แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

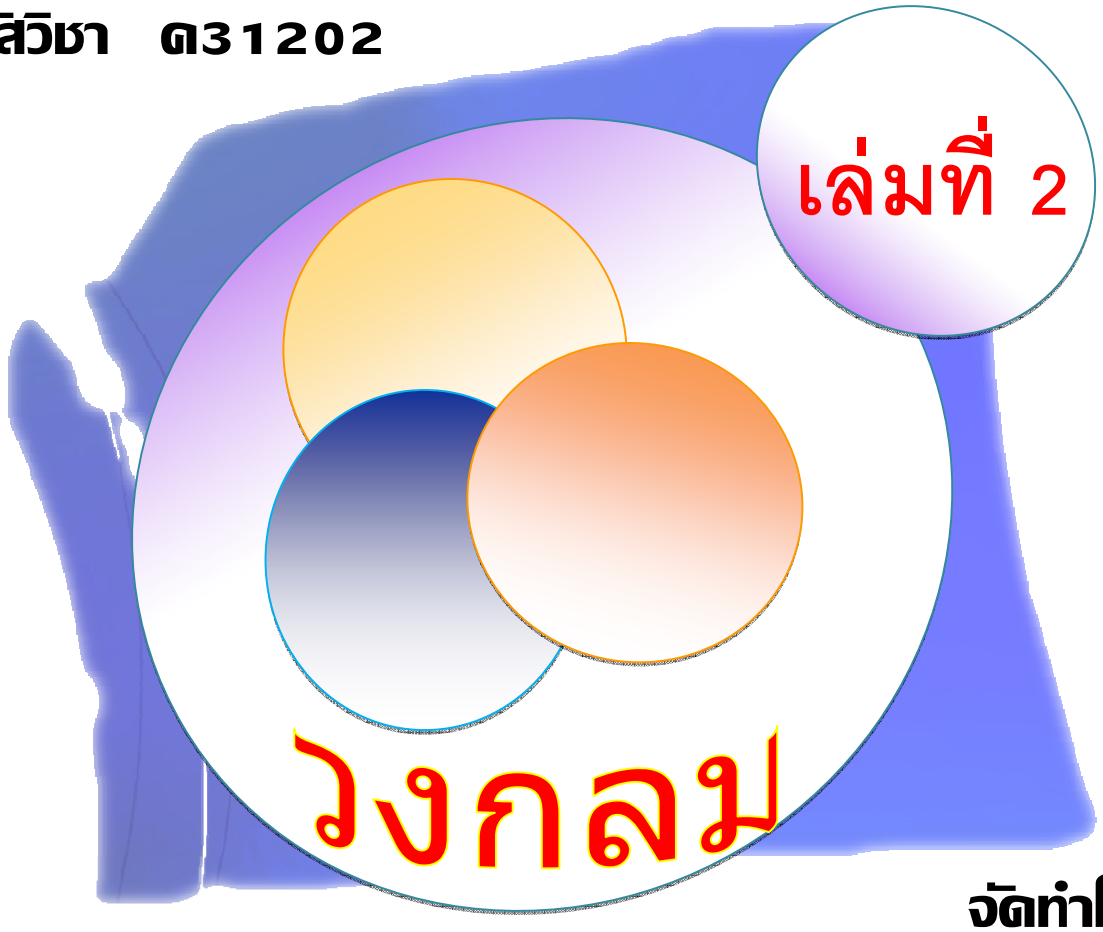
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ภาคตัดกรวย

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

รหัสวิชา ค31202



จัดทำโดย

นางสายพิน ปรักมาส

โรงเรียนขาณุวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41

คำนำ

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในการเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนมีทัศนคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาสาระ ตัวอย่าง แบบฝึกทักษะพร้อมทั้งเฉลย รวม 3 แบบฝึก คือ

1) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)
2) วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)
3) สมการวงกลมในรูปทั่วไป

นักเรียนสามารถใช้แบบฝึกทักษะทั้งในชั้นเรียนและศึกษาเพิ่มเติมด้วยตนเองได้

ในการจัดทำแบบฝึกทักษะได้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีนี้ ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการ รองผู้อำนวยการ ผู้เชี่ยวชาญ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และคณะครู นักเรียน โรงเรียนขาณุวิทยาทุกท่านที่ให้คำแนะนำช่วยเหลือ และขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะไปทดลองใช้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะและคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำเร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ของนักเรียน ครูผู้สอน และบุคลที่สนใจเป็นอย่างมาก ซึ่งจะช่วยยกระดับคุณภาพการศึกษาในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

สายพิน ปรักมาส

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
จุดประสงค์การเรียนรู้	1
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	2
แบบทดสอบก่อนเรียน	4
วงกลม	7
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ วงกลม ชุดที่ 1	
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)	8
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1	12
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ วงกลม ชุดที่ 2	
วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)	16
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2	23
วงกลมในรูปทั่วไป	27
แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3	31
บทสรุปวงกลม	35
แบบทดสอบหลังเรียน	37
ภาคผนวก	**40**
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	41
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1	42
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 2	47
เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 3	52

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน 61

ตารางบันทึกคะแนนการทำแบบฝึกทักษะ 62

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน 63

บรรณานุกรม **64**

จุดประสงค์การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่องวงกลม

สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่เป็นวงกลม สมการวงกลม

และกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และ (h,k) ได้

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

1. ง
2. ก
3. ค
4. ก
5. ก
6. ข
7. ค
8. ข
9. ข
10. ก

ตารางบันทึกคะแนน

การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่องวงกลม

ชื่อ.....นามสกุล .....

โรงเรียน.....ชั้น.....เลขที่.....

.

แบบทดสอบ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ทำได้	หมายเหตุ
ก่อนเรียน	10		
หลังเรียน	10		
ผลการพัฒนา			

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ทำได้	หมายเหตุ
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1	10		
แบบฝึกทักษะชุดที่ 2	10		
แบบฝึกทักษะชุดที่ 3	10		

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

แบบฝึกทักษะ เล่มที่ ..... เรื่อง.....

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ทีละข้อ แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องตัวเลือก ก ข ค ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ในกระดาษคำตอบ

ทดสอบก่อนเรียน						ทดสอบหลังเรียน				
ข้อ	ก	ข	ค	ง		ข้อ	ก	ข	ค	ง
1						1				
2						2				
3						3				
4						4				
5						5				
6						6				
7						7				
8						8				
9						9				
10						10				
รวมคะแนน						รวมคะแนน				

บรรณานุกรม

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2549). **แบบฝึกคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4.** กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

รังสรรค์ มณีเล็ก และ สุนันท์ ปัทมพรหม. (2549). **สื่อการเรียนรู้สาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์วัฒนาพานิช.

สงบ ศิริบูรณ์ และ วัลลภา บุญวิเศษ. **แบบฝึกการเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ม.4 เล่ม 2.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ มัลติมีเดีย พับลิเซอร์ส.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน (2545). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ม.4.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ม.4.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค.

สุชิน ทำมาหากิน. **คู่มือ ENTRANCE ระบบใหม่คณิตศาสตร์ ม.4-5-6.** กรุงเทพมหานคร : พ.ศ.พัฒนา จำกัด.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์ และ สุเทพ ทองอยู่. **คู่มือครูคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ภูบัณฑิต.

แพทย์-วิศวะ-สถาปัตย์ จุฬาฯ,ทีมงาน. **BETA KAPPA'S MATHS ฉบับข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย.**กรุงเทพมหานคร.

จุดประสงค์การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่องวงกลม

สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่เป็นวงกลม สมการวงกลม และกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และ (h,k) ได้

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ใช้ประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องวงกลม มี 3 ชุด

ชุดที่ 1 เรื่อง วงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) รัศมี r หน่วย

ชุดที่ 2 เรื่อง วงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมี r หน่วย

ชุดที่ 3 เรื่อง สมการวงกลมในรูปทั่วไป

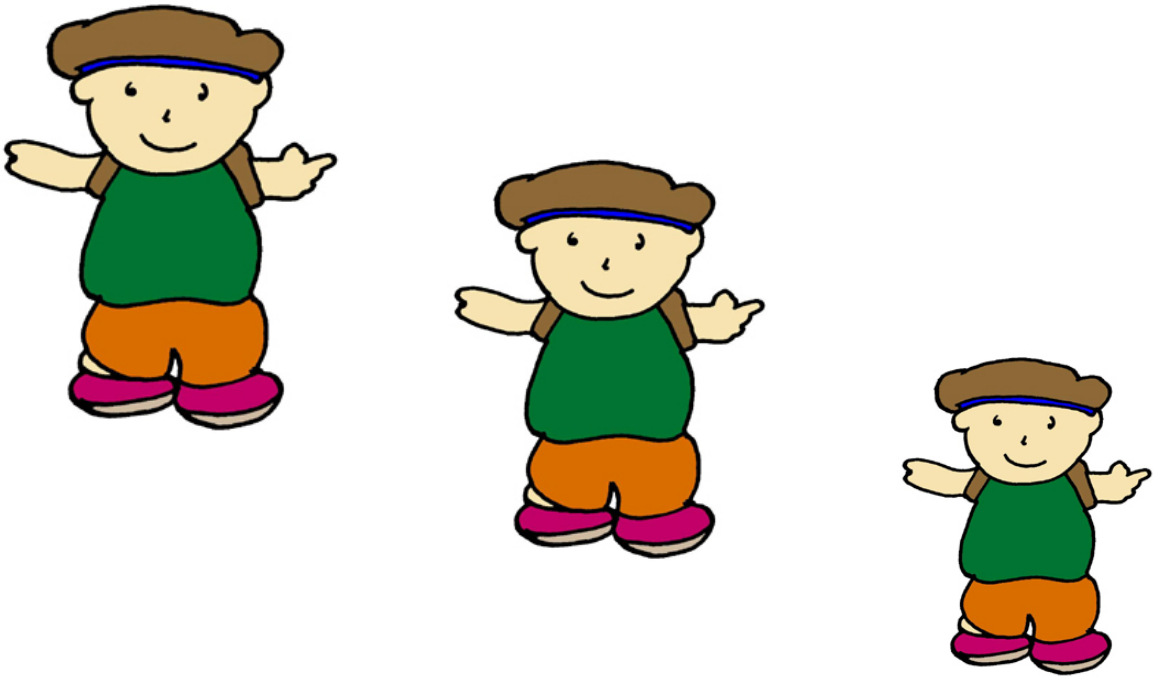
หลักการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

นักเรียนควรปฏิบัติในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน เป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ แล้วตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่มบันทึกลงในตารางบันทึกคะแนน
2. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 1 เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) ก่อนที่จะทำแบบฝึกทักษะแต่ละกิจกรรม
3. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 2 เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ก่อนที่จะทำแบบฝึกทักษะแต่ละกิจกรรม
5. ตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายเล่ม แล้วบันทึกผลการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ลงในตารางบันทึกคะแนน
6. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างในชุดที่ 3 เรื่อง สมการวงกลมในรูปทั่วไป ก่อนที่จะทำแบบฝึกทักษะแต่ละกิจกรรม
7. เมื่อบันทึกผลลงในตารางบันทึกคะแนนเสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน ซึ่งมีลักษณะเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบจำนวน 10 ข้อ
8. ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจแบบทดสอบหลังเรียนจากเฉลยท้ายเล่ม บันทึกผลที่ได้ลงในตารางบันทึกคะแนน เพื่อทราบผลการพัฒนาภายหลังการฝึกทักษะคณิตศาสตร์

ก่อนทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

นักเรียนมาทำแบบทดสอบก่อนเรียนก่อนนะคะ



แบบทดสอบก่อนเรียน

แบบฝึกทักษะกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่มที่ 2 เรื่องวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ทีละข้อ แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในกระดาษคำตอบ ก ข ค ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ในกระดาษคำตอบ ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 30 นาที

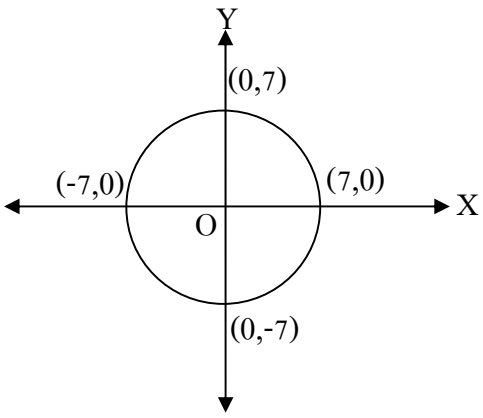
1. จากความสัมพันธ์ $\{(x,y) / x^2+y^2-16 = 0\}$ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมคือข้อใด

   ก. C(0,0) และ $r = 0$ หน่วย
   ข. C(0,0) และ $r = 4$ หน่วย
   ค. C(0,0) และ $r = 8$ หน่วย
   ง. C(0,0) และ $r = 16$ หน่วย

2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และรัศมี 6 หน่วย คือข้อใด

   ก. $x^2+y^2+6 = 0$
   ข. $x^2+y^2+36 = 0$
   ค. $x^2+y^2-6 = 0$
   ง. $x^2+y^2-36 = 0$

3. จากรูปที่กำหนดให้ สมการวงกลมคือข้อใด



   ก. $x^2+y^2-7 = 0$
   ข. $x^2+y^2+7 = 0$
   ค. $x^2+y^2-49 = 0$
   ง. $x^2+y^2+49 = 0$

4. จากความสัมพันธ์ $\{(x,y)\in R\times R \,/\, x^2+y^2+4x-6y = 3\}$ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมคือข้อใด

ก. C(-2,3) และ $r = 4$ หน่วย
ข. C(3,-2) และ $r = 4$ หน่วย
ค. C(-2,3) และ $r = 3$ หน่วย
ง. C(3,-2) และ $r = 3$ หน่วย

5. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1,-2) และรัศมี 2 หน่วย คือข้อใด

ก. $2x^2+2y^2+2x+4y-1 = 0$
ข. $2x^2+2y^2+2x-4y-2 = 0$
ค. $x^2+y^2+2x+4y+1 = 0$
ง. $x^2+y^2+2x+4y-5 = 0$

6. สมการ $x^2+y^2+4x-6y-12 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ได้ดังข้อใด

ก. $(x+2)^2+(y+5)^2 = 5^2$
ข. $(x+2)^2+(y-3)^2 = 5^2$
ค. $(x+2)^2+(y-3)^2 = 4^2$
ง. $(x+2)^2+(y-5)^2 = 4^2$

7. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-4,3) และสัมผัสแกน y คือข้อใด

ก. $x^2+y^2+8x+6y-4 = 0$
ข. $x^2+y^2+8x-6y+4 = 0$
ค. $x^2+y^2-8x+6y+9 = 0$
ง. $x^2+y^2+8x-6y+9 = 0$

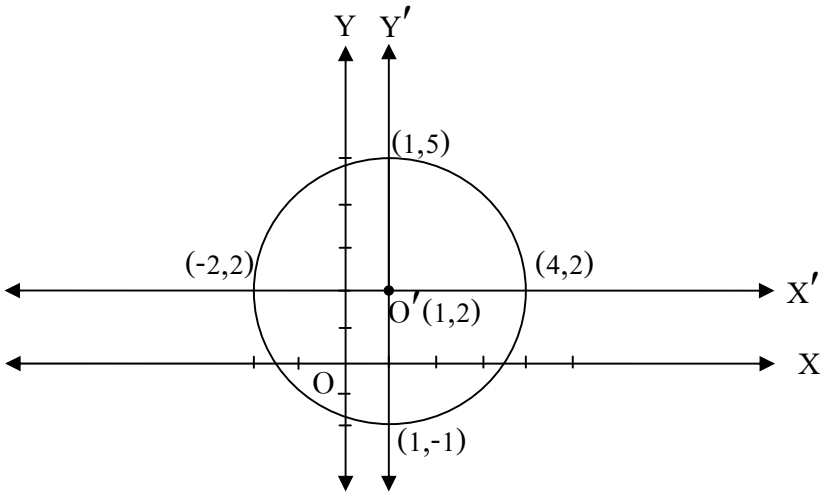
8. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,7) และผ่านจุด (24,0) คือข้อใด

ก. $x^2+y^2-14y-576 = 0$
ข. $x^2+y^2-14x+576 = 0$
ค. $x^2+y^2-14x+15 = 0$
ง. $x^2+y^2-14y-15 = 0$

9. สมการของวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-3,-5) และ (7,3) คือข้อ ใด

ก. $x^2+y^2-8x+2y+24 = 0$
ข. $x^2+y^2-4x+2y+24 = 0$
ค. $x^2+y^2-4x+2y-36 = 0$
ง. $x^2+y^2-8x+2y-36 = 0$

10. จากรูปที่กำหนดให้ สมการวงกลมคือข้อใด



ก. $(x-1)^2+(y-2)^2 = 3$

ข. $(x+1)^2+(y+2)^2 = 3$

ค. $(x+2)^2+(y+1)^2 = 9$

ง. $(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$

วงกลม (Circle)

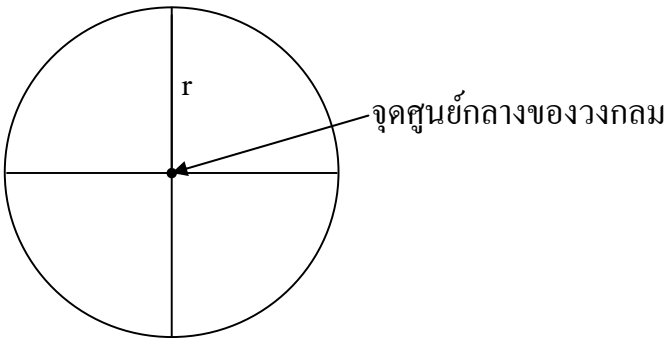
บทนิยาม

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม

จุดคงที่ คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม

เส้นรอบวง คือ เซตของจุดทุกจุดดังกล่าวที่นำมาต่อเรียงกันได้เป็นเส้นโค้งปลายปิด และจะมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของวงกลมเท่ากัน

รัศมี คือ ความยาวของเส้นตรง ที่ลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปยังเส้นรอบวงของวงกลม



หมายเหตุ จะหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมได้ ต้องทราบจุดศูนย์กลางและรัศมี

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

วงกลม

ชุดที่ 1

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0)

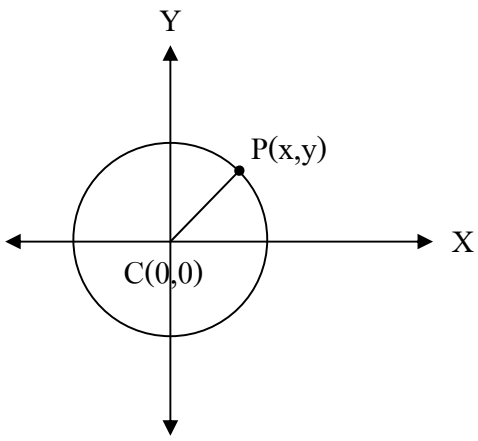
และรัศมี r หน่วย

1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย

ทฤษฎีบทที่ 1.1 สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(0,0) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $x^2 + y^2 = r^2$

พิสูจน์



ให้จุด P(x,y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม

จากนิยาม $|CP| = r$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 4 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2+y^2=r^2$

และ $r = 4$ คือ $x^2+y^2 = 4^2$

$x^2+y^2 = 16$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 16\}$ □

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 10 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2+y^2=r^2$

