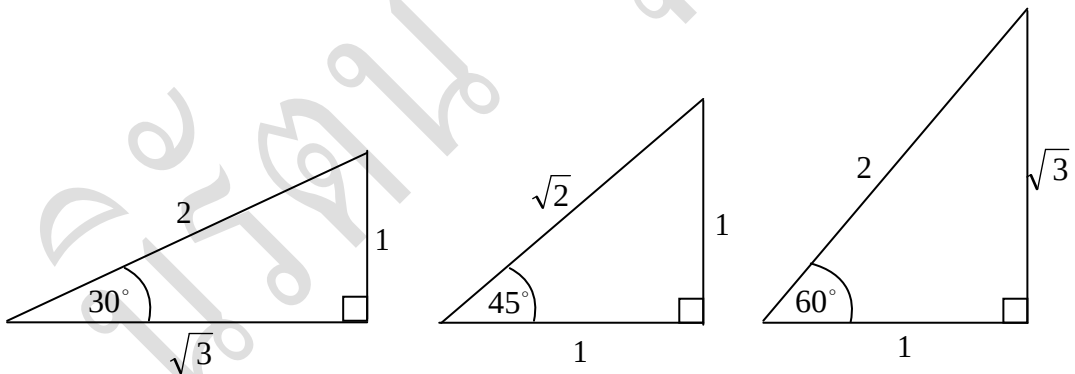
$$\rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \theta = 60^\circ$$

แผนภาพสรุปค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

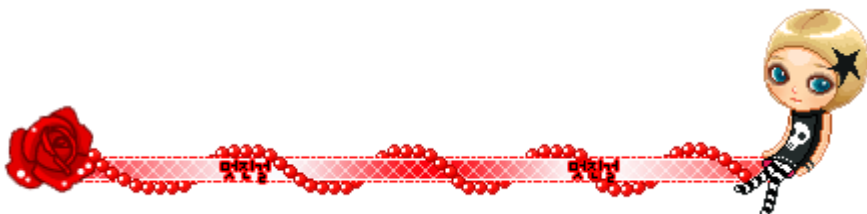
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

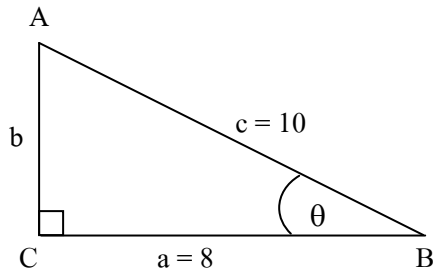
$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$





1.



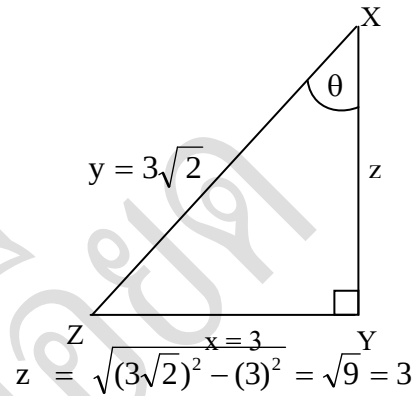
$$b = \sqrt{(10)^2 - (8)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

2.

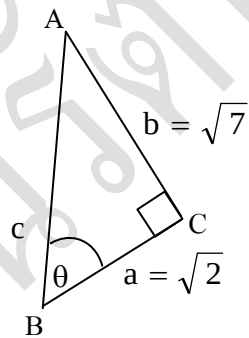


$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \theta = 1$$

3.



