แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

ไฮเพอร์โบลา

ชุดที่ 1

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)

คำนำ

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เล่มนี้ เรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในการเตรียมความพร้อมทางการเรียนและเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนมีทักษะที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ ตัวอย่าง แบบฝึกทักษะพร้อมเฉลย รวม 2 แบบฝึกทักษะ คือ 1) ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) 2) ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) นักเรียนสามารถใช้แบบฝึกทักษะนี้ในชั้นเรียนและศึกษาด้วยตนเองได้

ในการจัดทำแบบฝึกทักษะให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีนี้ ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการ รองผู้อำนวยการ ผู้เชี่ยวชาญ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และคณะครูโรงเรียนชาญวิทยาทุกท่านที่ให้คำแนะนำช่วยเหลือและขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะไปทดลองใช้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะและคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำเร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ของนักเรียน ครูผู้สอน และบุคคลที่สนใจเป็นอย่างมาก ซึ่งจะช่วยยกระดับคุณภาพการศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

สายใจ ปัดภาค

สารบัญ

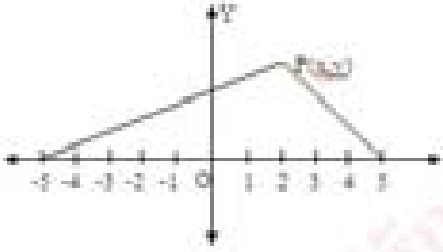
เรื่อง	หน้า
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	1
แบบทดสอบก่อนเรียน	3
จุดประสงค์การเรียนรู้	6
ไฮเพอร์โบลา	7
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ไฮเพอร์โบลา ชุดที่ 1	
ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)	9
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1.1	16
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1.2	29
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ไฮเพอร์โบลา ชุดที่ 2	
ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)	34
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2.1	43
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2.2	56
บทสรุป ไฮเพอร์โบลา	61
แบบทดสอบหลังเรียน	63
ภาคผนวก	69
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	72
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1.1	73
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1.2	78
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2.1	89

เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2.2	96
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	109
ตารางบันทึกคะแนนการทำแบบฝึกทักษะ	71
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	70
บรรณานุกรม	**68**

คุณครูสายพิน ปริกมาส

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีกลุ่มของระยะห่างจากจุดใด ๆ บน ไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (-5,0) และ (5,0) เท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟไฮเพอร์โบลามี $F(5,0)$ และ $F'(-5,0)$ เป็นจุดโฟกัส

$$\left| |PF'| - |PF| \right| = 6$$

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2} - \sqrt{(x-5)^2+y^2} = 6$$

$$\sqrt{(x+5)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $(x+5)^2+y^2 = 36-(x-5)^2+y^2+12\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

$$x^2+10x+25+y^2 = 36+12\sqrt{(x-5)^2+y^2} \quad +x^2$$

$$-10x+25+y^2$$

$$20x-36 = 12\sqrt{(x-5)^2+y^2}$$

นำ 4 ทารดสอด $5x-9 = 3\sqrt{(x-5)^2+y^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $25x^2-90x+81 = 9(x^2-10x+25+y^2)$

$$25x^2-90x+81 = 9x^2-90x+225+9y^2$$

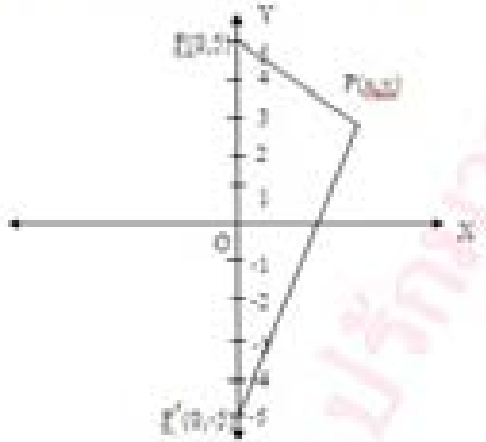
$$16x^2-9y^2 = 144$$

นำ 144 ทารดสอด $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16} = 1$

$\therefore$ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16} = 1$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีผลต่างของระยะทำของทุกจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปถึงจุด (0,-5) และ (0,5) เท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟไฮเพอร์โบลามี $F(0,5)$ และ $F'(0,-5)$ เป็นจุดโฟกัส

$$\left| |PF'| - |PF| \right| = 6$$

$$\sqrt{x^2+(y+5)^2} - \sqrt{x^2+(y-5)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2+(y+5)^2} = 6 + \sqrt{x^2+(y-5)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $y^2+10y+25+x^2 = 36+12\sqrt{x^2+(y-5)^2}+x^2+(y-5)^2$