และ $r = 4$ คือ $x^2+y^2 = 4^2$

$x^2+y^2 = 16$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 16\}$ □

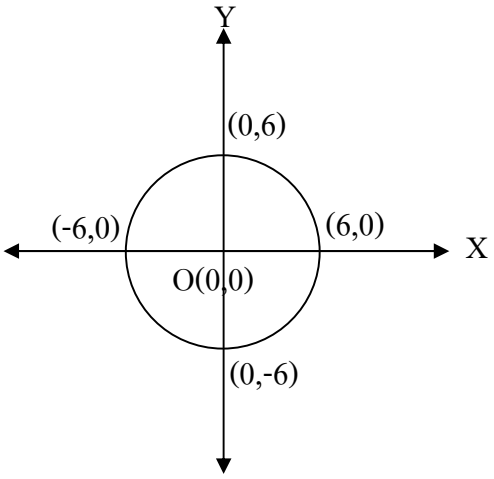
ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 36\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2+y^2 = 36$

$x^2+y^2 = 6^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 6 หน่วย



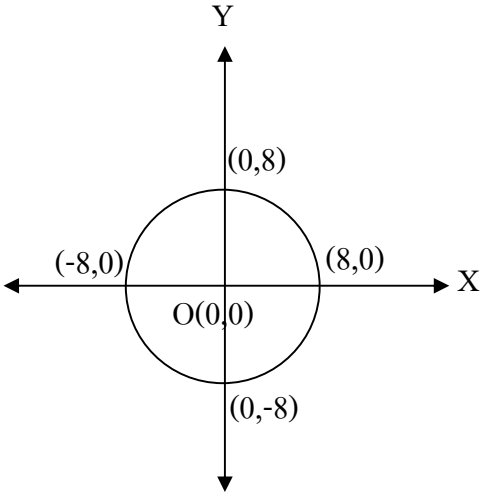
2. $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 - 64 = 0\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2 + y^2 - 64 = 0$

$$x^2 + y^2 = 64$$

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 8 หน่วย



แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย

1. จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 9 หน่วย

.....

.....

.....

.....

1.2 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 12 หน่วย

.....

.....

.....

.....

1.3 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 7 หน่วย

.....

.....

.....

.....

1.4 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และเส้นผ่าศูนย์กลาง 18 หน่วย

.....

.....

.....

.....

1.5 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และเส้นผ่าศูนย์กลาง 24 หน่วย

.....

.....

.....

.....

2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 = 25\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 = 5^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

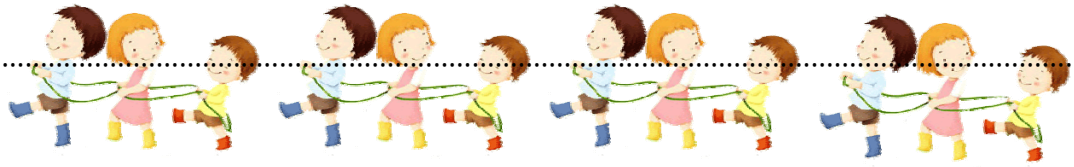
.....

.....

.....

.....

.....



2.2 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 = 29\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 = 169\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 - 225 = 0\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 - 121 = 0\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

วงกลม

ชุดที่ 2

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k)

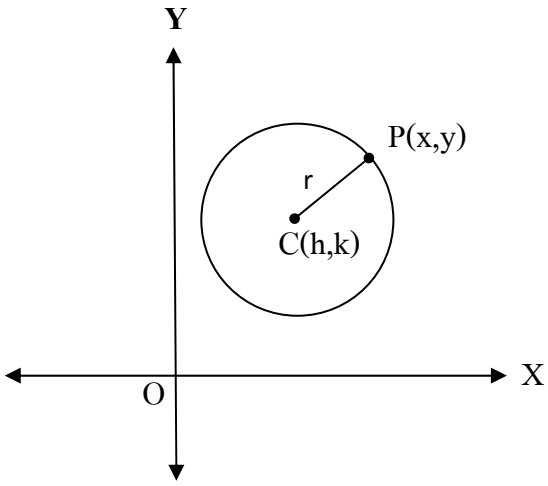
และรัศมี r หน่วย

2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

ทฤษฎีบทที่ 1.2 สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

พิสูจน์



วิธีที่ 1 ให้จุด P(x,y) เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ

จากนิยาม $|CP| = r$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

□

วิธีที่ 2 เลื่อนแกนไปที่จุด C จะได้พิกัดใหม่ของจุด C และ P คือ C (0,0) และ $P(x',y')$ สมการของวงกลมใหม่ คือ $(x')^2+(y')^2 = r^2$

แต่ $x' = x-h$ และ $y' = y-k$

เพราะฉะนั้น สมการของวงกลมนี้เทียบกับสมการเดิม คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

□

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(-5,3) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(-5,3) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

ได้ $h = -5,\ k = 3\ ,\ r = 3$

นั่นคือ $(x-(-5))^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 9$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+5)^2 + (y-3)^2 = 9\}$ □

2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(-2,-4) และรัศมีเท่ากับ 2 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(-2,-4) และรัศมีเท่ากับ 2 หน่วย

ได้ $h = -2,\ k = -4\ ,\ r = 2$

นั่นคือ $(x-(-2))^2+(y-(-4))^2 = 2^2$

$(x+2)^2+(y+4)^2 = 4$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+2)^2+(y+4)^2 = 4\}$ □

3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(5,8) และรัศมีเท่ากับ 7 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(5,8) และรัศมีเท่ากับ 7 หน่วย

ได้ $h = 5,\ k = 7\ ,\ r = 7$

นั่นคือ $(x-5))^2 + (y-7)^2 = 7^2$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 49\}$ □

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ซึ่งเป็นวงกลมต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5^2\}$

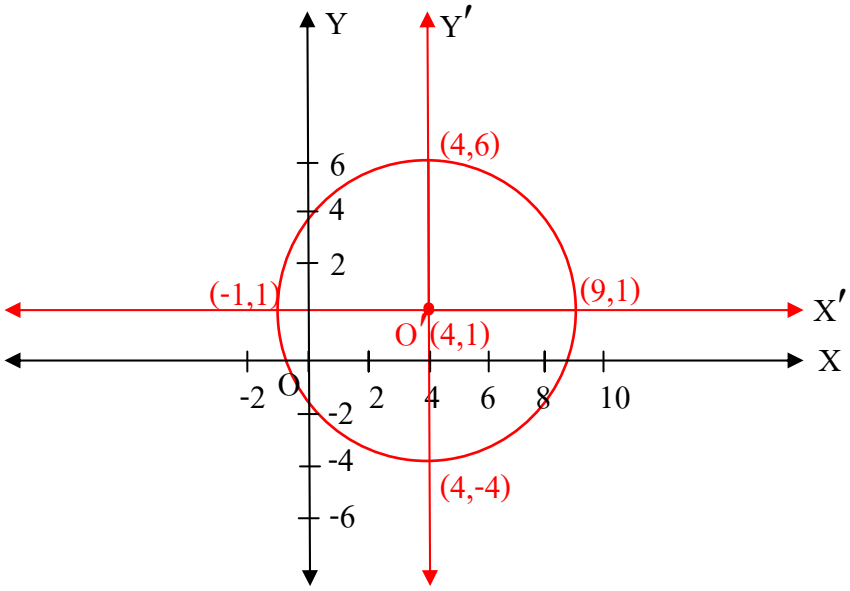
วิธีทำ ความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k)

และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\}$

จาก $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-4)^2 + (y-1)^2 = 5^2\}$

ได้ จุดศูนย์กลาง (h,k) = (4,1) รัศมีเท่ากับ 5 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



2. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2\}$

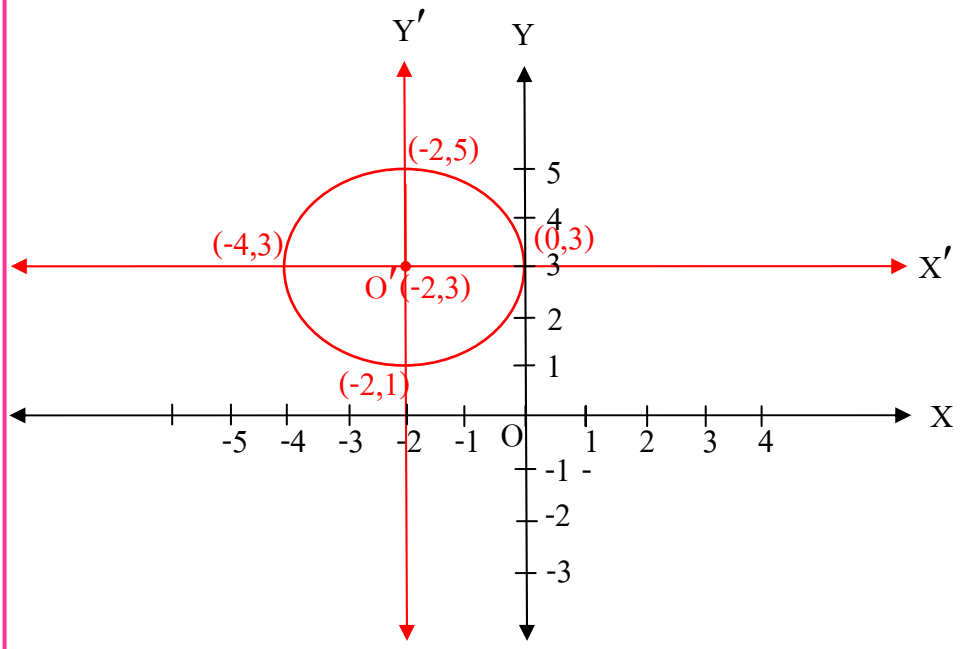
วิธีทำ ความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k)

และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\}$

จาก $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2\}$

ได้ จุดศูนย์กลาง (h,k) = (-2,3) รัศมีเท่ากับ 2 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



3. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-4)^2 + (y-2)^2 = 16\}$

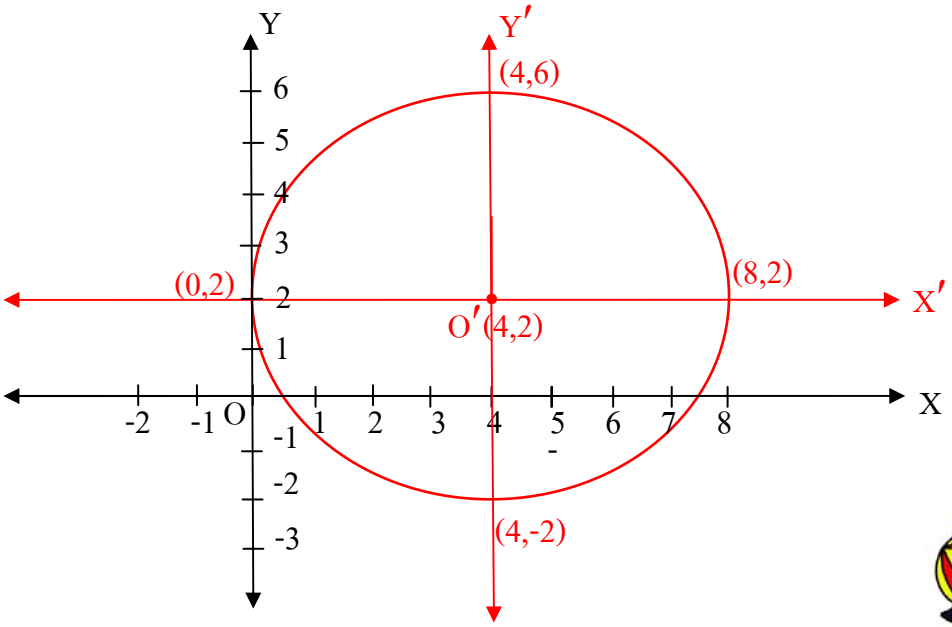
วิธีทำ ความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k)

และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\}$

จาก $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4^2\}$

ได้ จุดศูนย์กลาง (h,k) = (4,2) รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย

ได้กราฟดังรูป



4. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+3)^2 + (y+1)^2 = 12\}$

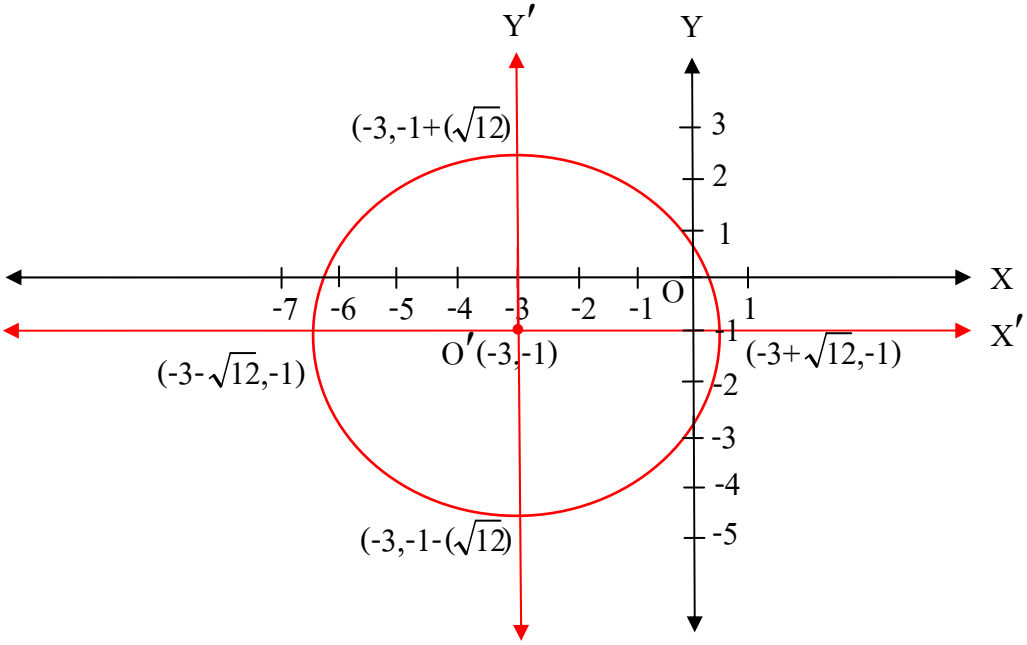
วิธีทำ ความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k)

และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\}$

จาก $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x+3)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{12})^2\}$

ได้ จุดศูนย์กลาง (h,k) = (-3,-1) รัศมีเท่ากับ $(\sqrt{12})$ หน่วย

ได้กราฟดังรูป



5. $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9\}$

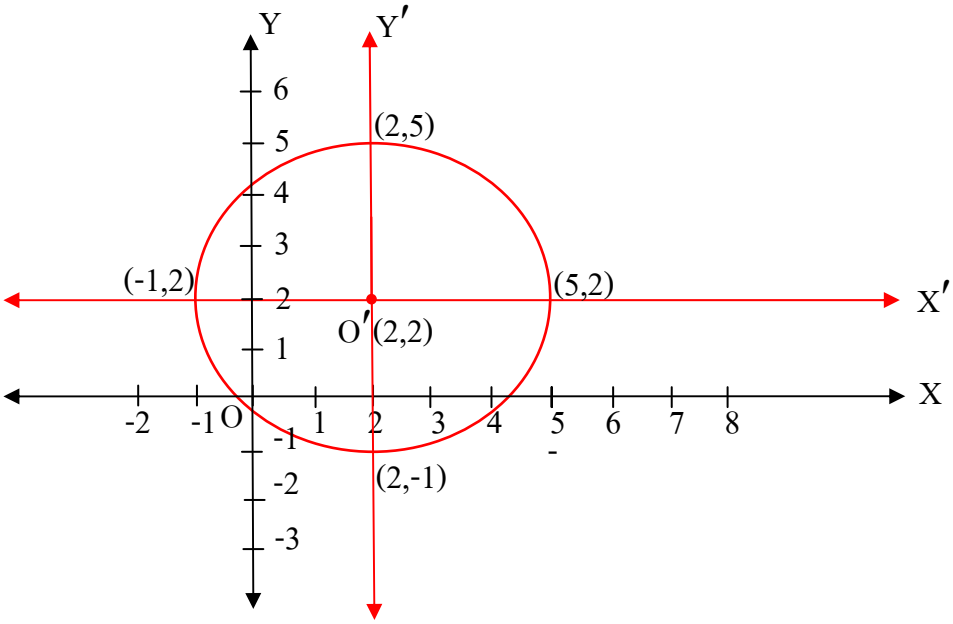
วิธีทำ ความสัมพันธ์ของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k)

และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\}$

จาก $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-2)^2 + (y-2)^2 = 3^2\}$

ได้ จุดศูนย์กลาง (h,k) = (2,2) รัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

ได้กราฟดังรูป


Y
Y′
6
5
4
3
2
1
(2,5)
(-1,2)
(5,2)
X′
O′(2,2)
X
-2
-1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
-1
-2
-3
(2,-1)

แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(1,2) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(1,2) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

ได้ $h = 1,\ k = 2\ ,\ r = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(3,-1) และรัศมีเท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(3,-1) และรัศมีเท่ากับ 6 หน่วย

ได้ $h = 3,\ k = -1\ ,\ r = 6$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 มีจุด (1,2) และ (4,5) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(4,-1) และผ่านจุด A(-1,3)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.5 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2,3) และสัมผัสเส้นตรง $3x+4y-6=0$

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาสมการวงกลมเมื่อกำหนดรัศมี (r) และจุดศูนย์กลาง C(h,k) โดยใช้สูตร

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

2.1 $r = 2$, $C(3,4)$

วิธีทำ $(x-3)^2+(y-4)^2 = 2^2$

$(x^2-6x+9)+(y^2-8y+16) = 4$

$x^2+y^2-6x-8y+9+16+4 = 0$

.....

.....

2.2 $r = 4$, $C(-2,-4)$

วิธีทำ $(x-(-2))^2+(y-(-4))^2 = 4^2$

$(x+2)^2+(y+4)^2 = 16$

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 $r = 7$, $C(2,-3)$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 $r = \sqrt{17}$, C(-4,3)

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C(0,-\frac{3}{2})$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. สมการวงกลมในรูปทั่วไป

สมการวงกลมในรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = r^2$

มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ รัศมียาว $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย

1. ถ้า $D^2+E^2-4F > 0$ กราฟเป็นวงกลม มีรัศมียาว $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$
2. ถ้า $D^2+E^2-4F = 0$ กราฟเป็นจุด
3. ถ้า $D^2+E^2-4F < 0$ กราฟวงกลมจินตภาพ

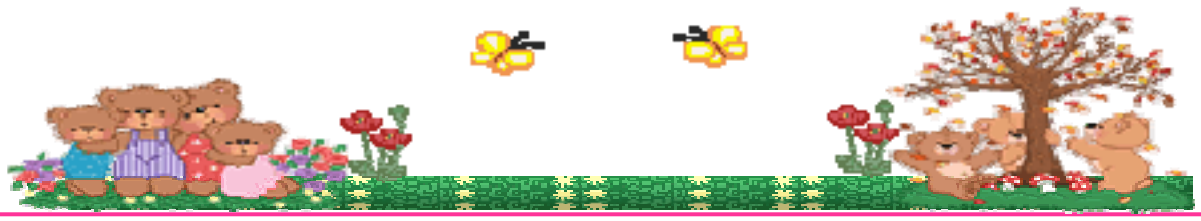
ตัวอย่าง กำหนดสมการวงกลมในรูป $x^2+y^2+Dx+Ey+F = r^2$ จงเขียนสมการในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ พร้อมทั้งบอกรัศมี จุดศูนย์กลาง และเขียนกราฟของวงกลม