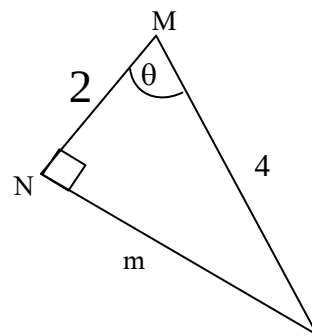
$$c = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = 3$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

4.



$$m = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

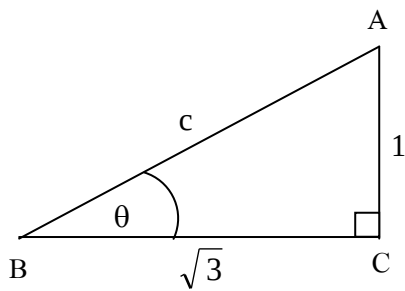
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

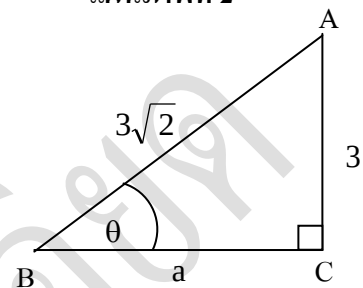
เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 - 2

แผนภาพที่ 1



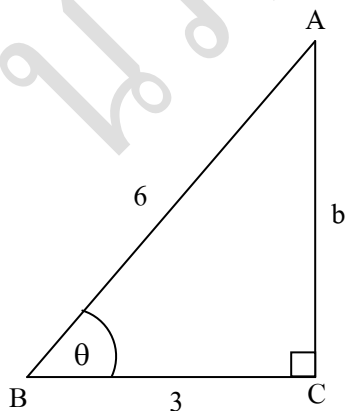
$$c = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$
$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

แผนภาพที่ 2



$$a = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (3)^2} = 3$$
$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan \theta = 1$$

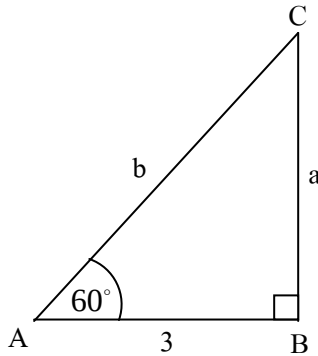
แผนภาพที่ 3



$$b = \sqrt{(6)^2 - (3)^2} = 3\sqrt{3}$$
$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos \theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 60° และ $\overline{AB}$ ยาว 3 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือ

วิธีทำ



-> โจทย์กำหนด $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \overline{AB} = 3$

-> โจทย์ต้องการหา ความยาวของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

-> จากรูป $\cos 60^\circ = \frac{3}{b}$

-> จากความรู้เดิม จะได้ว่า $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \frac{3}{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{จะได้ว่า } b = 6$$

- นักเรียนสามารถหา $\overline{BC}$ ได้โดยใช้ $b^2 = a^2 + 3^2$

- จะได้ว่า $a^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ นั่นคือ $a = 3\sqrt{3}$

- ถ้าใช้ $\sin 60^\circ$ จะได้ว่า $\sin 60^\circ = \frac{a}{b}$

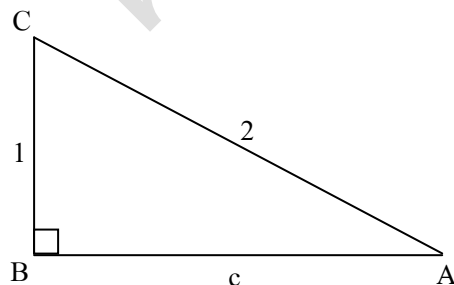
- จากความรู้เดิมได้ว่า $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \frac{a}{b} = \frac{a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ เซนติเมตร}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉาก $\overline{BC}$ ยาว 1 เมตร $\overline{AC}$ ยาว 2 เมตร จงหาความยาวของด้านที่เหลือและขนาดของมุม A

วิธีทำ



-> จากโจทย์ ทราบอะไร $\hat{B} = 90^\circ, \overline{BC} = 1, \overline{AC} = 2$

-> ต้องการหาอะไร $\hat{A} = ? , \overline{AB} = ?$

- จากโจทย์และความรู้เดิมเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\text{จะได้ว่า } \sin A = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

