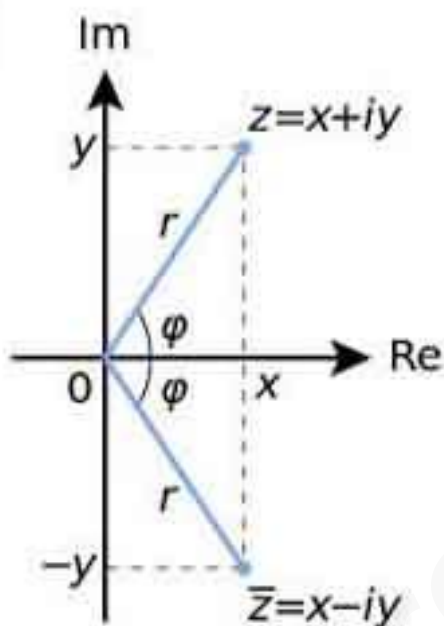


เอกสารประกอบการเรียนการสอน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32202)

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 5



$$z = x + yi$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

ตอนที่ 1

การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ธารทิพย์ ศรีทวีป

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการ

โรงเรียนนาบอน อำเภอนาบอน จังหวัดนครศรีธรรมราช

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 12

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม(ค32202) เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการจัดการเรียนการสอนควบคู่กับแผนการจัดการ
เรียนรู้ จำนวน 22 แผน ซึ่งเอกสารประกอบการเรียนการสอน ชุดนี้แบ่งเป็น 7 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 2 สมบัติของพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 3 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ตอนที่ 6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ตอนที่ 7 สมการพหุนาม

เอกสารประกอบการเรียนการสอน จัดทำขึ้นตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน
พุทธศักราช 2551 และหลักสูตรสถานศึกษา โรงเรียนนาบอน พุทธศักราช 2553 เนื้อหาสาระ
กิจกรรม เอกสารฝึกหัด เอกสารพัฒนา แบบทดสอบต่าง ๆ ได้จากการที่ผู้สอนได้รวบรวมจาก
หนังสือคู่มือ หนังสือ อแบบเรียน และแหล่งเรียนรู้ต่าง ๆ นำมาเรียบเรียงใหม่ให้สอดคล้องกับ
บริบทของโรงเรียน เหมาะสมกับความรู้ความสามารถของนักเรียน มีตัวอย่างประกอบ เรียงลำดับ
จากง่ายไปหายาก นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ทั้งรายบุคคล และรายกลุ่ม และสามารถตรวจคำตอบที่
ถูกต้องได้ด้วยตนเอง เพื่อเป็นการทดสอบความรู้ความเข้าใจ โดยมีเฉลยอยู่ตอนท้ายของเอกสาร

ผู้เขียน หวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารประกอบการเรียนการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4
(ค32202) เรื่องจำนวนเชิงซ้อน คงมีประโยชน์แก่นักเรียนในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่ม 4 ทำ
ให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น และเป็นสื่อการเรียนการสอนที่ครูนำไปใช้จัดกิจกรรม
การเรียนการสอนได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถบรรลุมาตรฐานการเรียนรู้ /ตัวชี้วัด/ผลการเรียนรู้
ที่ตั้งไว้ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ธารทิพย์ ศรีทวีป

สารบัญ

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน.....	1
ผลการเรียนรู้/จุดประสงค์การเรียนรู้/เนื้อหาสาระ.....	2
จำนวนเชิงซ้อน	
กิจกรรมที่ 1.1	5
กิจกรรมที่ 1.2.....	7
เอกสารฝึกหัดที่ 1.1.....	8
การหาค่า i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก	
กิจกรรมที่ 1.3.....	10
กิจกรรมที่ 1.4.....	10
เอกสารฝึกหัดที่ 1.2.....	11
การเขียนจำนวนเชิงซ้อน.	
กิจกรรมที่ 1.5.....	13
กิจกรรมที่ 1.6.....	14
เอกสารฝึกหัดที่ 1.3.....	16
การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน	
กิจกรรมที่ 1.7.....	17
กิจกรรมที่ 1.8.....	19
เอกสารฝึกหัดที่ 1.4.....	20
เอกสารพัฒนาที่ 1.1.....	21
การบวกของจำนวนเชิงซ้อน	
กิจกรรมที่ 1.9.....	22
เอกสารฝึกหัดที่ 1.5.....	23
การคูณจำนวนเชิงซ้อน	
กิจกรรมที่ 1.10.....	25
กิจกรรมที่ 1.11.....	26
กิจกรรมที่ 1.12.....	28

กิจกรรมที่ 1.13.....	30
กิจกรรมที่ 1.14.....	32
เอกสารฝึกหัดที่ 1.6.....	33
เอกสารพัฒนาที่ 1.2.....	34
สรุปเนื้อหา.....	35
เฉลย	
กิจกรรม.....	38
เอกสารฝึกหัด.....	46
เอกสารพัฒนา.....	50

คำแนะนำในการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน

เอกสารฉบับนี้เป็นเอกสารที่ครูจัดทำขึ้นเพื่อใช้จัดกิจกรรมการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และนักเรียนสามารถศึกษาเรียนรู้ได้ทั้งรายบุคคลและรายกลุ่ม อีกทั้งนักเรียนสามารถตรวจสอบผลจากการทำกิจกรรม ทำเอกสารฝึกหัด และเอกสารพัฒนา ได้ด้วยตนเอง

สำหรับผู้สอน

เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนมีประสิทธิภาพครูผู้สอนควรปฏิบัติดังนี้

1. ผู้สอนศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 ให้เข้าใจ
2. ผู้สอนควรเตรียมเอกสารประกอบการเรียนการสอน เอกสารอื่น ๆ แบบประเมินและวัสดุ สื่ออื่น ๆ ให้เพียงพอกับจำนวนผู้เรียน
3. กระตุ้นให้ผู้เรียนศึกษาหาความรู้ เนื้อหาสาระ ทำกิจกรรม เอกสารฝึกหัด เอกสารพัฒนา ของเอกสารประกอบการเรียนการสอน ตามกิจกรรมการเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้
4. คอยให้กำลังใจ อธิบายเพิ่มเติมชี้แนะ ชี้นำ ให้ความช่วยเหลือ ในกรณีที่นักเรียนต้องการความช่วยเหลือ
5. ควบคุมชั้นเรียน และกำหนดให้เป็นไปตามแผนการจัดการเรียนรู้
6. นำนักเรียนอภิปรายเพื่อสรุปบทเรียน เผลยเอกสารฝึกหัด เอกสารพัฒนา และตรวจเผลย

สำหรับผู้เรียน

เพื่อให้การเรียนรู้โดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนประสบความสำเร็จ นักเรียนควรปฏิบัติดังนี้

1. ร่วมกิจกรรมอย่างเต็มความสามารถ
2. ทำเอกสารฝึกหัด เอกสารพัฒนา และแบบทดสอบ ด้วยตนเอง
3. ตรวจสอบคำตอบของกิจกรรม เอกสารฝึกหัด เอกสารพัฒนา ด้วยความซื่อสัตย์
4. หากมีข้อสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือให้นักเรียนแจ้งผู้สอน ทันที



ผลการเรียนรู้

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน เขียนกราฟและหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาคำตอบของสมการ $x^2 + a = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ได้
2. หาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้
3. เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) ให้อยู่ในรูป $a + bi$ และเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ ให้อยู่ในรูป (a, b) ได้
4. บอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้
5. ระบุลักษณะของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้
6. นำสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ได้
7. หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้
8. หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

สาระการเรียนรู้

1. จำนวนเชิงซ้อน
2. ค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
3. การเขียนจำนวนเชิงซ้อน
4. สมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน
5. การบวกจำนวนเชิงซ้อน
6. การคูณจำนวนเชิงซ้อน



จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

ในระบบจำนวนจริง มีสมการพหุนามบางสมการ ที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ นักคณิตศาสตร์พยายามที่จะแก้ไขปัญหานี้ด้วยวิธีการ สร้างระบบจำนวนชนิดใหม่ เพื่อให้หาคำตอบของสมการได้เสมอ เรียกจำนวนชนิดใหม่ที่สร้างขึ้นมาว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex number)

พิจารณา การหาคำตอบ สมการ $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

พบว่า 1 และ -1 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 1 = 0$

แต่ สมการ $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm \sqrt{-1}$$

พบว่า $\sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง เพราะไม่มีจำนวนจริงใด เมื่อนำมายกกำลังสองแล้วได้จำนวนลบ

ดังนั้น นักคณิตศาสตร์จึง ใช้สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$

$$\text{ซึ่ง } i^2 = -1$$

บทนิยาม ถ้า a แทนจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$

เช่น

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{5}i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9}\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{9}i$$

$$= 3i$$

$$\sqrt{-24} = \sqrt{24}\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{24}i$$

$$= 2\sqrt{6}i$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 4 = 0$

2. $x^2 - 11 = 0$

3. $x^2 - 18 = 0$

วิธีทำ 1. $x^2 - 4 = 0$
 $x^2 = 4$
 $x = \pm\sqrt{4}$
จะได้ $x = \pm 2$

2. $x^2 - 11 = 0$
 $x^2 = 11$
จะได้ $x = \pm\sqrt{11}$

3. $x^2 - 18 = 0$
 $x^2 = 18$
 $x = \pm\sqrt{18}$
จะได้ $x = \pm 3\sqrt{2}$

จะเห็นว่าทั้ง 3 ข้อ เราหาค่าของ x โดยใช้
ความรู้เรื่องกรณฑ์อันดับสอง และคำตอบเป็น
จำนวนจริงใด ๆ

สังเกตใหม่ว่า สมการ $x^2 - a = 0$
เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะมีคำตอบเป็น
จำนวนจริงเสมอ