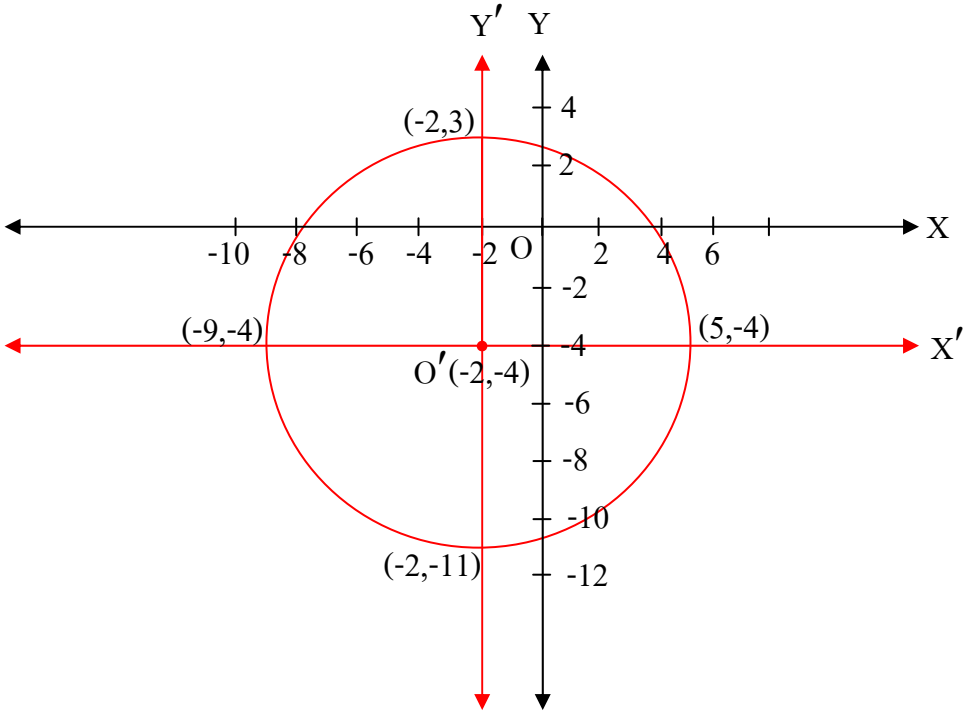
1. $x^2+y^2+4x+8y-29 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+4x+8y-29 = 0$$
$$(x^2+4x)+(y^2+8y) = 29$$
$$(x^2+4x+2^2)+(y^2+8y+4^2) = 29+4+16$$
$$(x+2)^2+(y+4)^2 = 49$$
$$(x+2)^2+(y+4)^2 = 7^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-2,-4) รัศมีเท่ากับ 7 หน่วย





2. $x^2+y^2-8x-2y+8 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-8x-2y+8 = 0$$

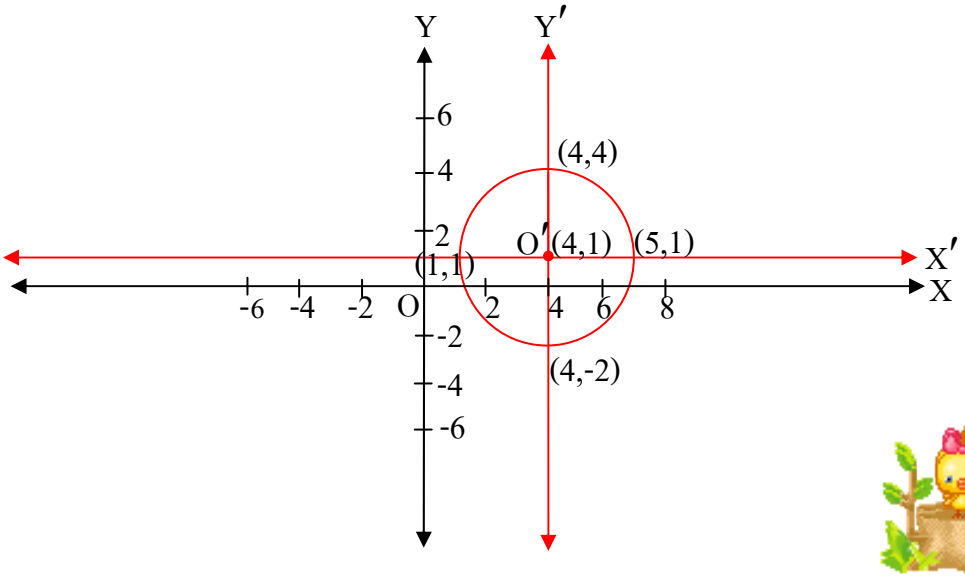
$$(x^2-8x)+(y^2-2y) = -8$$

$$(x^2-8x+4^2)+(y^2-2y+1^2) = -8+16+1$$

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = 9$$

$$(x-4)^2+(y-1)^2 = 3^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (4,1) รัศมีเท่ากับ 3 หน่วย



3. $x^2+y^2-6x+6y-7 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-6x+6y-7 = 0$$

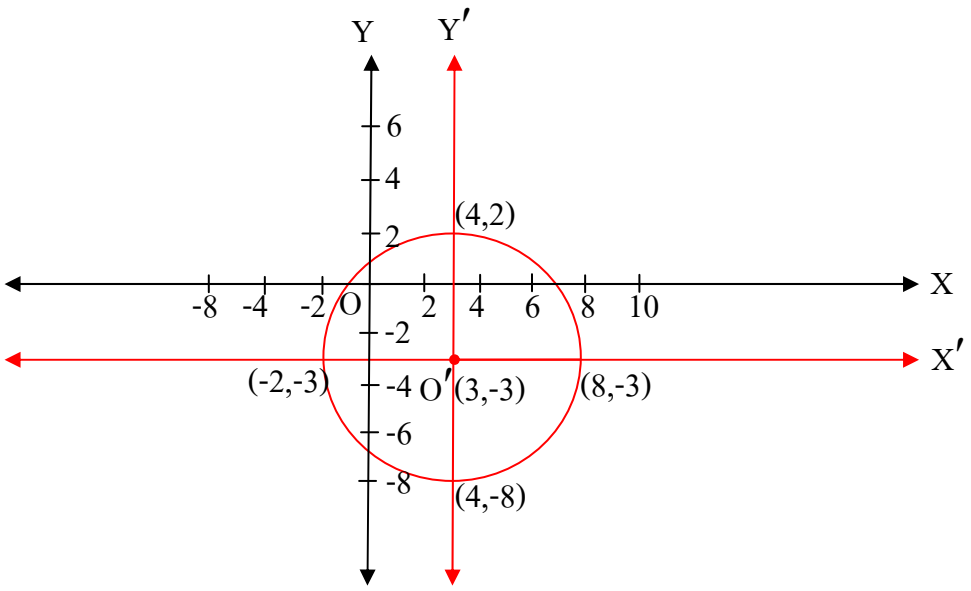
$$(x^2-6x)+(y^2+6y) = 7$$

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2+6y+3^2) = 7+9+9$$

$$(x-3)^2+(y+3)^2 = 25$$

$$(x-3)^2+(y+3)^2 = 5^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (3,-3) รัศมีเท่ากับ 5 หน่วย



4. $x^2+y^2-6x+2y-3 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-6x+2y-6 = 0$$

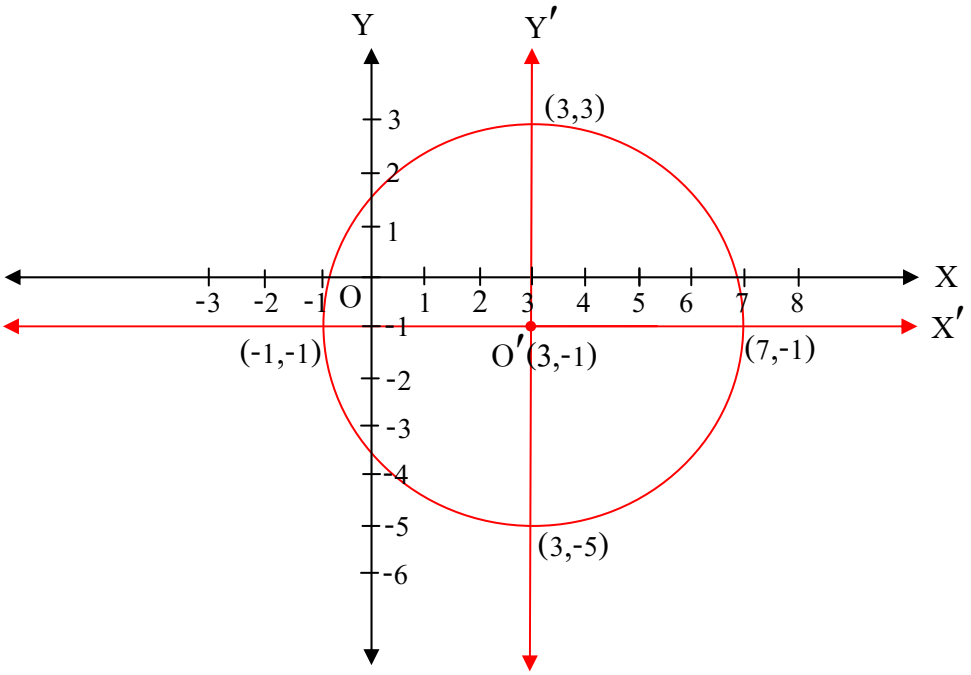
$$(x^2-6x)+(y^2+2y) = 6$$

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2+2y+1^2) = 6+9+1$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 16$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = 4^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (3,-1) รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย



5. $x^2+y^2+4x-2y-19 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+8x-2y-19 = 0$$