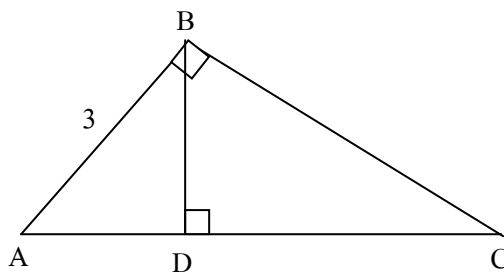
$$\text{ดังนั้น } A = 30^\circ$$

- เราสามารถหา $\overline{AB}$ ได้อย่างไร $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{(2)^2 - (1)^2} = \sqrt{3}$

- จะได้ว่า ความยาวของ $\overline{AB} = \sqrt{3}$ เมตร

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี B เป็นมุมฉากจาก $\overline{AB}$ ยาว 3 เมตร $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D ขนาดของมุม C เท่ากับ 30° จงหาความยาวของ $\overline{BD}$ ด้านที่เหลือของสามเหลี่ยม ABC และขนาดของมุม A

วิธีทำ



-> โจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง

$$\hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = 30^\circ, \overline{AB} = 3, \overline{BD} \perp \overline{AC}$$

-> โจทย์ต้องการหาอะไร

$$\overline{BD} = ?, \overline{BC} = ?, \overline{AC} = ?, \hat{A} = ?$$

-> จะหา $\overline{AC}$ ได้อย่างไร

$$\sin 30^\circ = \frac{3}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\overline{AC}}$$

-> ดังนั้น $\overline{AC} = 6$ เมตร

-> $\hat{A} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

-> จะหา $\overline{BD}$ ได้อย่างไร $\sin 60^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BD}}{3}$$

-> ดังนั้น $\overline{BD} = 3\sqrt{3}$

จะได้ว่า $\overline{AC}$ ยาว 6 เมตร และ $\overline{BD}$ ยาว $3\sqrt{3}$ เมตร

หา $\overline{BC}$ โดย

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{BC} = 6\sqrt{3}$$





เฉลยแบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1-1

คำชี้แจง ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดระหว่างเรียนต่อไปนี้

1. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$ และ $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D $\overline{AD} = 3$ หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$

วิธีทำ

จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้

$\overline{AD} = \overline{BD} = 3$ หน่วย

จากรูป $\triangle BCD$ จะได้

$\sin 60^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\overline{BC}}$

$\overline{BC} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ ANS.

$\tan 60^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$

$\sqrt{3} = \frac{3}{\overline{DC}}$

$\overline{DC} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 3 + \sqrt{3}$ หน่วย ANS.

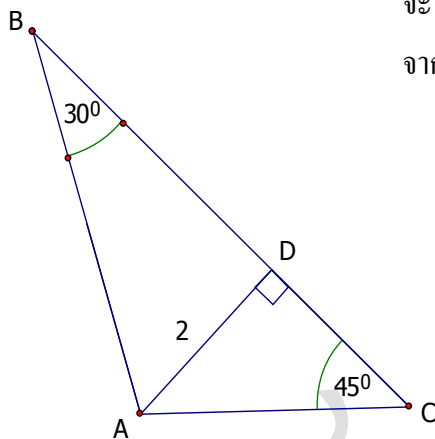
2. กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ โดยมี $\hat{C} = 45^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ และ $\overline{AD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ ที่จุด D และ $\overline{AD} = 2$ หน่วย จงหาความยาวของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$

วิธีทำ

จากรูป $\triangle ADC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะได้

จะได้ $\overline{AD} = \overline{DC} = 2$ หน่วย

จากรูป $\triangle ABD$ จะได้ $\hat{ABD} = 60^\circ$



$$\sin 30^\circ = \frac{2}{\overline{AB}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\overline{AB}}$$

$$\overline{AB} = 4 \quad \text{ANS.}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{\overline{BD}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\overline{BD}}$$