$$x^2+10x+25+y^2 = 36+12\sqrt{x^2+(y-5)^2}+x^2+y^2-10y+25$$

$$\therefore\ 20y-36 = 12\sqrt{x^2+(y-5)^2}$$

นำ 4 หารตลอด $5y-9 = 3\sqrt{x^2+(y-5)^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง $25y^2-90y+81 = 9(x^2+y^2-10y+25)$

$$25y^2-90y+81 = 9x^2+9y^2-90y+225$$

$$16y^2-9x^2 = 144$$

นำ 144 หารตลอด $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16} = 1$

$\therefore$ สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16} = 1$

9. $36y^2 - 4x^2 - 144 = 0$

10. $25y^2 - 100x^2 - 2500 = 0$

3. $25x^2 - 16y^2 - 400 = 0$

4. $20x^2 - 16y^2 - 320 = 0$

5. $x^2-y^2-100=0$

6. $y^2-9x^2-36=0$

แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1.1

จงหาสมการของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ผลต่างของระยะทำจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (-10,0) และ (10,0) เท่ากับ 16 หน่วย

วิธีทำ ผลต่างของระยะทำจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 2a

ดังนั้น $2a = 16 \therefore a = 8$

2. ผลต่างของระยะทำจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (2,0) และ (-2,0) เท่ากับ 1 หน่วย

วิธีทำ ผลต่างของระยะทำจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 2a

ดังนั้น $2a = 1 \therefore a = \frac{1}{2}$

3. กลล่างของระยะห่างจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุด (0,2) และ (0,-2) เท่ากับ 6 หน่วย

4. จุดโฟกัสอยู่ที่ (0,-10) และ (0,10) และมีจุดยอดอยู่ที่ (0,-4) และ (0,4)

5. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (0,2) โดยมีจุด (2,0) เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนสังยุค

6. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (4,0) และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ (-2,0)

7. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ (-7,0) และจุดปลายด้านหนึ่งของแกนสังยุคอยู่ที่ (0,2)

8. แกนตามขวางอยู่ในแนวแกน y ยาว 8 หน่วย และแกนสังยุคยาว 6 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0)

9. จุดยอดอยู่ที่ (0,-3) และ (0,3) และกราฟของไฮเพอร์โบลาท่านจุด (3,$3\sqrt{2}$)

10. จุดยอดอยู่ที่ (4,0) และ (-4,0) และกราฟของไฮเพอร์โบลาท่านจุด (3,2)

ตัวอย่างที่ 3 จากสมการไฮเพอร์โบลา จากจุดยอด จุดโฟกัส และเขียนกราฟ

1. $9x^2-4y^2-36 = 0$

วิธีทำ สมการ $9x^2-4y^2 = 0$

$9x^2-4y^2 = 36$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ (หาร 36 ตลอดทั้งสมการ)

เขียนให้อยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ดังนั้น $a^2 = 4$; $b^2 = 9$

$\therefore$ $a = \pm 2$; $b = \pm 3$

ดังนั้นไฮเพอร์โบลานี้ $(x,0)$ และ $(-x,0)$ เป็นจุดโฟกัสเสมอ

$c^2 = a^2+b^2$

$c^2 = 4+9$

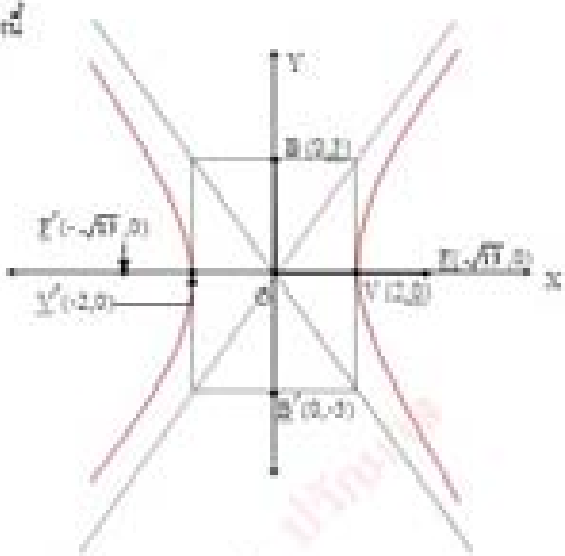
$c^2 = 13$

$c = \pm\sqrt{13}$

จากสมการ แกนตามขวางอยู่บนแกน X และมีจุดศูนย์กลางที่ (0,0)

$\therefore$ จุดยอดอยู่ที่ V(2,0) และ V'(-2,0)