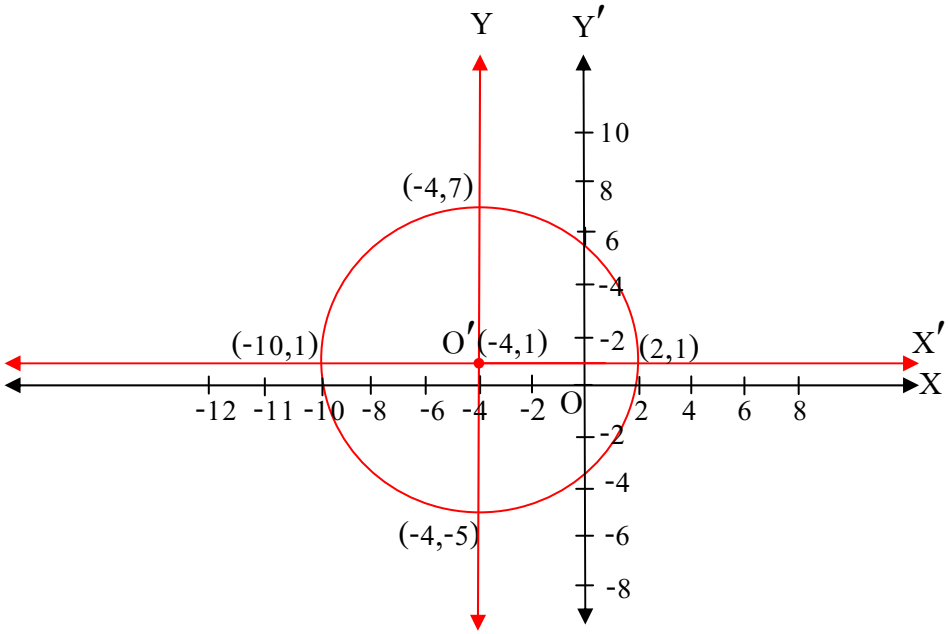
$$(x^2+8x)+(y^2-2y) = 19$$

$$(x^2+8x+4^2)+(y^2-2y+1^2) = 19+16+1$$

$$(x+4)^2+(y-1)^2 = 36$$

$$(x+4)^2+(y-1)^2 = 6^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-4,1) รัศมีเท่ากับ 6 หน่วย



แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3

จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมีและเขียนกราฟของวงกลมต่อไปนี้

1. $x^2+y^2+2x-4y+1 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+2x-4y+1 = 0$$

$$(x^2+2x)+(y^2-4y) = -1$$

$$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2) = -1+1+4$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $x^2+y^2+6x+4y-12 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+6x+4y-12 = 0$$

$$(x^2+6x)+(y^2+4y) = 12$$

$$(x^2+6x+3^2)+(y^2+4y+2^2) = 12+9+4$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $x^2+y^2-4x+8y+11 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. $x^2+y^2+6x+6y-46 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. $x^2+y^2-6x+4y = 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. $2x^2+2y^2-8x+4y-22 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. $x^2+y^2-6x-8y+21=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

8. $x^2+y^2+4x+8y+4=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

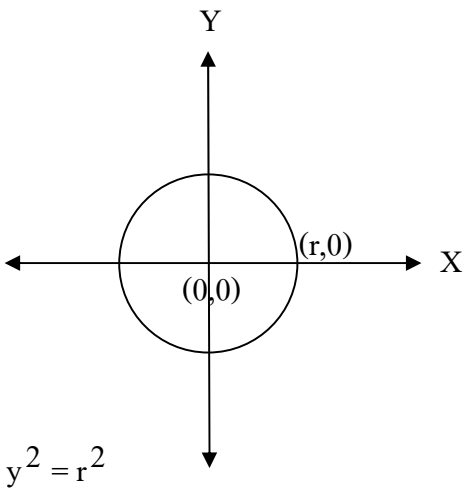
.....

.....

.....

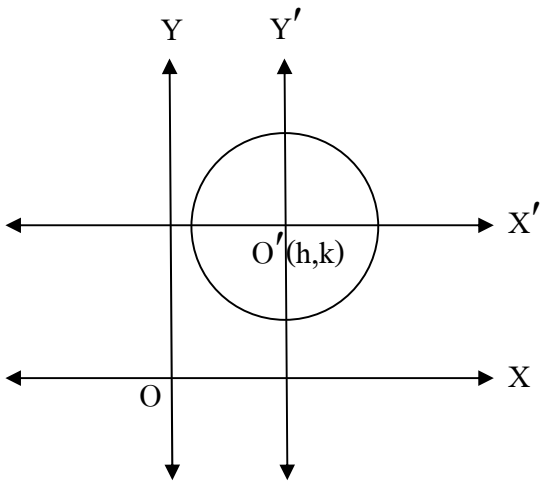
บทสรุป วงกลม

1. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และรัศมี r หน่วย



สมการคือ $x^2 + y^2 = r^2$

2. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) และรัศมี r หน่วย



สมการคือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

3. สมการวงกลมในรูปทั่วไป

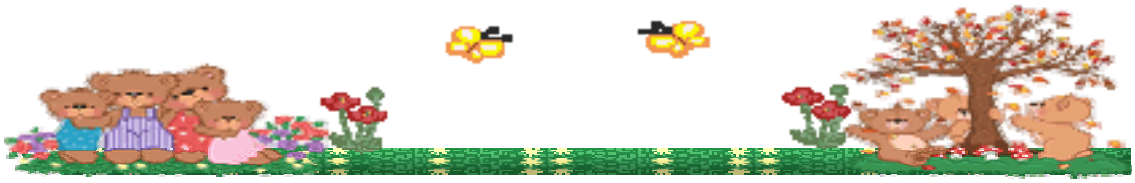
สมการคือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

จะมีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ รัศมียาว $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย

1. ถ้า $D^2+E^2-4F > 0$ กราฟเป็นวงกลม มีรัศมียาว $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ หน่วย
2. ถ้า $D^2+E^2-4F = 0$ กราฟเป็นจุด
3. ถ้า $D^2+E^2-4F < 0$ เป็นวงกลมจินตภาพ

ข้อสังเกต

1. $r < 0$ ไม่เกิดวงกลมหรือวงกลมจะมีรัศมีที่ไม่เป็นจำนวนจริง
2. $r = 0$ จะเป็นจุดที่มีพิกัด (h,k)
3. $r > 0$ จะเป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (h,k) รัศมี r หน่วย
4. สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 ต้องเท่ากันและเมื่อจัดรูปสมการแล้ว จะได้ $ax^2 + ay^2 = r^2$ เมื่อ $a > 0$



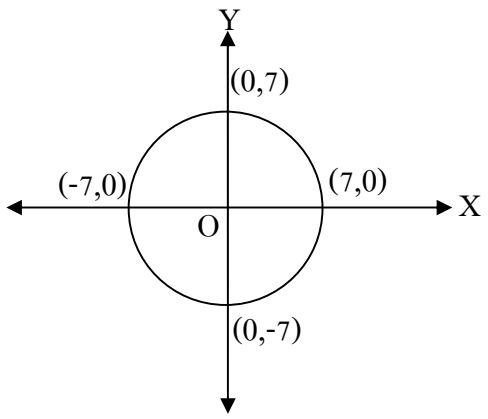
แบบทดสอบหลังเรียน

แบบฝึกทักษะกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่มที่ 2 เรื่องวงกลม

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ทีละข้อ แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องตัวเลือก ก ข ค ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวในกระดาษคำตอบ ใช้เวลาในการทำแบบทดสอบ 30 นาที

1. จากรูปที่กำหนดให้ สมการวงกลมคือข้อใด



ก. $x^2+y^2-7 = 0$ ข. $x^2+y^2+7 = 0$

ค. $x^2+y^2+49 = 0$ ง. $x^2+y^2-49 = 0$

2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) และรัศมี 6 หน่วย คือข้อใด

ก. $x^2+y^2-36 = 0$ ข. $x^2+y^2+36 = 0$

ค. $x^2+y^2-6 = 0$ ง. $x^2+y^2+6 = 0$

3. จากความสัมพันธ์ $\{(x,y) / x^2+y^2-16 = 0\}$ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมคือข้อใด

ก. C(0,0) และ r = 16 หน่วย

ข. C(0,0) และ r = 8 หน่วย

ค. C(0,0) และ r = 4 หน่วย

ง. C(0,0) และ r = 0 หน่วย

4. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-4,3) และสัมผัสแกน y คือข้อใด

ก. $x^2+y^2+8x-6y+9 = 0$

ข. $x^2+y^2-8x+6y+9 = 0$

ค. $x^2+y^2+8x+6y-4 = 0$

ง. $x^2+y^2+8x-6y+4 = 0$

5. สมการของวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-3,-5) และ (7,3) คือข้อ ใด

ก. $x^2+y^2-4x+2y-36 = 0$

ข. $x^2+y^2-8x+2y-36 = 0$

ค. $x^2+y^2-4x+2y+24 = 0$

ง. $x^2+y^2-8x+2y+24 = 0$

6. สมการ $x^2+y^2+4x-6y-12 = 0$ จัดให้อยู่ในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ได้ดังข้อใด