กิจกรรมที่ 1.1

จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

<p>ข้อ 1 สมการ $x^2 - 9 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 9 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 2 สมการ $x^2 - 12 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 12 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 3 สมการ $x^2 - 21 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 21 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 4 สมการ $x^2 - 36 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 36 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 5 สมการ $x^2 - 41 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 41 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 6 สมการ $x^2 - 63 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 63 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 7 สมการ $x^2 - 121 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 121 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 8 สมการ $x^2 - 243 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 243 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 9 สมการ $x^2 - 275 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 275 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 10 สมการ $x^2 - 361 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 361 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 + 4 = 0$

2. $x^2 + 11 = 0$

3. $x^2 + 18 = 0$

วิธีทำ

1. $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

$$x = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$$

จะได้ $x = \pm 2i$

2. $x^2 + 11 = 0$

$$x^2 = -11$$

$$x = \pm\sqrt{-11}$$

$$x = \pm\sqrt{11}\sqrt{-1}$$

จะได้ $x = \pm\sqrt{11}i$

3. $x^2 + 18 = 0$

$$x = -18$$

$$x = \pm\sqrt{-18}$$

$$x = \pm\sqrt{18}\sqrt{-1}$$

จะได้ $x = \pm 3\sqrt{2}i$

จากโจทย์ทั้ง 3 ข้อสังเกตเห็นว่าเราหาคำของ x โดยใช้ความรู้
 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} = \sqrt{a}i$
เมื่อ a แทนจำนวนจริงใด ๆ และเรียก
 $\sqrt{a}i$ ว่าจำนวนจินตภาพ

สังเกตใหม่ว่า สมการ $x^2 + a = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะมีคำตอบเป็นจำนวนจินตภาพ



กิจกรรมที่ 1.2

จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

<p>ข้อ 1 สมการ $x^2 + 5 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 5 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 2 สมการ $x^2 + 16 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 16 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 3 สมการ $x^2 + 27 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 27 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 4 สมการ $x^2 + 48 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 48 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 5 สมการ $x^2 + 83 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 83 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 6 สมการ $x^2 + 144 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 144 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>
<p>ข้อ 7 สมการ $x^2 + 256 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 256 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>	<p>ข้อ 8 สมการ $x^2 + 363 = 0$</p> <p>วิธีทำ $x^2 + 363 = 0$</p> <p>$x^2 = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>$x = \dots\dots\dots$</p> <p>จะได้ $x = \dots\dots\dots$</p>

เอกสารฝึกหัดที่ 1.1

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาคำตอบของสมการ $x^2 + a = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ได้
คำสั่ง จงหาคำตอบของสมการที่กำหนดให้ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. สมการ $x^2 - 6 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
2. สมการ $x^2 + 4 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
3. สมการ $x^2 + 8 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
4. สมการ $x^2 - 8 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
5. สมการ $x^2 - 15 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
6. สมการ $x^2 - 25 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
7. สมการ $x^2 + 24 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
8. สมการ $x^2 + 36 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
9. สมการ $x^2 + 41 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
10. สมการ $x^2 + 49 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
11. สมการ $x^2 - 36 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
12. สมการ $x^2 - 49 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
13. สมการ $x^2 - 100 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
14. สมการ $x^2 + 100 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$
15. สมการ $x^2 + 400 = 0$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$



เกณฑ์การประเมิน ทำได้ถูกต้อง 12 ข้อ (12 คะแนน) ขึ้นไป ผ่านเกณฑ์	คะแนนเต็ม 15 คะแนน ทำได้.....คะแนน ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ
---	---

การหาค่า i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

กำหนด $i = \sqrt{-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

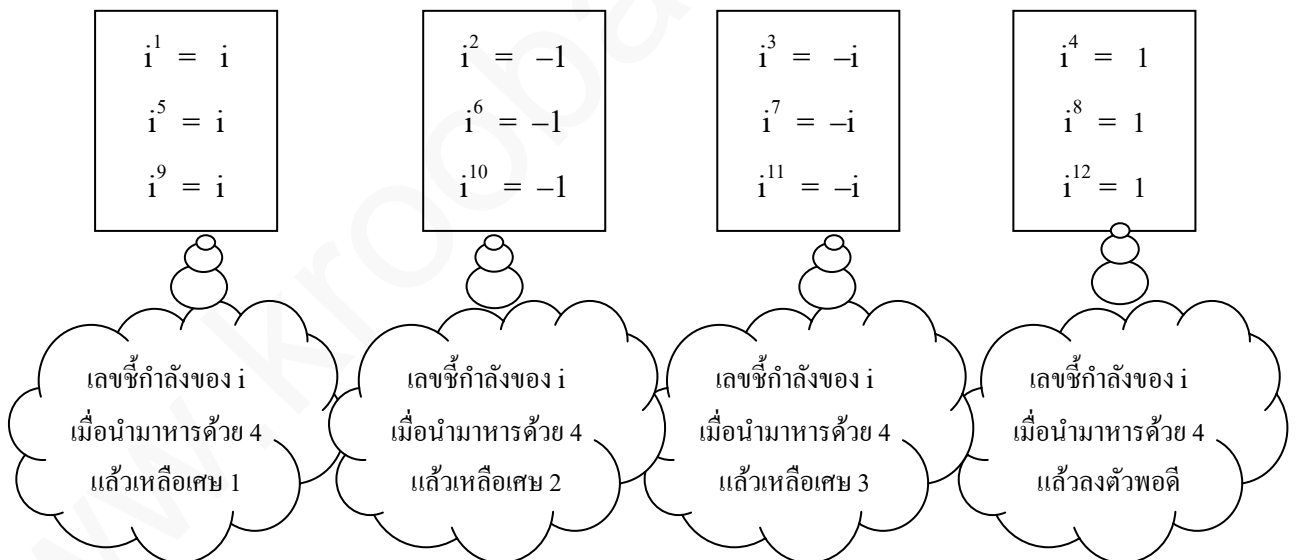
$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

ในทำนองเดียวกันจะพบว่า

$$i^9 = i, \quad i^{10} = -1, \quad i^{11} = -i, \quad i^{12} = 1$$

เราสามารถสรุปค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างง่าย ๆ ดังนี้



ข้อสังเกต ค่าของ i^n จะมีคำตอบ 1, -1, i , $-i$ เพียง 4 คำตอบเท่านั้น
ไม่ว่า i จะยกกำลังเท่าไรก็ตาม

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าต่อไปนี้

1) i^{23}

2) i^{86}

3) i^{136}

4) i^{2345}

วิธีทำ

1) $i^{23} = -i$ (เพราะว่า 23 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3)

2) $i^{86} = -1$ (เพราะว่า 86 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2)

3) $i^{136} = 1$ (เพราะว่า 136 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0 หรือหารลงตัว)

4) $i^{2345} = i$ (เพราะว่า 2345 หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1)

กิจกรรมที่ 1.3

จงหาค่าของ

1) $i^{28} = \dots\dots\dots$ เพราะ $\dots\dots\dots$

2) $i^{37} = \dots\dots\dots$ เพราะ $\dots\dots\dots$

3) $i^{66} = \dots\dots\dots$ เพราะ $\dots\dots\dots$

4) $i^{83} = \dots\dots\dots$ เพราะ $\dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ

1) $i^{23} + i^{12} - 1$

2) $i^{46} + i^{83} + i^{61} + i^{100}$

วิธีทำ

1) $i^{23} + i^{12} - 1 = -i + 1 - 1$
 $= -i$

2) $i^{46} + i^{83} + i^{61} + i^{100} = -1 - i + i + 1$
 $= 0$

กิจกรรมที่ 1.4

จงหาค่าของ

1) $i^{111} + i^{85} = \dots\dots\dots$

2) $i^4 - i^{22} = \dots\dots\dots$

3) $i^{79} + i^{84} - i^{52} - i^{31} = \dots\dots\dots$

เอกสารฝึกหัดที่ 1.2
เรื่อง การหาค่า i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้

คำสั่ง จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

1) i^{11}

.....

2) i^{21}

.....

3) i^{247}

.....

4) i^{4202}

.....

5) $i^{111} + i^{85}$

.....

6) $i + i^2 + i^3 + i^4$

.....

7) $i^{40} \cdot i^{41} \cdot i^{42} \cdot i^{43}$

.....

8) $(i^5 + i^{18})(i^{50} + i^{90})^2$

.....

เกณฑ์การประเมิน ทำได้ถูกต้อง 6 ข้อ(6 คะแนน) ขึ้นไป ผ่านเกณฑ์	คะแนนเต็ม 8 คะแนน ทำได้.....คะแนน ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ
--	--

การเขียนจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป (a, b) หรือ $a + bi$
เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i^2 = -1$ โดยที่ i คือ $(0, 1)$

จากบทนิยาม จะได้ว่า $a + bi = (a, b)$ ตัวอย่างเช่น

$$\begin{array}{ll} m + ni &= (m, n) & 2 + 3i &= (2, 3) \\ x - yi &= (x, -y) & -1 + 5i &= (-1, 5) \\ -a - bi &= (-a, -b) & 6 - 9i &= (6, -9) \end{array}$$

หมายเหตุ

1. นิยมใช้ C แทน เซตของจำนวนเชิงซ้อน

นั่นคือ $C = \{ (a, b) \mid a \in R \text{ และ } b \in R \}$ โดยที่ R เป็นเซตจำนวนจริง

2. ถ้าให้ $z = (a, b)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว ส่วนจริง (real part) และส่วน

จินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ดังนี้

$$a = \operatorname{Re}(z) \text{ หรือ } \operatorname{Re}(a, b)$$

$$b = \operatorname{Im}(z) \text{ หรือ } \operatorname{Im}(a, b)$$

เช่น

$z_1 = 5 + 8i$	เรียก 5 ว่า ส่วนจริง จะได้ว่า $\operatorname{Re}(z_1) = 5$	และ เรียก 8 ว่า ส่วนจินตภาพ และ $\operatorname{Im}(z_1) = 8$
$z_2 = (-7, 6)$	เรียก -7 ว่า ส่วนจริง จะได้ว่า $\operatorname{Re}(z_2) = -7$	และ เรียก 6 ว่า ส่วนจินตภาพ และ $\operatorname{Im}(z_2) = 6$
$z_3 = -\frac{1}{2} - 3i$	เรียก $-\frac{1}{2}$ ว่า ส่วนจริง จะได้ว่า $\operatorname{Re}(z_3) = -\frac{1}{2}$	และ เรียก -3 ว่า ส่วนจินตภาพ และ $\operatorname{Im}(z_3) = -3$
$z_4 = (9, -4)$	เรียก 9 ว่า ส่วนจริง จะได้ว่า $\operatorname{Re}(z_4) = 9$	และ เรียก -4 ว่า ส่วนจินตภาพ และ $\operatorname{Im}(z_4) = -4$
$z_5 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$	เรียก $\sqrt{2}$ ว่า ส่วนจริง จะได้ว่า $\operatorname{Re}(z_5) = \sqrt{2}$	และ เรียก $\sqrt{3}$ ว่า ส่วนจินตภาพ และ $\operatorname{Im}(z_5) = \sqrt{3}$