จุดโฟกัส อยู่ที่ F($\sqrt{13}$,0) และ F'($-\sqrt{13}$,0)


Y
B(0,1)
F'(-√17,0)
F(√17,0)
X
X'(-2,0)
O
V(2,0)
B'(0,-1)
X

2. $x^2-9y^2-36=0$

วิธีทำ จากสมการ $4x^2-9y^2-36 = 0$

$4x^2-9y^2 = 36$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4} = 1$ (นำ 36 หารตลอด)

เขียนให้อยู่ในรูปสมการ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$

ได้ $a=\pm3$, $b=\pm2$ และ $c^2 = a^2+b^2$

$c^2 = 9+4$

$c^2 = 13$

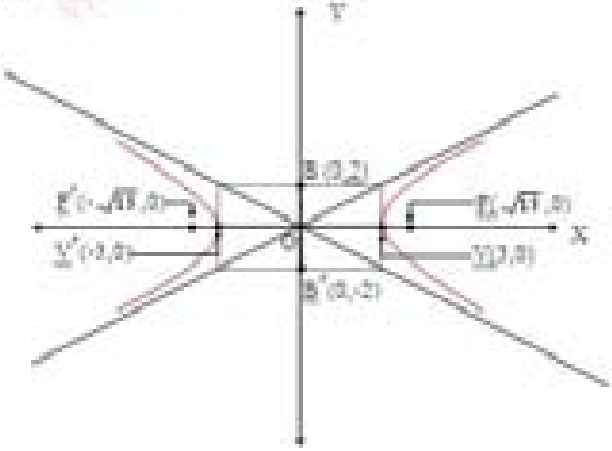
$c = \pm\sqrt{13}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และสมการอยู่ในรูปแบบ X

จุดยอด คือ (3,0) และ (-3,0)

จุดโฟกัส คือ $(\sqrt{13},0)$ และ $(-\sqrt{13},0)$

เขียนกราฟได้ดังนี้



3. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$

$16x^2 - 25y^2 = 400$

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ (หาร 400 ทั้งสองข้าง)

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ได้ $a = \pm 5$, $b = \pm 4$ และ $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 25 + 16$

$c^2 = 41$

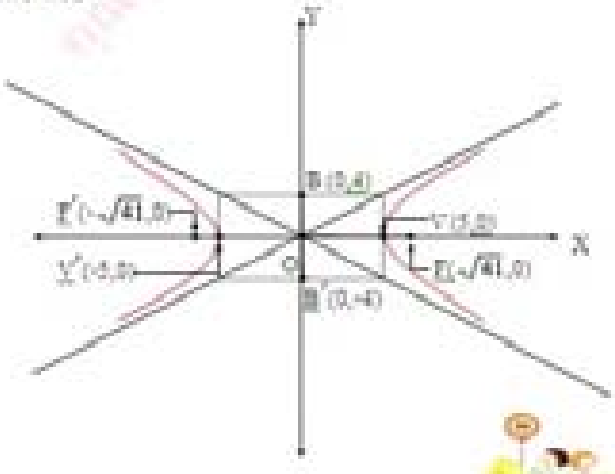
$c = \pm\sqrt{41}$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และกราฟอยู่ในแนวแกน X

จุดยอด คือ (5,0) และ (-5,0)

จุดโฟกัส คือ $(\sqrt{41},0)$ และ $(-\sqrt{41},0)$

เขียนกราฟได้ดังนี้



4. $20y^2 - 16x^2 - 320 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $20y^2 - 16x^2 - 320 = 0$

$$20y^2 - 16x^2 = 320$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1 \text{ (นำ 320 หารตลอด)}$$

เมื่อเทียบสมการจะได้ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ได้ $a = \pm 4$, $b = \pm 2\sqrt{5}$ และ $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 16 + 20$$