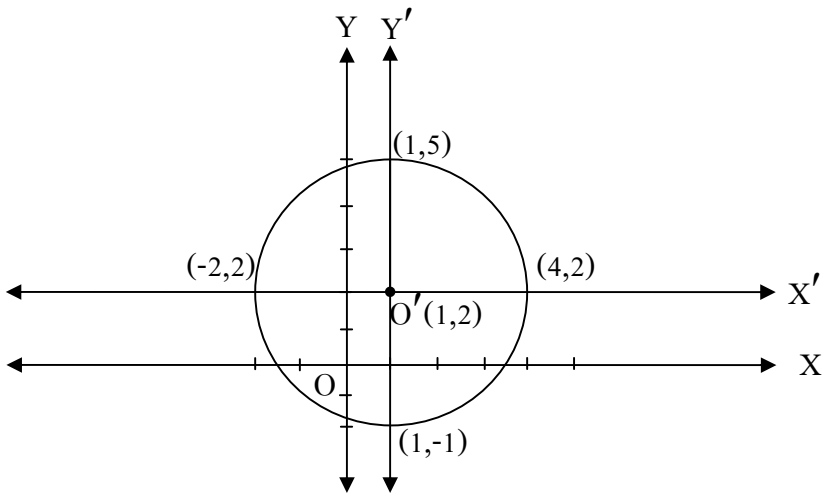
ก. $(x+2)^2+(y-5)^2 = 4^2$

ข. $(x+2)^2+(y-3)^2 = 4^2$

ค. $(x+2)^2+(y-3)^2 = 5^2$

ง. $(x+2)^2+(y+5)^2 = 5^2$

7. จากรูปที่กำหนดให้ สมการวงกลมคือข้อใด



ก. $(x-1)^2+(y-2)^2 = 3$ ข. $(x+1)^2+(y+2)^2 = 3$

ค. $(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$ ง. $(x+2)^2+(y+1)^2 = 9$

8. จากความสัมพันธ์ $\{(x,y)\in R\times R \,/\, x^2+y^2+4x-6y = 3\}$ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมคือข้อใด

ก. C(-2,3) และ r = 3 หน่วย ข. C(-2,3) และ r = 4 หน่วย

ค. C(3,-2) และ r = 4 หน่วย ง. C(3,-2) และ r = 3 หน่วย

9. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,7) และผ่านจุด (24,0) คือข้อใด

ก. $x^2+y^2-14x+576 = 0$ ข. $x^2+y^2-14y-576 = 0$

ค. $x^2+y^2-14x+15 = 0$ ง. $x^2+y^2-14y-15 = 0$

10. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1,-2) และรัศมี 2 หน่วย คือข้อใด

ก. $2x^2+2y^2+2x+4y-1 = 0$ ข. $x^2+y^2+2x+4y+1 = 0$

ค. $x^2+y^2+2x+4y-5 = 0$ ง. $2x^2+2y^2+2x-4y-2 = 0$

ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

1. ข
2. ง
3. ค
4. ก
5. ค
6. ข
7. ง
8. ก
9. ค
10. ง

เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมี r หน่วย

1. จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 9 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ

$x^2+y^2=r^2$ และ $r = 9$

ได้สมการ คือ $x^2+y^2 = 9^2$

$x^2+y^2 = 81$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 81\}$ □

1.2 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 12 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2+y^2=r^2$

และ $r = 12$ ได้สมการ คือ $x^2+y^2 = 12^2$

$x^2+y^2 = 144$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 144\}$ □

1.3 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และรัศมี 7 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2+y^2 = r^2$

และ $r = 7$ ได้สมการ คือ $x^2+y^2 = 7^2$

$x^2+y^2 = 49$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, x^2+y^2 = 49\}$ □

1.4 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และเส้นผ่าศูนย์กลาง 18 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) รัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2+y^2=r^2$

และ $r = 9$ ได้สมการ คือ $x^2+y^2 = 9^2$

$x^2+y^2 = 81$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R / x^2+y^2 = 81\}$ □

1.5 จุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และเส้นผ่าศูนย์กลาง 24 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C (0,0) และรัศมีเท่ากับ r คือ $x^2+y^2=r^2$

และเส้นผ่าศูนย์กลาง 24 หน่วย ดังนั้น $r = 12$

ได้สมการ คือ $x^2+y^2 = 12^2$

$x^2+y^2 = 144$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x,y) \in R\times R / x^2+y^2 = 144\}$ □

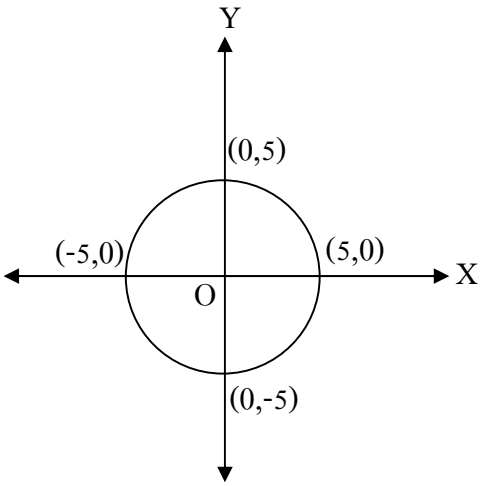
2. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\{(x,y) \in R\times R / x^2+y^2 = 25\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2+y^2 = 25$

$x^2+y^2 = 5^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 5 หน่วย

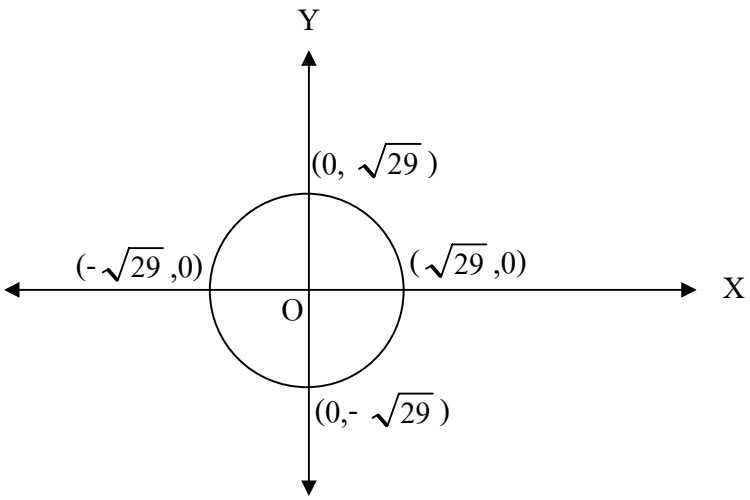


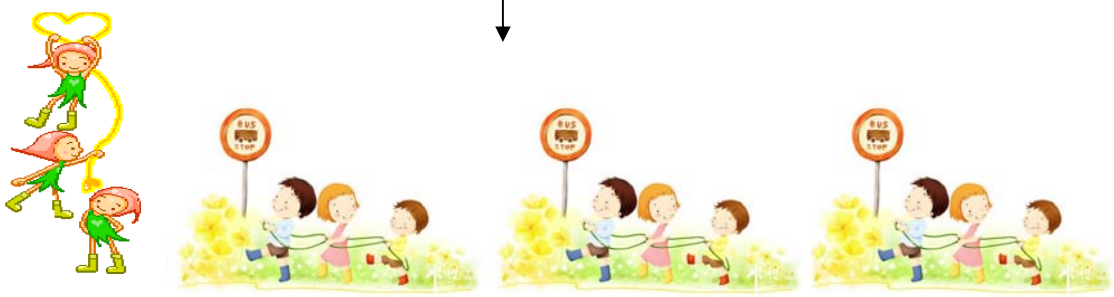
2.2 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 = 29\}$

วิธีทำ จากโจทย์โจทย์ $x^2 + y^2 = 29$

$x^2 + y^2 = (\sqrt{29})^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี $(\sqrt{29})^2$ หน่วย



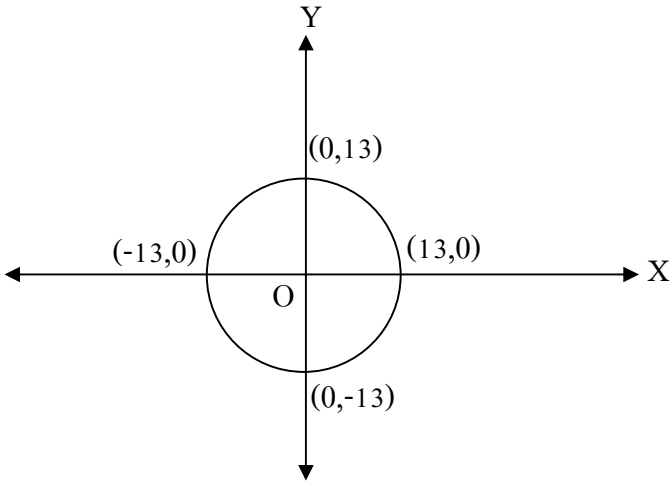


2.3 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 = 169\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2 + y^2 = 169$

$x^2 + y^2 = 13^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 13 หน่วย



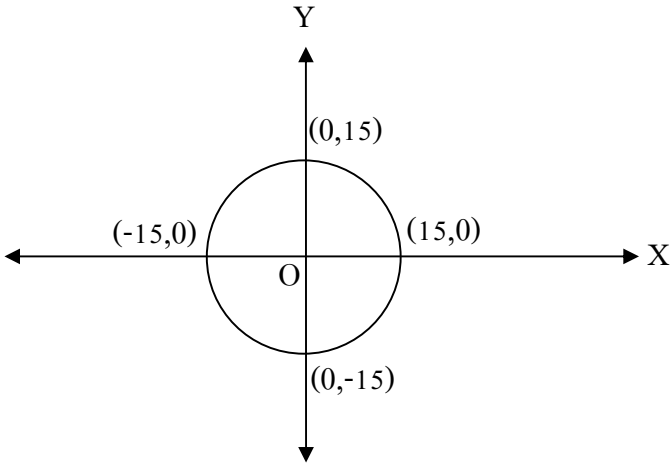
2.4 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 - 225 = 0\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2 + y^2 - 225 = 0$