กิจกรรมที่ 1.5

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	เขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$	ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	เขียนให้อยู่ในรูป (a, b)
1.1	$(6, 2)$		1.6	$5 + 12i$	
1.2	$(-3, 4)$		1.7	$-3 + 6i$	
1.3	$(7, -12)$		1.8	$-4 - 5i$	
1.4	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$		1.9	$\frac{3}{7} + \frac{1}{6}i$	
1.5	$(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$		1.10	$2\sqrt{3} - 4i$	

ตารางแสดงลักษณะต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ เรียกว่า จำนวนจริง (real numbers)

จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)

😊 จำนวนเชิงซ้อน (a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $a \neq 0, b = 0$ เรียกว่า จำนวนจริง

😊 จำนวนเชิงซ้อน (a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $a = 0, b \neq 0$ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้

ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน ในรูป (a, b)	จำนวนเชิงซ้อน ในรูป $a + bi$	ส่วนจริง (a)	ส่วน จินตภาพ (b)	ลักษณะของ จำนวนเชิงซ้อน
1	$(4, 0)$	$4 + 0i$	4	0	จำนวนจริง
2	$(-8, 0)$	$-8 + 0i$	-8	0	
3	$(9, 0)$	$9 + 0i$	9	0	
4	$\left(\frac{2}{7}, 0\right)$	$\frac{2}{7} + 0i$	$\frac{2}{7}$	0	
5	$(0, 3)$	$0 + 3i$	0	3	จำนวนจินตภาพแท้
6	$(0, -7)$	$0 - 7i$	0	-7	
7	$(0, 15)$	$0 + 15i$	0	15	
8	$(0, \sqrt{5})$	$0 + \sqrt{5}i$	0	$\sqrt{5}$	

ตัวอย่างที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จำนวนใดเป็นจำนวนจริง และจำนวนใดเป็นจำนวนจินตภาพแท้ เพราะเหตุใด

- 1) $3 + 0i$ เป็นจำนวนจริง เพราะ มีส่วนจินตภาพ เท่ากับ 0
- 2) $-14 - 0i$ เป็นจำนวนจริง เพราะ มีส่วนจินตภาพ เท่ากับ 0
- 3) $\frac{7}{9} + 0i$ เป็นจำนวนจริง เพราะ มีส่วนจินตภาพ เท่ากับ 0
- 4) $0 - 8i$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เพราะ มีส่วนจริง เท่ากับ 0
- 5) $-7i$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เพราะ มีส่วนจริง เท่ากับ 0

กิจกรรมที่ 1.6

จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ	ลักษณะของจำนวนเชิงซ้อน
1	$(0, 5)$			
2	$(-7, 0)$			
3	$(\sqrt{2}, 0)$			
4	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$			
5	$(0, 2\sqrt{3})$			
6	$-\frac{3}{5}i$			
7	$12 + 0i$			
8	$0 - 9i$			
9	$\frac{2}{7} - 0i$			
10	$\sqrt{7}$			



เอกสารฝึกหัดที่ 1.3
เรื่อง การเขียนจำนวนเชิงซ้อน



- จุดประสงค์การเรียนรู้ – เขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป (a, b) ให้อยู่ในรูป $a + bi$ และเขียน
จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ ให้อยู่ในรูป (a, b) ได้
– บอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้
– ระบุได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ เป็นจำนวนชนิดใด
-

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง (ข้อละ 1 คะแนน)

- 1.1) จำนวน $-5 + 7i$ เรียก -5 ว่า.....และ เรียก 7 ว่า.....
1.2) จำนวน $(\sqrt{5}, 3)$ เรียก.....ว่า ส่วนจริง และเรียก.....ว่าส่วนจินตภาพ
1.3) จำนวน $9 - i$ เรียก.....ว่าส่วนจริง และเรียก.....ว่าส่วนจินตภาพ
1.4) กำหนด $z = -10 + i$ จะได้ว่า $\text{Re}(z) = \dots\dots\dots$ และ $\text{Im}(z) = \dots\dots\dots$
1.5) กำหนด $z = \left(0, -\frac{2}{3}\right)$ จะได้ว่า $\text{Re}(z) = \dots\dots\dots$ และ $\text{Im}(z) = \dots\dots\dots$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ให้อยู่ในรูป (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(2 ข้อ 1 คะแนน)

- 2.1) $3 + 7i = \dots\dots\dots$ 2.2) $6 + 10i = \dots\dots\dots$
2.3) $-9 + 7i = \dots\dots\dots$ 2.4) $0 - 4i = \dots\dots\dots$
2.5) $\sqrt{3} - i = \dots\dots\dots$ 2.6) $-5 - \sqrt{2}i = \dots\dots\dots$
2.7) $5 + 0i = \dots\dots\dots$ 2.8) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}i = \dots\dots\dots$
2.9) $9 - \frac{4}{7}i = \dots\dots\dots$ 2.10) $-17 - 20i = \dots\dots\dots$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(2 ข้อ 1 คะแนน)

3.1) $(8, 4) = \dots\dots\dots$ 3.2) $(-7, 12) = \dots\dots\dots$

3.3) $(0, -6) = \dots\dots\dots$ 3.4) $(-9, 0) = \dots\dots\dots$

3.5) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right) = \dots\dots\dots$ 3.6) $(\sqrt{5}, -5) = \dots\dots\dots$

3.7) $(-8, 2\sqrt{2}) = \dots\dots\dots$ 3.8) $(-6, 1) = \dots\dots\dots$

3.9) $(-27, -19) = \dots\dots\dots$ 3.10) $\left(\frac{7}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \dots\dots\dots$

4. ให้นักเรียนจำแนกจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ตามลักษณะของจำนวนเชิงซ้อน

(2 จำนวน ต่อ 1 คะแนน)

$$8 + 0i$$

$$0 + 9i$$

$$-12 + 0i$$

$$\sqrt{3}$$

$$\sqrt{7}i$$

$$0 - \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{7}{11}i$$

$$0 + \frac{3}{8}i$$

$$\frac{5}{2}$$

$$-24$$

จำนวนจริง

.....
.....
.....

จำนวนจินตภาพแท้

.....
.....
.....

เกณฑ์การประเมิน
ทำได้ถูกต้อง 18 คะแนน ขึ้นไป
ผ่านเกณฑ์

คะแนนเต็ม 20 คะแนน
ทำได้.....คะแนน
ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ (a, b) และ (c, d) เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือ $a + bi$ และ (c, d) หรือ $c + di$

การเท่ากัน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ หรือ $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่าง เช่น

1. ถ้า $3 + 7i = x + yi$ แสดงว่า $3 = x$ และ $7 = y$
2. ถ้า $m - 9i = -4 + ni$ แสดงว่า $m = -4$ และ $-9 = n$
3. ถ้า $(x, y) = (0, -1)$ แสดงว่า $x = 0$ และ $y = -1$
4. ถ้า $(-11, s) = (t, 6)$ แสดงว่า $-11 = t$ และ $s = 6$

จากตัวอย่างข้างบน จะเห็นว่า

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนจะเท่ากัน เมื่อส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ

กิจกรรมที่ 1.7

ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

- 1) ถ้า $2 + 8i = x + yi$ แสดงว่า $2 = \dots\dots\dots$ และ $8 = \dots\dots\dots$
- 2) ถ้า $m - i = -6 + ni$ แสดงว่า $m = \dots\dots\dots$ และ $-1 = \dots\dots\dots$
- 3) ถ้า $(x, y) = (7, 0)$ แสดงว่า $x = \dots\dots\dots$ และ $y = \dots\dots\dots$
- 4) ถ้า $(4, a) = (b, -4)$ แสดงว่า $\dots\dots\dots = b$ และ $\dots\dots\dots = -4$
- 5) ถ้า $k + \frac{4}{9}i = ti$ แสดงว่า $k = \dots\dots\dots$ และ $t = \dots\dots\dots$
- 6) ถ้า $(a, b) = (\sqrt{3}, a^2)$ แสดงว่า $a = \dots\dots\dots$ และ $b = \dots\dots\dots$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า x และ y จากสมการที่กำหนดให้

1. $2x + 4yi = 6 - 5i$
2. $x + y - xyi = 7 - 12i$

วิธีทำ

1. $2x + 4yi = 6 - 5i$

แสดงว่า $2x = 6$

$\therefore x = 3$

และ $4y = -5$

$\therefore y = -\frac{5}{4}$

ดังนั้น $x = 3$ และ $y = -\frac{5}{4}$ ◇

2. $x + y - xyi = 7 - 12i$

แสดงว่า $x + y = 7$ ①

และ $-xy = -12$ ②

จากสมการ ① จะได้ $x = 7 - y$ ③

นำค่า x จากสมการ ③ แทนลงในสมการ ②

จะได้ $-(7 - y)y = -12$

$-(7y - y^2) = -12$

$7y - y^2 = 12$

$-y^2 + 7y - 12 = 0$

$y^2 - 7y + 12 = 0$

$(y - 3)(y - 4) = 0$

$y = 3, 4$

นำค่า y แทนลงในสมการ ①

ให้ $y = 3$, $x + 3 = 7$

$x = 4$

ให้ $y = 4$, $x + 4 = 7$

$x = 3$

สรุปได้ว่า ถ้า $x = 3$ แล้ว จะได้ $y = 4$

และ ถ้า $x = 4$ แล้ว จะได้ $y = 3$ ◇

กิจกรรมที่ 1.8

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1) ถ้า $3 + yi = x - 5i$ แล้ว ค่าของ x และ y เท่ากับเท่าไร

.....