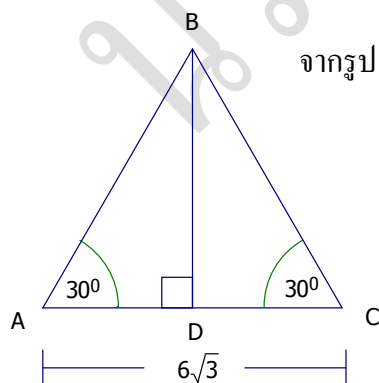
$$\overline{BD} = 2\sqrt{3}$$

ดังนั้น

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = 2\sqrt{3} + 2 \text{ หน่วย} \quad \text{ANS.}$$

3. กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี $\hat{C} = 30^\circ$, $\overline{BD}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ $\overline{AC} = 6\sqrt{3}$ หน่วย จงหาความยาวของด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{BD}$

วิธีทำ



จากรูป $\triangle ABD$, จะได้ $\overline{AD} = \overline{DC} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ หน่วย

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{BD}}{3\sqrt{3}}$$

$$\overline{BD} = 3 \quad \text{ANS.}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$$

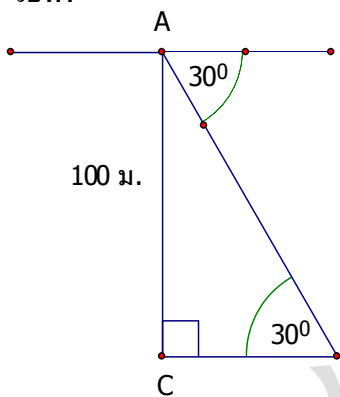
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\overline{AB}}$$

$$\overline{AB} = 6 \quad \text{ANS.}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 – 1

1. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาสูง 100 เมตร มองเห็นกองหินบนพื้นดินเบื้องล่างในแนวเดียวกับเชิงผาเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่ากองหินนั้นอยู่ห่างจากเชิงผากี่เมตร

วิธีทำ



จากรูป ต้องการหาระยะ $\overline{BC}$ $\triangle ABD$, จะได้

$$\text{จะได้ } \tan 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

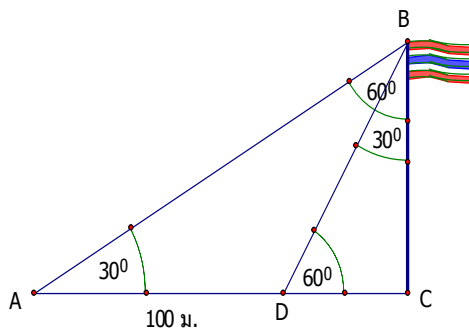
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\overline{BC}}$$

$$\overline{BC} = 100\sqrt{3}$$

ดังนั้น กองหินอยู่ห่างจากเชิงผา $100\sqrt{3}$ เมตร ANS.

2. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นดิน ณ จุดๆหนึ่งเขามองดูยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30 องศา เมื่อเขาเดินเข้าไปใกล้เสาธงเป็นระยะ 100 เมตร เขาจะเห็นมุมเงยของยอดเสาธงเป็น 60 องศา จงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ



จากรูป ต้องการหาระยะ $\overline{BC}$

จากรูป $\triangle ABC$, จะได้

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \tan 60^\circ &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\ \sqrt{3} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \\ \overline{BC} &= \frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots(1)\end{aligned}$$