$$c^2 = 36$$

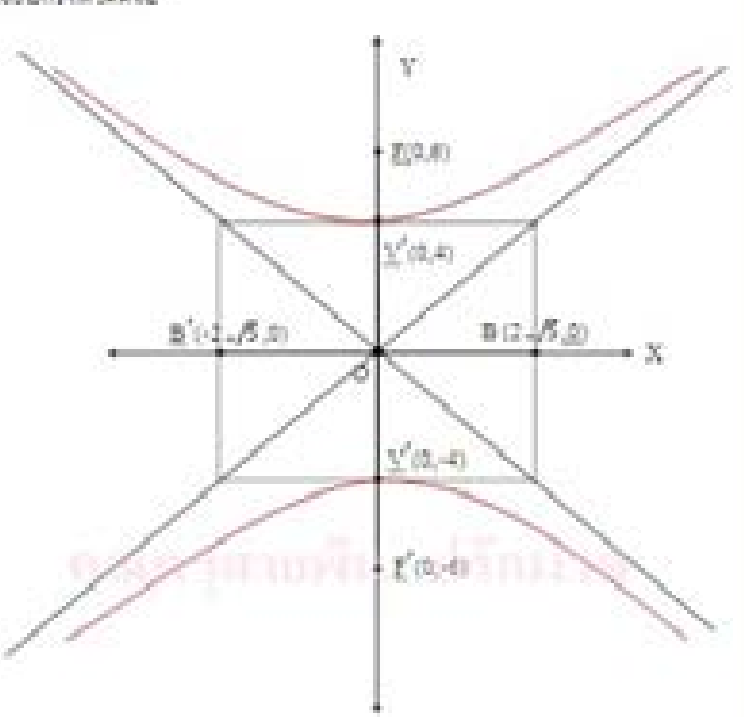
$$c = \pm 6$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y

จุดยอด คือ (0,4) และ (0,-4)

จุดโฟกัส คือ (0,6) และ (0,-6)

พิจารณาเทียบได้ดังนี้



5. $y^2 - x^2 - 16 = 0$

ให้ทำ จากสมการ $y^2 - x^2 - 16 = 0$

$$y^2 - x^2 = 16$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1 \text{ (นำ 16 ทารตลอด)}$$

เปรียบเทียบสมการจะได้ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ได้ $a = \pm 4$, $b = \pm 4$ และ $c^2 = a^2 - b^2$

$$c^2 = 16 - 16$$

$$c^2 = 32$$

$$c = \pm 4\sqrt{2}$$

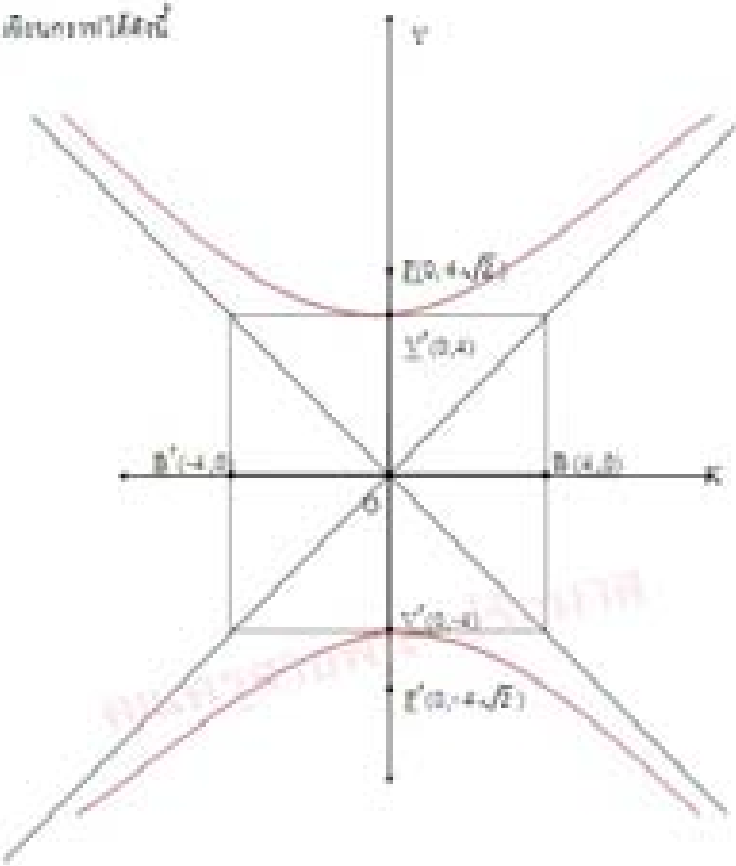
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) แกนตามขวางอยู่บนแกน Y

จุดยอด คือ (0,4) และ (0,-4)

จุดโฟกัส คือ $(0, 4\sqrt{2})$ และ $(0, -4\sqrt{2})$

คุณครูสายพิน ปริมาส

เขียนกราฟได้ดังนี้



แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1.2

จากสมการไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด และจุดโฟกัส และเขียนกราฟ

1. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

วิธีทำ จาก $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$

$4x^2 - 9y^2 = 36$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (หาร 36 ทุกพจน์ทั้งสองข้าง)

2. $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

วิธีทำ จาก $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

$9x^2 - 16y^2 = 144$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (หาร 144 ทุกพจน์ทั้งสองข้าง)

7. $9y^2 - 36x^2 - 324 = 0$

8. $4y^2 - 25x^2 - 100 = 0$