.....

2) ถ้า $(m, 0) = (-\sqrt{3}, n-1)$ แล้วค่าของ m และ n เท่ากับเท่าไร

.....

.....

3) ถ้า $z_1 = 2 + bi$ และ $z_2 = a - 6i$ โดยที่ $z_1 = z_2$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าไร

.....

.....

4) ถ้า $x + 4 + 2yi = 9$ ค่าของ xy เท่ากับข้อใด

.....

.....

.....

.....

5) ถ้า $8 + yi = 4x + 3i$ แล้ว ค่า x และ y เท่ากับเท่าไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เอกสารฝึกหัดที่ 1.4
เรื่อง สมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน



จุดประสงค์การเรียนรู้ นำสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ได้

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่าง (ข้อละ 2 คะแนน)

- 1) ถ้า $(2, 3) = (m, n)$ แล้ว จะได้ $2 = \dots\dots\dots$ และ $3 = \dots\dots\dots$
- 2) ถ้า $(x, 2) = (-1, y)$ แล้ว จะได้ $x = \dots\dots\dots$ และ $2 = \dots\dots\dots$
- 3) ถ้า $5 + i = a + bi$ แล้ว จะได้ $5 = \dots\dots\dots$ และ $1 = \dots\dots\dots$
- 4) ถ้า $-2 + 0i = x + yi$ แล้ว จะได้ $-2 = \dots\dots\dots$ และ $0 = \dots\dots\dots$
- 5) ถ้า $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right) = (a, b)$ แล้ว จะได้ $a = \dots\dots\dots$ และ $b = \dots\dots\dots$
- 6) ถ้า $a + bi = -\frac{7}{9} - \frac{1}{9}i$ แล้ว จะได้ $a = \dots\dots\dots$ และ $b = \dots\dots\dots$
- 7) ถ้า $(-\sqrt{3}, \sqrt{2}) = (m, n)$ แล้ว จะได้ $m = \dots\dots\dots$ และ $n = \dots\dots\dots$
- 8) ถ้า $3 - \frac{4}{5}i = m + ni$ แล้ว จะได้ $m = \dots\dots\dots$ และ $n = \dots\dots\dots$
- 9) ถ้า $-c - di = 5 + 4i$ แล้ว จะได้ $c = \dots\dots\dots$ และ $d = \dots\dots\dots$
- 10) ถ้า $-x + yi = 10 - i$ แล้ว จะได้ $x = \dots\dots\dots$ และ $y = \dots\dots\dots$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

- 1) ถ้า $3 + yi = x - 5i$ แล้ว ค่าของ x และ y เท่ากับเท่าไร
.....
- 2) ถ้า $(m, 0) = (-\sqrt{3}, n - 1)$ แล้วค่าของ m และ n เท่ากับเท่าไร
.....
- 3) ถ้า $(2x, -4) = (-9, y + 7)$ แล้วค่าของ x และ y เท่ากับเท่าไร
.....
- 4) ถ้า $z_1 = 2 + bi$ และ $z_2 = a - 6i$ โดยที่ $z_1 = z_2$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าไร
.....
- 5) ถ้า $z_1 = a - 3i$ และ $z_2 = \frac{2}{3} + bi$ โดยที่ $z_1 = z_2$ แล้ว $a \cdot b$ เท่ากับเท่าไร
.....

เกณฑ์การประเมิน ทำได้ถูกต้อง 20 คะแนน ขึ้นไป ผ่านเกณฑ์
คะแนนเต็ม 25 คะแนน ทำได้ถูกต้อง.....คะแนน ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32202) เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	เอกสารพัฒนาที่ 1.1	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
--	--------------------	-----------------------

1. จงบอกค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

$$2 + 3i, 4 + 5i, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, -9, -10i, \sqrt{2} - 2\sqrt{2}i, 7 + \sqrt{3}i$$

2. จงหาจำนวนจริง a และ b ในข้อต่อไปนี้

(1) $2a - 3bi = 4 + 6i$

(2) $a + b - 2abi = 5 - 12i$

(3) $2a + bi = 10$

(4) $3a + (a - b)i = 2 + i$

การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ $z_1 = (a, b)$ และ $z_2 = (c, d)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน

จะได้ $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

หรือ $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าผลบวกต่อไปนี้

1. $(2, 3) + (1, 4) = (2 + 1, 3 + 4) = (3, 7)$

2. $(-6, -2) + (8, 3) = (-6 + 8, -2 + 3) = (2, 1)$

3. $(6 + 8i) + (9 + 12i) = (6 + 9) + (8 + 12)i = 15 + 20i$

4. $(-1 + 3i) + (6 - 4i) = [-1 + 6] + [3 + (-4)]i = 5 - i$

กิจกรรมที่ 1.9 จงเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1) ถ้า $z_1 = (m, n)$ และ $z_2 = (s, t)$ แล้ว $z_1 + z_2 = \dots\dots\dots$

2) ถ้า $z_1 = x + yi$ และ $z_2 = p + qi$ แล้ว $z_1 + z_2 = \dots\dots\dots$

3) $(-10, 5) + (4, 8) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4) $(7, -8) + (-6, 9) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

5) $(5 + 3i) + (-9 - 7i) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

6) $(-20 - 14i) + (8 + 14i) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$



เอกสารฝึกหัดที่ 1.5
เรื่อง การบวกจำนวนเชิงซ้อน



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง หาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ (ข้อละ 1 คะแนน)

ข้อ 1 $(-3, 4) + (2, 5) =$
=
=
=

ข้อ 2 $(4, -4) + (3, -2) =$
=
=
=

ข้อ 3 $(-3, -7) + (-2, -3) =$
=
=
=

ข้อ 4 $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) =$
=
=
=

ข้อ 5 $(-3, 4) + (-2, 3) + (-1, -1) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

ข้อ 6 $(9 + \sqrt{5}i) + (3 + 2\sqrt{5}i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

ข้อ 7 $(-3 - 2\sqrt{2}i) + (7 + 3\sqrt{2}i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

ข้อ 8 $(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i) + (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i) + \frac{1}{4}i = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

<p>เกณฑ์การประเมิน</p> <p>ทำได้ถูกต้อง 6 ข้อ (6 คะแนน) ขึ้นไป</p> <p>ผ่านเกณฑ์</p>	<p>คะแนนเต็ม 8 คะแนน</p> <p>ทำได้.....คะแนน</p> <p>ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ</p>
--	---

การคูณของจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ การคูณจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ง่าย โดยใช้สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการคูณ เช่นเดียวกับ สมบัติการคูณของจำนวนจริง การคูณจำนวนเชิงซ้อน มี 2 ลักษณะ ดังนี้

1. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง
2. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน

1. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{จะได้ว่า } kz = ka + kbi$$

จากบทนิยาม หมายความว่า การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง ทำได้โดยนำจำนวนจริงคูณกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลคูณของ

1. $2(3 + 2i)$
2. $-3(4 - 2i)$
3. $5(-4 + 7i)$

วิธีทำ

1. $2(3 + 2i) = [(2 \times 3) + (2 \times 2i)] = 6 + 4i$
2. $-3(4 - 2i) = [(-3 \times 4) - (-3 \times 2i)] = -12 + 6i$
3. $\frac{2}{3}(6 - 9i) = [(\frac{2}{3} \times 6) - (\frac{2}{3} \times 9i)] = 4 - 6i$

กิจกรรมที่ 1.10

จงหาผลคูณต่อไปนี้

- 1) $(-3)(-2 - i)$ =
- 2) $(\frac{4}{5})(10 + 5i)$ =
- 3) $2(\frac{5}{8} - \frac{1}{6}i)$ =
- 4) $5(\sqrt{3} + 2i)$ =

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $3(6 + 3i) + 4(-2 + 3i) + 4(2 - 5i)$

วิธีทำ $3(6 + 3i) = [(3 \times 6) + (3 \times 3i)] = 18 + 9i$
 $4(-2 + 3i) = [(4 \times (-2)) + (4 \times 3i)] = -8 + 12i$
 $4(2 - 5i) = [(4 \times 2) + (4 \times (-5i))] = 8 - 20i$
 $\therefore 3(6 + 3i) + 4(-2 + 3i) + 4(2 - 5i) = (18 + 9i) + (-8 + 12i) + (8 - 20i)$
 $= (18 - 8 + 8) + (9 + 12 - 20)i$
 $= 18 + i \quad \clubsuit$

กิจกรรมที่ 1.11 จงหาค่าต่อไปนี้

1) $2(7 + 5i) + 7(1 - i) + 3(-2 + 4i)$

วิธีทำ $2(7 + 5i) = \dots\dots\dots$
 $7(1 - i) = \dots\dots\dots$
 $3(-2 + 4i) = \dots\dots\dots$
 $\therefore 2(7 + 5i) + 7(1 - i) + 3(-2 + 4i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

2) $(-5)(-2 - 3i) + 6(-2 + 8i) + 3(9 + 6i)$

วิธีทำ $(-5)(-2 - 3i) = \dots\dots\dots$
 $6(-2 + 8i) = \dots\dots\dots$
 $3(9 + 6i) = \dots\dots\dots$
 $\therefore (-5)(-2 - 3i) + 6(-2 + 8i) + 3(9 + 6i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

3) $4(-6 - 2i) + 5(6 + 9i) + (-1)(10 + 8i)$

วิธีทำ $4(-6 - 2i) = \dots\dots\dots$
 $5(6 + 9i) = \dots\dots\dots$
 $(-1)(10 + 8i) = \dots\dots\dots$
 $\therefore 4(-6 - 2i) + 5(6 + 9i) + (-1)(10 + 8i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

2. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$

$$\text{จะได้ว่า } z_1 z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{หรือ } z_1 z_2 = (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