จากรูป $\triangle BCD$, จะได้

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \tan 30^\circ &= \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \\ \overline{BC} &= (\sqrt{3})\overline{DC} \dots\dots\dots(2)\end{aligned}$$

$$(1) = (2);$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})\overline{DC}$$

$$\overline{AC} = 3\overline{DC}$$

$$\overline{AD} + \overline{DC} = 3\overline{DC}$$

$$100 + \overline{DC} = 3\overline{DC}$$

$$100 = 2\overline{DC}$$

$$\overline{DC} = 50$$

$$\overline{BC} = (\sqrt{3})50$$

$$\overline{BC} = 50\sqrt{3}$$

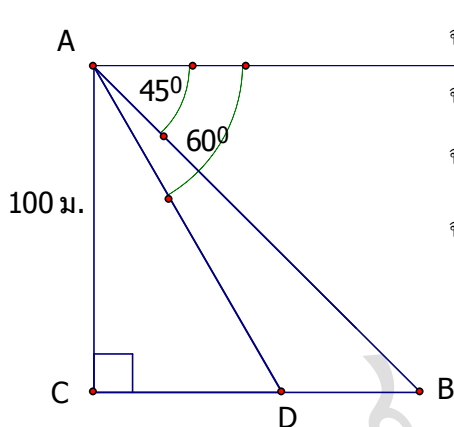
แทน $\overline{DC} = 50$ ใน (2);

ดังนั้น เสาธงสูงประมาณ $100\sqrt{3}$ เมตร หรือประมาณ 173 เมตร ANS.

3. เด็กคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาเหนือระดับน้ำทะเล 100 เมตร มองเห็นเรือสองลำทอดสมอยู่ในทะเลในแนวเดียวกันเป็นมุมก้ม 60° และ 45° ตามลำดับ จงหาว่าเรือสองลำอยู่ห่างกันกี่เมตร

วิธีทำ

ต้องการหาระยะ $\overline{BD}$



จากรูป $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $\overline{BC} = \overline{AC}$

จากรูป $\triangle ADC$

จะได้ $\tan 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{CD}}{100}$$

$$\overline{CD} = \frac{100}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

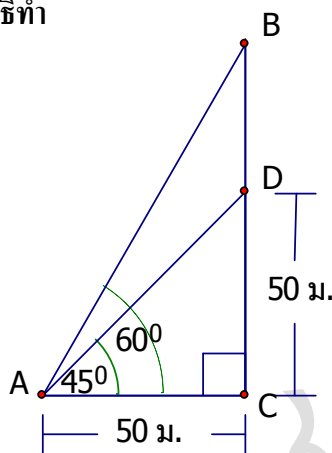
$$= 100 - \frac{100}{\sqrt{3}}$$

$$= 100 - \frac{100}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น กองหินอยู่ห่างจากเชิงผา $100 - \frac{100}{\sqrt{3}}$ เมตร ANS.

4. นักเรียนคนหนึ่งยืนห่างจากอาคารเรียน 50 เมตร มองเห็นโคนเสาธงซึ่งปักอยู่บนยอดอาคาร เป็นมุมเงย 45° และมองเห็นปลายเสาธงเป็นมุมเงย 60° จงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ



จากรูป ต้องการหาระยะ ΔABC , จะได้

$$\text{จะได้ } \tan 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{\overline{BC}}{50}$$

$$\overline{BC} = 50\sqrt{3}$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} = 50\sqrt{3}$$

$$\overline{BD} + 50 = 50\sqrt{3}$$

$$\overline{BD} = 50\sqrt{3} - 50$$

$$\overline{BD} = 50(\sqrt{3} - 1)$$

$$\overline{BD} = 50(0.732)$$

$$\overline{BD} \approx 37$$

ดังนั้น เสาธงสูงประมาณ 37 เมตร ANS.



เฉลยแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ที่ 1

ข้อ	ตัวเลือก
1	ก
2	ก
3	ค
4	ง
5	ค
6	ค
7	ง
8	ก
9	ค
10	ข



เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....21.....

เฉลยใบงานที่ 1 – 1.....24.....

เฉลยใบกิจกรรมระหว่างเรียนที่ 1 – 2.....25.....

เฉลยแบบฝึกหัดระหว่างเรียนที่ 1 – 1.....28.....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1 – 1.....30.....

เฉลยแบบทดสอบประจำชุดการเรียนรู้ที่ 134.....