จากบทนิยาม $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

นักเรียนอาจจะใช้ความเข้าใจง่ายๆ ดังนี้

$$(\text{หน้า}, \text{หลัง}) \times (\text{หน้า}, \text{หลัง}) = (\text{หน้าหน้า} - \text{หลังหลัง}, \text{หน้าหลัง} + \text{หลังหน้า})$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } (4, 3) \times (1, 2) &= ((4 \times 1) - (3 \times 2), (4 \times 2) + (3 \times 1)) \\ &= (4 - 6, 8 + 3) \\ &= (-2, 11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5, 3)(-3, 0) &= ((-5)(-3) - (3)(0), (-5)(0) + (3)(-3)) \\ &= (15 - 0, 0 - 9) \\ &= (15, -9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 2i)(4 - i) &= ((1)(4) - (2)(-1)) + ((1)(-1) + (2)(4))i \\ &= (4 + 2) + (-1 + 8)i \\ &= 6 + 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3 - 7i)(2 - i) &= ((3)(2) - (-7)(-1)) + ((3)(-1) + (-7)(2))i \\ &= (6 - 7) + (-3 - 14)i \\ &= -1 - 17i \end{aligned}$$



กิจกรรมที่ 1.12

จงหาผลคูณต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยาม

$$\begin{aligned} 1) (1, 6) \times (5, 7) &= ((1 \times \dots) - (6 \times \dots), (\dots \times 7) + (\dots \times 5)) \\ &= (\dots, \dots) \\ &= (\dots, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (-4, 2)(-1, 9) &= ((\dots)(-1) - (\dots)(9), (-4)(\dots) + (2)(\dots)) \\ &= (\dots, \dots) \\ &= (\dots, \dots) \end{aligned}$$

3) $(2, -3)(0, 3) = ((2)(\dots\dots\dots) - (-3)(\dots\dots\dots), (\dots\dots\dots)(3) + (\dots\dots\dots)(0))$
 $= (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$
 $= (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$

4) $(2 + 3i)(-4 - i) = ((2)(-4) - (3)(\dots\dots\dots)) + ((2)(-1) + (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)) i$
 $= ((-8) - \dots\dots\dots) + ((-2) + \dots\dots\dots) i$
 $= \dots\dots\dots$

5) $(3 - 7i)(2 - i) = ((\dots\dots\dots)(2) - (\dots\dots\dots)(-1)) + ((\dots\dots\dots)(-1) + (\dots\dots\dots)(2)) i$
 $= (\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots) i$
 $= \dots\dots\dots$

6) $(6 - 3i)(6 - 3i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

7) $(1 + 5i)(2 - 5i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

8) $(-2 + 3i)(4 - i) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะได้ว่า

1. สมบัติปิด $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

2. สมบัติการสลับที่ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

และ $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

4. สมบัติการแจกแจง $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

จำนวนเชิงซ้อนบวก/คูณ
กับจำนวนเชิงซ้อน ผลลัพธ์
เป็นจำนวนเชิงซ้อน

การคูณจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ เราสามารถใช้สมบัติการแจกแจงได้ ดังนี้

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bd i^2$$

$$= ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$= ac + adi + bci - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

อย่าลืมนะ $i^2 = -1$

$$\text{หรือ } (a + bi)(c + di) = (a + bi)c + (a + bi)di$$

$$= ac + bci + adi + bd i^2$$

$$= ac + adi + bci + bd(-1)$$

$$= ac + adi + bci - bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$



ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลคูณต่อไปนี้ โดยใช้สมบัติการแจกแจง

$$1. (2 + 3i)(1 + 4i)$$

$$2. (6 + 4i)(-7 + 3i)$$

วิธีทำ

$$1. (2 + 3i)(1 + 4i) = (2)(1 + 4i) + (3i)(1 + 4i)$$

$$= (2)(1) + (2)(4)i + (3i)(1) + (3i)(4)i^2$$

$$= 2 + 8i + 3i + 12(-1)$$

$$= 2 + (-12) + 11i$$

$$= -10 + 11i$$



$$2. (6 + 4i)(-7 + i) = (6 + 4i)(-7) + (6 + 4i)(i)$$

$$= (6)(-7) + (4i)(-7) + (6)(i) + (4i)(1)i^2$$

$$= (-42) + (-28i) + 6i + (4)(-1)$$

$$= -42 - 4 - 22i$$

$$= -46 - 22i$$



กิจกรรมที่ 1.13 จงใช้สมบัติการแจกแจงหาผลคูณต่อไปนี้

- 1) $(6 + i)(2 + 7i)$ =
=
=
= ♣
- 2) $(-4 + 2i)(5 - i)$ =
=
=
= ♣
- 3) $(3 + 4i)(5 + 2i)$ =
=
=
= ♣
- 4) $(-2 + 5i)(3 + 2i)$ =
=
=
= ♣
- 5) $(3 + 2i)(3 - 2i)$ =
=
=
= ♣
- 6) $(-2 - i)(1 + 3i)$ =
=
=
= ♣

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดให้ $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ และ $z_3 = 4 - 5i$

จงหาค่าของ z_1z_2 , z_1z_3 และ z_2z_3

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= [3 + 2i] \times [-3 + 2i] \\ &= [(3 \times (-3)) - (2 \times 2)] + [(3 \times 2) + (2 \times (-3))]i \\ &= (-9 - 4) + (6 - 6)i \\ &= -13 + 0i = 13 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_1z_3 &= [3 + 2i] \times [4 - 5i] \\ &= [(3 \times 4) - (2 \times (-5))] + [(3 \times (-5)) + (4 \times 2)]i \\ &= (12 + 10) + (-15 + 8)i \\ &= 22 - 7i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_2z_3 &= [-3 + 2i] \times [4 - 5i] \\ &= [(-3 \times 4) - (2 \times (-5))] + [(-3 \times (-5)) + (2 \times 4)]i \\ &= (-12 + 10) + (15 + 8)i \\ &= -2 + 23i \end{aligned}$$



ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -3 + 4i$ และ $z_3 = 4 + 7i$

จงหาค่าของ $z_1(z_2 + z_3)$ และ $z_1z_2 + z_1z_3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (2 + 3i) [(-3 + 4i) + (4 + 7i)] \\ &= (2 + 3i) (1 + 11i) \\ &= (2)(1) + (2)(11i) + (3i)(1) + (3i)(11i) \\ &= 2 + 22i + 3i + (33)(-1) \\ &= -31 + 25i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_1z_3 &= [(2 + 3i)(-3 + 4i)] + [(2 + 3i)(4 + 7i)] \\ &= [(2)(-3) + (2)(4i) + (3i)(-3) + (3i)(4i)^2] + \\ &\quad [(2)(4) + (2)(7i) + (3i)(4) + (3i)(7i)^2] \\ &= [-18 - i] + [-13 + 26i] \\ &= -31 + 25i \end{aligned}$$



กำหนด $z_1 = -4 - i$, $z_2 = 12 + i$ และ $z_3 = -6 + 8i$ จงหาค่าของ

3) $(z_1 + z_2) + z_3$

4) $\mathbf{z}_1 + (\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3)$

www.kroobannok.com

เอกสารฝึกหัดที่ 1.6
เรื่อง การคูณจำนวนเชิงซ้อน



จุดประสงค์การเรียนรู้ หาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อเดียว (ข้อละ 1 คะแนน)

ตอบคำถามข้อ 1-3 เมื่อกำหนดให้ $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = 6 + 3i$ และ $z_3 = 1 + i$

1) ค่าของ $(z_1 + 2z_2) + z_3$ ตรงกับข้อใด

- ก. $7 + 3i$ ข. $7 + 8i$ ค. $15 + 3i$ ง. $15 + 11i$

2) ค่าของ $2z_3 + \frac{1}{3}z_2 + (-z_1)$ ตรงกับข้อใด

- ก. $-3 + i$ ข. $3 - i$ ค. $-2 + 7i$ ง. $2 + 7i$

3) ค่าของ $z_1z_2 + z_3z_2$ ตรงกับข้อใด

- ก. $24 - 18i$ ข. $27 - 9i$ ค. $24 - 9i$ ง. $27 - 18i$

4) จำนวน $(3 + 7i)(2 - 5i)$ ตรงกับข้อใด

- ก. $-29 + 29i$ ข. $29 + i$ ค. $41 - i$ ง. $-41 + i$

5) จำนวน $i(12 - 4i)(3 + i)$ ในรูป $a + bi$ ตรงกับข้อใด

- ก. $40i$ ข. 40 ค. $-40i$ ง. -40

<p>เกณฑ์การประเมิน</p> <p>ทำได้ถูกต้อง 4 ข้อ (4 คะแนน) ขึ้นไป</p> <p>ผ่านเกณฑ์</p>	<p>คะแนนเต็ม 5 คะแนน</p> <p>ทำได้.....คะแนน</p> <p>ลงชื่อ.....ผู้ตรวจ</p>
--	---

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 (ค32202) เรื่องจำนวนเชิงซ้อน	เอกสารพัฒนาที่ 1.2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
--	--------------------	-----------------------

1) จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

- (1) $(2 - 3i) + (4 - 5i)$
- (2) $(-3 - i) + (4 + i)$
- (3) $(2 - \sqrt{2}i) + (5 - \sqrt{8}i)$
- (4) $-(1 + 5i) + (3 - 2i)$
- (5) $5(i + 4)(1 - 2i)$
- (6) $5(4 + i) + 3(-7 + 2i)$
- (7) $\frac{1}{2}(4 - 3i) - \frac{3}{2}(2 - i)$
- (8) $(\sqrt{5} + \sqrt{7}i)(\sqrt{5} - \sqrt{7}i)$
- (9) $-\sqrt{3}(\sqrt{3}i + \sqrt{2})$
- (10) $(5 - 2i)(-2 + 3i)$

2) จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

- (1) $(x - 2) + (y + 5i) = -1 - 2i$
- (2) $3x - yi = (1 + i)^2$



สรุปเนื้อหา

จำนวนจินตภาพ $i = \sqrt{-1}$ ค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

$$i^n = \begin{cases} i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย } 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย } 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 2 \\ -i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย } 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 3 \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย } 4 \text{ แล้วเหลือเศษ } 0 \end{cases}$$

จำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เขียนได้ในรูป $a + bi = (a, b)$

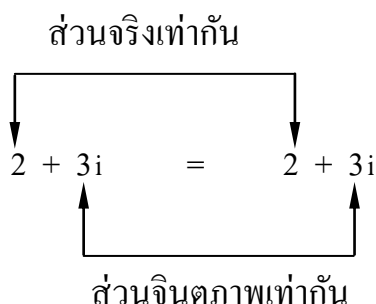
เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) และ

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part)

จำนวนจริง คือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์

จำนวนจินตภาพแท้ คือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์ แต่ส่วนจินตภาพ ไม่เท่ากับศูนย์

จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนเท่ากัน เมื่อ ส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ



๒ การบวกจำนวนเชิงซ้อน ก็ทำได้ง่าย ๆ เพียงแค่เรานำส่วนจริงบวกส่วนจริง และส่วนจินตภาพบวกส่วนจินตภาพ

๒ การคูณจำนวนเชิงซ้อน

1. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง ทำได้โดยนำจำนวนจริงคูณกับส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน
2. การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน ทำได้โดยใช้สมบัติการแจกแจง

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{หรือ} \quad (a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

๒ สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะได้ว่า

สมบัติปิด $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติการสลับที่ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

และ $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

สมบัติการแจกแจง $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$



เฉลย



เฉลยกิจกรรม

กิจกรรมที่ 1.1 จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

<p>ข้อ 1 สมการ $x^2 - 9 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 9 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 9$</p> <p>จะได้ $x = \pm 3$</p>	<p>ข้อ 2 สมการ $x^2 - 12 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 12 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 12$</p> <p>จะได้ $x = \pm 2\sqrt{3}$</p>
<p>ข้อ 3 สมการ $x^2 - 21 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 21 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 21$</p> <p>จะได้ $x = \pm \sqrt{21}$</p>	<p>ข้อ 4 สมการ $x^2 - 36 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 36 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 36$</p> <p>จะได้ $x = \pm 6$</p>
<p>ข้อ 5 สมการ $x^2 - 41 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 41 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 41$</p> <p>จะได้ $x = \pm \sqrt{41}$</p>	<p>ข้อ 6 สมการ $x^2 - 63 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 63 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 63$</p> <p>จะได้ $x = \pm 3\sqrt{7}$</p>
<p>ข้อ 7 สมการ $x^2 - 121 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 121 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 121$</p> <p>จะได้ $x = \pm 11$</p>	<p>ข้อ 8 สมการ $x^2 - 243 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 243 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 243$</p> <p>จะได้ $x = \pm 9\sqrt{3}$</p>
<p>ข้อ 9 สมการ $x^2 - 275 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 243 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 275$</p> <p>จะได้ $x = \pm 5\sqrt{11}$</p>	<p>ข้อ 10 สมการ $x^2 - 361 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 - 361 = 0$</p> <p style="padding-left: 100px;">$x^2 = 361$</p> <p>จะได้ $x = \pm 19$</p>

กิจกรรมที่ 1.2 จงหาค่าของ x จากสมการที่กำหนดให้

<p>ข้อ 1 สมการ $x^2 + 5 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 5 = 0$</p> $x^2 = -5$ $x = \pm \sqrt{-5}$ $x = \pm \sqrt{5} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm \sqrt{5} i$</p>	<p>ข้อ 2 สมการ $x^2 + 16 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 16 = 0$</p> $x^2 = -16$ $x = \pm \sqrt{-16}$ $x = \pm \sqrt{16} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 4i$</p>
<p>ข้อ 3 สมการ $x^2 + 27 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 27 = 0$</p> $x^2 = -27$ $x = \pm \sqrt{-27}$ $x = \pm \sqrt{27} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 3\sqrt{3} i$</p>	<p>ข้อ 4 สมการ $x^2 + 48 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 48 = 0$</p> $x^2 = -48$ $x = \pm \sqrt{-48}$ $x = \pm \sqrt{48} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 4\sqrt{3} i$</p>
<p>ข้อ 5 สมการ $x^2 + 83 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 83 = 0$</p> $x^2 = -83$ $x = \pm \sqrt{-83}$ $x = \pm \sqrt{83} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm \sqrt{83} i$</p>	<p>ข้อ 6 สมการ $x^2 + 144 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 144 = 0$</p> $x^2 = -144$ $x = \pm \sqrt{-144}$ $x = \pm \sqrt{144} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 12i$</p>
<p>ข้อ 7 สมการ $x^2 + 256 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 256 = 0$</p> $x^2 = -256$ $x = \pm \sqrt{-256}$ $x = \pm \sqrt{256} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 16i$</p>	<p>ข้อ 8 สมการ $x^2 + 363 = 0$</p> <p><u>วิธีทำ</u> $x^2 + 363 = 0$</p> $x^2 = -363$ $x = \pm \sqrt{-363}$ $x = \pm \sqrt{363} \sqrt{-1}$ <p>จะได้ $x = \pm 11\sqrt{3} i$</p>

กิจกรรมที่ 1.3 จงหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

- i^{28} มีคำตอบเท่ากับ 1 เพราะ 28 หารด้วย 4 ลงตัว
- i^{37} มีคำตอบเท่ากับ i เพราะ 37 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1
- i^{66} มีคำตอบเท่ากับ -1 เพราะ 66 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2
- i^{83} มีคำตอบเท่ากับ $-i$ เพราะ 83 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

กิจกรรมที่ 1.4 จงหาค่าต่อไปนี้

- 1) $i^{111} + i^{85} = i^3 + i = -i + i = 0$
- 2) $i^4 - i^{22} = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$
- 3) $i^{79} + i^{84} - i^{52} - i^{31} = -i + 1 - 1 - (-i) = 0$

กิจกรรมที่ 1.5 จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	เขียนให้อยู่ในรูป $a + bi$	ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	เขียนให้อยู่ในรูป (a, b)
1.1	(6, 2)	$6 + 2i$	1.6	$5 + 12i$	(5, 12)
1.2	(-3, 4)	$-3 + 4i$	1.7	$-3 + 6i$	(-3, 6)
1.3	(7, -12)	$7 - 12i$	1.8	$-4 - 5i$	(-4, -5)
1.4	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{5}i$	1.9	$\frac{7}{3} + \frac{1}{6}i$	$\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{6}\right)$
1.5	$(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}i$	1.10	$2\sqrt{3} - 4i$	$(2\sqrt{3}, -4)$

กิจกรรมที่ 1.6 จงเติมคำตอบลงในช่องว่างให้ถูกต้องสมบูรณ์

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ	ลักษณะของจำนวนเชิงซ้อน
1	(0, 5)	0	5	จำนวนจินตภาพแท้
2	(-7, 0)	-7	0	จำนวนจริง
3	$(\sqrt{2}, 0)$	$\sqrt{2}$	0	จำนวนจริง
4	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	จำนวนจินตภาพแท้
5	$(0, 2\sqrt{3})$	0	$2\sqrt{3}$	จำนวนจินตภาพแท้
6	$-\frac{3}{5}i$	0	$-\frac{3}{5}$	จำนวนจินตภาพแท้
7	$12 + 0i$	12	0	จำนวนจริง
8	$0 - 9i$	0	-9	จำนวนจินตภาพแท้
9	$\frac{2}{7} - 0i$	$\frac{2}{7}$	0	จำนวนจริง
10	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	0	จำนวนจริง

กิจกรรมที่ 1.7 ให้นักเรียนเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

- 1) ถ้า $2 + 8i = x + yi$ แสดงว่า $2 = x$ และ $8 = y$
- 2) ถ้า $m - i = -6 + ni$ แสดงว่า $m = -6$ และ $-1 = n$
- 3) ถ้า $(x, y) = (7, 0)$ แสดงว่า $x = 7$ และ $y = 0$
- 4) ถ้า $(4, a) = (b, -4)$ แสดงว่า $4 = b$ และ $a = -4$
- 5) ถ้า $k + \frac{4}{9}i = ti$ แสดงว่า $k = 0$ และ $\frac{4}{9} = t$
- 6) ถ้า $(a, b) = (\sqrt{3}, a^2)$ แสดงว่า $a = \sqrt{3}$ และ $b = a^2$

กิจกรรมที่ 1.8 จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) ถ้า $3 + yi = x - 5i$ แล้ว ค่าของ x และ y เท่ากับเท่าไร
วิธีทำ $3 + yi = x - 5i$
จะได้ $3 = x$ และ $y = -5$
- 2) ถ้า $(m, 0) = (-\sqrt{3}, n-1)$ แล้วค่าของ m และ n เท่ากับเท่าไร
วิธีทำ $(m, 0) = (-\sqrt{3}, n-1)$
จะได้ $m = -\sqrt{3}$ และ $0 = n-1$
 $n = 1$
- 3) ถ้า $z_1 = 2 + bi$ และ $z_2 = a - 6i$ โดยที่ $z_1 = z_2$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าไร
วิธีทำ เนื่องจาก $2+bi = a-6i$
จะได้ $2 = a$ และ $b = -6$
ดังนั้น $a+b = 2+(-6) = -4$
- 4) ถ้า $x+4+2yi = 9$ ค่าของ xy เท่ากับข้อใด
วิธีทำ เนื่องจาก $x+4+2yi = 9$
 $x+4 = 9$ และ $2y = 0$
จะได้ $x = 5$ และ $y = 0$
ดังนั้น $xy = 0$
- 5) ถ้า $8 + yi = 4x + 3i$ แล้ว ค่า x และ y เท่ากับเท่าไร
วิธีทำ เนื่องจาก $8 + yi = 4x + 3i$
จะได้ $8 = 4x$ และ $y = 3$
ดังนั้น $x = 2$ และ $y = 3$

กิจกรรมที่ 1.9 จงเขียนคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

- 1) ถ้า $z_1 = (m, n)$ และ $z_2 = (s, t)$ แล้ว $z_1 + z_2 = \dots (m+s, n+t) \dots$
- 2) ถ้า $z_1 = x + yi$ และ $z_4 = p + qi$ แล้ว $z_3 + z_4 = \dots (x+p) + (y+q)i \dots$
- 3) $(-10, 5) + (4, 8) = \dots (-10+4, 5+8) = (-6, 13) \dots$
- 4) $(7, -8) + (-6, 9) = \dots (7+(-6), (-8)+9) = (1, 1) \dots$
- 5) $(5 + 3i) + (-9 - 7i) = \dots (5+(-9)) + (3+(-7))i = -4 - 4i \dots$
- 6) $(-20 - 14i) + (8 + 14i) = \dots (-20+8) + (-14+14)i = -12 + 0i = -12 \dots$

กิจกรรมที่ 1.10 จงหาผลคูณต่อไปนี้

- 1) $(-3)(-2 - i) = (-3)(-2) - (-3)i$
 $= 6 + 3i$
- 2) $\left(\frac{4}{5}\right)(10 + 5i) = \left(\frac{4}{5}\right)(10) + \left(\frac{4}{5}\right)(5i)$
 $= 8 + 4i$
- 3) $2\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{6}i\right) = 2\left(\frac{5}{8}\right) - 2\left(\frac{1}{6}\right)i$
 $= \frac{5}{4} - \frac{1}{3}i$
- 4) $5(\sqrt{3} + 2i) = (5)(\sqrt{3}) + (5)(2i)$
 $= 5\sqrt{3} + 10i$

กิจกรรมที่ 1.11 จงหาค่าต่อไปนี้

$$1) \quad 2(7 + 5i) + 7(1 - i) + 3(-2 + 4i)$$

วิธีทำ $2(7 + 5i) = 14 + 10i$

$$7(1 - i) = 7 - 7i$$

$$3(-2 + 4i) = -6 + 12i$$

$$\begin{aligned} \therefore 2(7 + 5i) + 7(1 - i) + 3(-2 + 4i) &= (14 + 10i) + (7 - 7i) + (-6 + 12i) \\ &= (14 + 7 - 6) + (10 - 7 + 12)i \\ &= 15 - 15i \end{aligned}$$

$$2) \quad (-5)(-2 - 3i) + 6(2 + 8i) + 3(9 + 6i)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad (-5)(-2 - 3i) = 10 + 15i$$

$$6(2 + 8i) = 12 + 48i$$

$$3(9 + 6i) = 27 + 18i$$

$$\begin{aligned} \therefore (-5)(-2 - 3i) + 6(2 + 8i) + 3(9 + 6i) &= (10 + 15i) + (12 + 48i) + (27 + 18i) \\ &= (10 + 12 + 27) + (15 + 48 + 18)i \\ &= 49 + 81i \end{aligned}$$

$$3) \quad 4(-6 - 2i) + 5(6 + 9i) + (-1)(10 + 8i)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad 4(-6 - 2i) = -24 - 8i$$

$$5(6 + 9i) = 30 + 45i$$

$$(-1)(10 + 8i) = -10 - 8i$$

$$\begin{aligned} \therefore 4(-6 - 2i) + 5(6 + 9i) + (-1)(10 + 8i) &= (-24 - 8i) + (30 + 45i) + (-10 - 8i) \\ &= (-24 + 30 - 10) + (-8 + 45 - 8)i \\ &= -4 + 29i \end{aligned}$$

กิจกรรมที่ 1.12 จงหาผลคูณต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยาม

$$\begin{aligned} 1) \quad (1, 6) \times (5, 7) &= ((1 \times 5) - (6 \times 7), (1 \times 7) + (6 \times 5)) \\ &= (5 - 42, 7 + 30) \\ &= (-37, 37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (-4, 2)(-1, 9) &= ((-4)(-1) - (2)(9), (-4)(9) + (2)(-1)) \\ &= (4 - 18, (-36) + (-2)) \\ &= (-14, -38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (2, -3)(0, 3) &= ((2)(0) - (-3)(3), (2)(3) + (-3)(0)) \\ &= (0 + 9, 6 + 0) \\ &= (9, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (2 + 3i)(-4 - i) &= ((2)(-4) - (3)(-1)) + ((2)(-1) + (3)(-4))i \\ &= ((-8) - (-3)) + ((-2) + (-12))i \\ &= -5 - 14i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad (3 - 7i)(2 - i) &= ((3)(2) - (-7)(-1)) + ((3)(-1) + (-7)(2))i \\ &= (6 - 7) + (-3 - 14)i \\ &= -1 - 17i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad (6 - 3i)(6 - 3i) &= ((6)(6) - (-3)(-3)) + ((6)(-3) + (-3)(6))i \\ &= (36 - 9) + (-18 - 18)i \\ &= 27 - 36i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad (1 + 5i)(2 - 5i) &= ((1)(2) - (5)(-5)) + ((1)(-5) + (5)(2))i \\ &= (2 + 25) + (-5 + 10)i \\ &= 27 + 5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad (-2 + 3i)(4 - i) &= ((-2)(4) - (3)(-1)) + ((-2)(-1) + (3)(4))i \\ &= (-8 + 3) + (2 + 12)i \\ &= -5 + 14i \end{aligned}$$

กิจกรรมที่ 1.13 จงใช้สมบัติการแจกแจงหาผลคูณต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 1) \quad (6 + i)(2 + 7i) &= (6)(2) + (6)(7)i + (1)(2)i + (1)(7)i^2 \\ &= 12 + 42i + 2i + 7(-1) \\ &= 12 + (-7) + 42i + 2i \\ &= 5 + 44i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (-4 + 2i)(5 - i) &= (-4)(5) + (-4)(-1)i + (2)(5)i + (2)(-1)i^2 \\ &= (-20) + 4i + 10i + (-2)(-1) \\ &= (-20) + 2 + 4i + 10i \\ &= -18 + 14i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (3 + 4i)(5 + 2i) &= (3)(5) + (3)(2)i + (4)(5)i + (4)(2)i^2 \\ &= 15 + 6i + 20i + (8)(-1) \\ &= 15 - 8 + 6i + 20i \\ &= 7 + 26i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (-2 + 5i)(3 + 2i) &= (-2)(3) + (-2)(2)i + (5)(3)i + (5)(2)i^2 \\ &= (-6) - 4i + 15i + 10(-1) \\ &= (-6) - 10 - 4i + 15i = -16 + 11i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad (3 + 2i)(3 - 2i) &= (3)(3) + (3)(-2)i + (2)(3)i + (2)(-2)i^2 \\
 &= 9 - 6i + 6i - 4(-1) \\
 &= 9 + 4 \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad (-2 - i)(1 + 3i) &= (-2)(1) + (-2)(3)i + (-1)(1)i + (-1)(3)i^2 \\
 &= -2 - 6i - i - 3(-1) \\
 &= -2 + 3 - 7i \\
 &= 1 - 7i
 \end{aligned}$$

กิจกรรมที่ 1.14 กำหนด $z_1 = -4 - i$, $z_2 = 12 + i$ และ $z_3 = -6 + 8i$ จงหาค่าของ

- 1) $z_1(z_2 + z_3)$
- 2) $z_1z_2 + z_1z_3$
- 3) $(z_1 + z_2) + z_3$
- 4) $z_1 + (z_2 + z_3)$

$$\begin{aligned}
 1) \quad z_1(z_2 + z_3) &= (-4 - i) [(12 + i) + (-6 + 8i)] \\
 &= (-4 - i) [(12 - 6) + (1 + 8)i] \\
 &= (-4 - i) (6 + 9i) \\
 &= (-4)(6) + (-4)(9i) + (-i)(6) + (-i)(9i) \\
 &= -24 - 36i - 6i - 9i^2 \\
 &= -24 - 42i + 9 \\
 &= -15 - 42i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad z_1z_2 + z_1z_3 &= (-4 - i)(12 + i) + (-4 - i)(-6 + 8i) \\
 &= [(-4)(12) + (-4)i + (-i)(12) + (-i)i] + [(-4)(-6) + (-4)(8i) + (-i)(-6) \\
 &\quad + (-i)(8i)] \\
 &= [(-48) - 4i - 12i - i^2] + [24 - 32i + 6i - 8i^2] \\
 &= [-48 - 16i + 1] + [24 - 26i + 8] \\
 &= (-47 - 16i) + (32 - 26i) \\
 &= (-47 + 32) + (-16i - 26i) \\
 &= -15 - 42i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) (z_1 + z_2) + z_3 &= [(-4 - i) + (12 + i)] + (-6 + 8i) \\
 &= [(-4 + 12) + (-1 + 1)i] + (-6 + 8i) \\
 &= (8 + 0i) + (-6 + 8i) \\
 &= (8 - 6) + 8i \\
 &= 2 + 8i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) z_1 + (z_2 + z_3) &= (-4 - i) + [(12 + i) + (-6 + 8i)] \\
 &= (-4 - i) + [(12 - 6) + (1 + 8)i] \\
 &= (-4 - i) + (6 + 9i) \\
 &= (-4 + 6) + (-1 + 9)i \\
 &= 2 + 8i
 \end{aligned}$$

เฉลยเอกสารฝึกหัด

เอกสารฝึกหัดที่ 1.1

1. สมการ $x^2 - 6 = 0$ จะได้ $x = \pm\sqrt{6}$
2. สมการ $x^2 + 4 = 0$ จะได้ $x = \pm 2i$
3. สมการ $x^2 + 8 = 0$ จะได้ $x = \pm 2\sqrt{2}i$
4. สมการ $x^2 - 8 = 0$ จะได้ $x = \pm 2\sqrt{2}$
5. สมการ $x^2 - 15 = 0$ จะได้ $x = \pm\sqrt{15}$
6. สมการ $x^2 - 25 = 0$ จะได้ $x = \pm 5$
7. สมการ $x^2 + 24 = 0$ จะได้ $x = \pm 2\sqrt{6}i$
8. สมการ $x^2 + 36 = 0$ จะได้ $x = \pm 6i$
9. สมการ $x^2 + 41 = 0$ จะได้ $x = \pm\sqrt{41}i$
10. สมการ $x^2 + 49 = 0$ จะได้ $x = \pm 7i$
11. สมการ $x^2 - 36 = 0$ จะได้ $x = \pm 6$
12. สมการ $x^2 - 49 = 0$ จะได้ $x = \pm 7$
13. สมการ $x^2 - 100 = 0$ จะได้ $x = \pm 10$
14. สมการ $x^2 + 100 = 0$ จะได้ $x = \pm 10i$
15. สมการ $x^2 + 400 = 0$ จะได้ $x = \pm 20i$

เอกสารฝึกหัดที่ 1.2

- 1) $i^{11} = i^3 = -i$
- 2) $i^{21} = i$
- 3) $i^{247} = i^3 = -i$
- 4) $i^{4202} = i^2 = -1$
- 5) $i^{111} + i^{85} = i^3 + i = -i + i = 0$
- 6) $i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$
- 7) $i^{40} \cdot i^{41} \cdot i^{42} \cdot i^{43} = 1 \cdot i \cdot (-1) \cdot (-i) = i^2 = -1$
- 8) $(i^5 + i^{18})(i^{50} + i^{90})^2 = (i + i^2)(i^2 + i^2)^2 = (-1 + i)(-2)^2 = 4(-1 + i) = -4 + 4i$

เอกสารฝึกหัดที่ 1.3

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

- 1.1) จำนวน $-5 + 7i$ เรียก -5 ว่า ส่วนจริง และ เรียก 7 ว่า ส่วนจินตภาพ
- 1.2) จำนวน $(\sqrt{5}, 3)$ เรียก $\sqrt{5}$ ว่าส่วนจริง และเรียก 3 ว่าส่วนจินตภาพ
- 1.3) จำนวน $9 - i$ เรียก 9 ว่าส่วนจริง และเรียก -1 ว่าส่วนจินตภาพ
- 1.4) กำหนด $z = -10 + i$ จะได้ว่า $\text{Re}(z) = -10$ และ $\text{Im}(z) = 1$
- 1.5) กำหนด $z = (0, -\frac{2}{3})$ จะได้ว่า $\text{Re}(z) = 0$ และ $\text{Im}(z) = -\frac{2}{3}$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ให้อยู่ในรูป (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- 2.1) $3 + 7i = (3, 7)$
- 2.2) $6 + 10i = (6, 10)$
- 2.5) $\sqrt{3} - i = (\sqrt{3}, -1)$
- 2.6) $-5 - \sqrt{2}i = (-5, -\sqrt{2}i)$
- 2.7) $5 + 0i = (5, 0)$
- 2.8) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}i = (\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$
- 2.9) $9 - \frac{4}{7}i = (9, -\frac{4}{7})$
- 2.10) $-17 - 20i = (-17, -20)$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- 3.1) $(8, 4) = 8 + 4i$
- 3.2) $(-7, 12) = -7 + 12i$
- 3.3) $(0, -6) = 0 - 6i = -6i$
- 3.4) $(-9, 0) = -9 + 0i = -9$
- 3.5) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}i$
- 3.6) $(\sqrt{5}, -5) = \sqrt{5} - 5i$
- 3.7) $(-8, 2\sqrt{2}) = -8 + 2\sqrt{2}i$
- 3.8) $(-6, 1) = -6 + i$

3.9) $(-27, -19) = -27 - 19i$

3.10) $\left(\frac{7}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \frac{7}{9} - \frac{5}{9}i$

4. ให้นักเรียนจำแนกจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ตามลักษณะของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนจริง	จำนวนจินตภาพแท้
<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$8 + 0i$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$-\frac{5}{7}$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\sqrt{3}$</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">-24</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$-12 + 0i$</div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-bottom: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$0 + 9i$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\sqrt{7}i$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$0 + \frac{3}{8}i$</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$0 - \frac{1}{2}i$</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">$\frac{7}{11}i$</div> </div>

เอกสารฝึกหัดที่ 1.4

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่าง

- 1) ถ้า $(2, 3) = (m, n)$ แล้ว จะได้ $2 = m$ และ $3 = n$
- 2) ถ้า $(x, 2) = (-1, y)$ แล้ว จะได้ $x = -1$ และ $2 = y$
- 3) ถ้า $5 + i = a + bi$ แล้ว จะได้ $5 = a$ และ $1 = b$
- 4) ถ้า $-2 + 0i = x + yi$ แล้ว จะได้ $-2 = x$ และ $0 = y$
- 5) ถ้า $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right) = (a, b)$ แล้ว จะได้ $a = \frac{2}{3}$ และ $b = \frac{1}{5}$
- 6) ถ้า $a + bi = -\frac{7}{9} - \frac{1}{9}i$ แล้ว จะได้ $a = -\frac{7}{9}$ และ $b = -\frac{1}{9}$
- 7) ถ้า $(-\sqrt{3}, \sqrt{2}) = (m, n)$ แล้ว จะได้ $m = -\sqrt{3}$ และ $n = \sqrt{2}$
- 8) ถ้า $3 - \frac{4}{5}i = m + ni$ แล้ว จะได้ $m = 3$ และ $n = -\frac{4}{5}$
- 9) ถ้า $-c - di = 5 + 4i$ แล้ว จะได้ $c = -5$ และ $d = -4$
- 10) ถ้า $-x + yi = 10 - i$ แล้ว จะได้ $x = -10$ และ $y = -1$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) ถ้า $3 + yi = x - 5i$ แล้ว ค่าของ x และ y เท่ากับเท่าไร
ตอบ $x = 3$ และ $y = -5$
- 2) ถ้า $(m, 0) = (-\sqrt{3}, n - 1)$ แล้วค่าของ m และ n เท่ากับเท่าไร
ตอบ $m = -\sqrt{3}$ และ $n = 1$

เฉลยเอกสารพัฒนา

เอกสารพัฒนาที่ 1.1

1) จงบอกค่าของ $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

$$z = 2 + 3i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = 2 \text{ และ } \text{Im}(z) = 3$$

$$z = 4 - 5i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = 4 \text{ และ } \text{Im}(z) = -5$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \text{ และ } \text{Im}(z) = -\frac{3}{2}$$

$$z = -9 \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = -9 \text{ และ } \text{Im}(z) = 0$$

$$z = -10i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = 0 \text{ และ } \text{Im}(z) = -10$$

$$z = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = \sqrt{2} \text{ และ } \text{Im}(z) = -2\sqrt{2}$$

$$z = 7 + \sqrt{3}i \text{ จะได้ } \text{Re}(z) = 7 \text{ และ } \text{Im}(z) = \sqrt{3}$$

2) จงหาจำนวนจริง a และ b ในข้อต่อไปนี้

(1) $2a - 3bi = 4 + 6i$

$$\text{จะได้ } 2a = 4 \quad \text{และ } -3b = 6$$

$$\text{นั่นคือ } a = 2 \quad b = -2$$

(2) $a + b - 2abi = 5 - 12i$

$$\text{จะได้ } a + b = 5 \quad \text{และ } -2ab = -12$$

$$ab = 6$$

$$\text{นั่นคือ } a = 2, b = 3 \text{ หรือ } a = 3, b = 2$$

(3) $2a + bi = 10$

$$\text{จะได้ } 2a = 10 \quad \text{และ } b = 0$$

$$a = 5$$

$$\text{นั่นคือ } a = 5, b = 0$$

(4) $3a + (a - b)i = 2 + i$

$$\text{จะได้ } 3a = 2 \quad \text{และ } a - b = 1$$

$$a = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} - b = 1$$

$$b = -\frac{1}{3}$$

$$\text{นั่นคือ } a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

เอกสารพัฒนาที่ 1.2

1) จงเขียนผลลัพธ์ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

$$(1) (2 - 3i) + (4 - 5i) = 6 - 8i$$

$$(2) (-3 - i) + (4 + i) = 1 + 0i$$

$$(3) (2 - \sqrt{2}i) + (5 - \sqrt{8}i) = 7 - 3\sqrt{2}i$$

$$(4) -(1 + 5i) + (3 - 2i) = 2 - 7i$$

$$(5) 5(i + 4)(1 - 2i) = 5i - 10i^2 + 20 - 40i \\ = 30 - 35i$$

$$(6) 5(4 + i) + 3(-7 + 2i) = (20 + 5i) + (-21 + 6i) \\ = -1 + 11i$$

$$(7) \frac{1}{2}(4 - 3i) - \frac{3}{2}(2 - i) = (2 - \frac{3}{2}i) - (3 - \frac{3}{2}i) \\ = -1 + 0i$$

$$(8) (\sqrt{5} + \sqrt{7}i)(\sqrt{5} - \sqrt{7}i) = 5 - \sqrt{35}i + \sqrt{35}i - 7i^2 \\ = 12 + 0i$$

$$(9) -\sqrt{3}(\sqrt{3}i + \sqrt{2}) = -3i - \sqrt{6} \\ = \sqrt{6} - 3i$$

$$(10) (5 - 2i)(-2 + 3i) = -10 + 15i + 4i - 6i^2 \\ = -4 + 19i$$

2) จงหาค่า x และ y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

$$(1) \text{ สมการ } (x - 2) + (y + 5)i = -1 - 2i$$

วิธีทำ จากสมบัติการเท่ากัน จะได้

$$x - 2 = -1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = -1 + 2$$

$$x = 1$$

$$\text{และ} \quad y + 5 = -2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$y = -2 - 5$$

$$y = -7$$

ตอบ $x = 1$ และ $y = -7$



(2) สมการ $3x - yi = (1 + i)^2$

วิธีทำ $3x - yi = (1 + i)^2$

$$3x - yi = (1 + i)(1 + i)$$

$$3x - yi = 1 + i + i + i^2 \quad (\text{ใช้สมบัติการแจกแจง})$$

$$3x - yi = 1 + 2i - 1$$

$$3x - yi = 2i$$

จากสมบัติการเท่ากัน จะได้

$$3x = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = 0$$

และ $-y = 2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$$y = -2$$

ตอบ $x = 0$ และ $y = -2$