$x^2 + y^2 = 225$

$x^2 + y^2 = 15^2$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 15 หน่วย



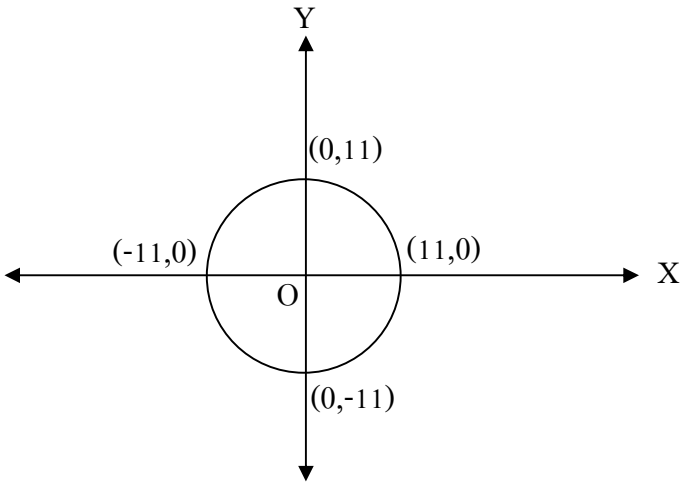
2.5 $\{(x,y) \in R \times R \,/\, x^2 + y^2 - 121 = 0\}$

วิธีทำ จากโจทย์ $x^2 + y^2 - 121 = 0$

$$x^2 + y^2 = 121$$

$$x^2 + y^2 = 11^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0,0) รัศมี 11 หน่วย



เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 2

1.จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(1,2) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(1,2) และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย

ได้ $h=1,\ k=2\ ,\ r=3$

สมการ คือ $(x-1)^2+(y-2)^2 = 3^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2 = 9$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(1,2)

และรัศมีเท่ากับ 3 หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R\ /\ (x-1)^2+(y-2)^2 = 9\}$ □

1.2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(3,-1) และรัศมีเท่ากับ 6 หน่วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

จากโจทย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(3,-1) และรัศมีเท่ากับ 6 หน่วย

สมการ คือ $(x-3)^2+(y-(-1))^2 = 6^2$

$(x-3)^2+(y+1)^2 = 36$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(3,-1)

และรัศมีเท่ากับ 6 หน่วย คือ $\{(x,y) \in R\times R\ /\ (x-3)^2+(y+1)^2=36\}$ □

1.3 มีจุด (1,2) และ (4,5) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

วิธีทำ สองเท่าของรัศมีเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลม

เส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมเท่ากับระยะห่างระหว่างจุด (1,2) และ (4,5)

$\therefore\ 2r = \sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2}$

$$2r = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$$

$$2r = \sqrt{9+9}$$

$$2r = \sqrt{18}$$

$$2r = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ได้รัศมีเท่ากับ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด (1,2) และ (4,5)

$$\bar{x}=h=\frac{1+4}{2}, \quad \bar{y}=k=\frac{2+5}{2}$$

$$\bar{x}=h=\frac{5}{2}, \quad \bar{y}=k=\frac{7}{2}$$

ได้จุดศูนย์กลาง คือ $(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$

เพราะฉะนั้น สมการของวงกลมคือ $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2}1)^2 = (\frac{3\sqrt{2}}{2})^2$

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2}1)^2 = \frac{(9)(2)}{4}$$

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2}1)^2 = \frac{9}{2}$$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุด (1,2) และ (4,5) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมคือ $\{(x,y) \in R\times R/(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{7}{2})^2=\frac{9}{2}\}$ □

1.4 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(4,-1) และผ่านจุด A(-1,3)

วิธีทำ จากโจทย์วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(4,-1) และผ่านจุด A(-1,3)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

นั่นคือ $(x-4)^2+(y-(-1))^2=r^2$

รัศมีคือ ระยะห่างระหว่างจุด C(4,-1) และผ่านจุด A(-1,3)

$$\therefore \quad r = \sqrt{(4-(-1))^2+(-1-3)^2}$$

$$r = \sqrt{(4+1)^2+(-1-3)^2}$$

$r = \sqrt{(5)^2+(-4)^2}$

$r = \sqrt{25+16}$

$r = \sqrt{41}$

สมการของวงกลมคือ $(x-4)^2+(y-(-1))^2 = (\sqrt{41})^2$

$(x-4)^2+(y+1)^2 = 41$

$\therefore$ ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(4,-1)

และผ่านจุด A(-1,3) คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-4)^2+(y+1)^2 = 41\}$ □

1.5 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2,3) และสัมผัสเส้นตรง $3x+4y-6=0$

วิธีทำ จากโจทย์วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2,3) และสัมผัสเส้นตรง $3x+4y-6=0$

รัศมีคือระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x+4y-6=0$ กับจุด (2,3)

$$r = \left|\frac{(3)(2)+(4)(3)+(-6)}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$$

$$r = \left|\frac{6+12-6}{\sqrt{9+16}}\right|$$

$$r = \left|\frac{12}{\sqrt{25}}\right|$$

$$r = \left|\frac{12}{5}\right|$$

$$r = \frac{12}{5}$$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

ได้สมการคือ $(x-2)^2+(y-3)^2 = (\frac{12}{5})^2$

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = \frac{144}{25}$$

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2,3) และสัมผัสเส้นตรง

$3x+4y-6=0$ คือ $\{(x,y) \in R\times R \,/\, (x-2)^2+(y-3)^2 = \frac{144}{25}\}$ □

2. จงหาสมการวงกลมเมื่อกำหนดรัศมี (r) และจุดศูนย์กลาง C(h,k) โดยใช้สูตร

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

2.1 $r = 2$, C(3,4)

วิธีทำ

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 2^2$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-8y+16) = 4$$

$$x^2+y^2-6x-8y+9+16-4 = 0$$

$$x^2+y^2-6x-8y+21 = 0$$ □

2.2 $r = 4$, C(-2,-4)

วิธีทำ

$$(x-(-2))^2+(y-(-4))^2 = 4^2$$

$$(x+2)^2+(y+4)^2 = 16$$

$$(x^2+4x+4)+(y^2+8y+16) = 16$$

$$x^2+y^2+4x+8y+4+16-16 = 0$$

$$x^2+y^2+4x+8y+4 = 0$$ □

2.3 $r = 7$, C(2,-3)

วิธีทำ

$$(x-2)^2+(y-(-3))^2 = 7^2$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 49$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9) = 49$$

$$x^2+y^2-4x+6y+4+9-49 = 0$$

$$x^2+y^2-4x+6y-36 = 0$$ □

2.4 $r = \sqrt{17}$, C(-4,3)

วิธีทำ

$$(x-(-4))^2+(y-3)^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$(x+4)^2+(y-3)^2 = 17$$

$$(x^2+8x+16)+(y^2-6y+9) = 17$$

$$x^2+y^2+8x-6y+16+9-17 = 0$$

$$x^2+y^2+8x-6y+8 = 0$$

□

2.5 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C(0,-\frac{3}{2})$

วิธีทำ

$$(x-0)^2+(y-(-\frac{3}{2}))^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

$$x^2+(y+\frac{3}{2})^2 = \frac{(1)^2}{(\sqrt{2})^2}$$

$$x^2+(y^2+\frac{6}{2}y+\frac{9}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2+\frac{6}{2}y+\frac{9}{4}-\frac{1}{2} = 0$$

$$x^2+y^2+\frac{6}{2}y+\frac{7}{4} = 0$$

$$4x^2+4y^2+12y+7 = 0$$

□

เฉลยแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 3

จงหาจุดศูนย์กลาง รัศมีและเขียนกราฟของวงกลมต่อไปนี้

1. $x^2+y^2+2x-4y+1 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+2x-4y+1 = 0$$

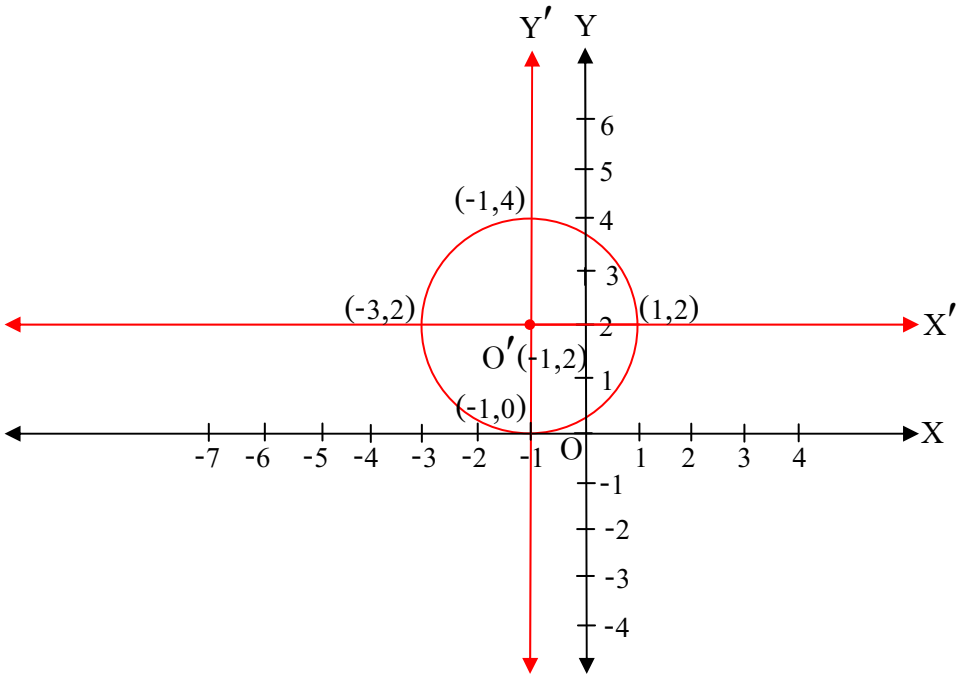
$$(x^2+2x)+(y^2-4y) = -1$$

$$(x^2+2x+1^2)+(y^2-4y+2^2) = -1+1+4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = 2^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-1,2) รัศมีเท่ากับ 2 หน่วย



2. $x^2+y^2+6x+4y-12 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+6x+4y-12 = 0$$

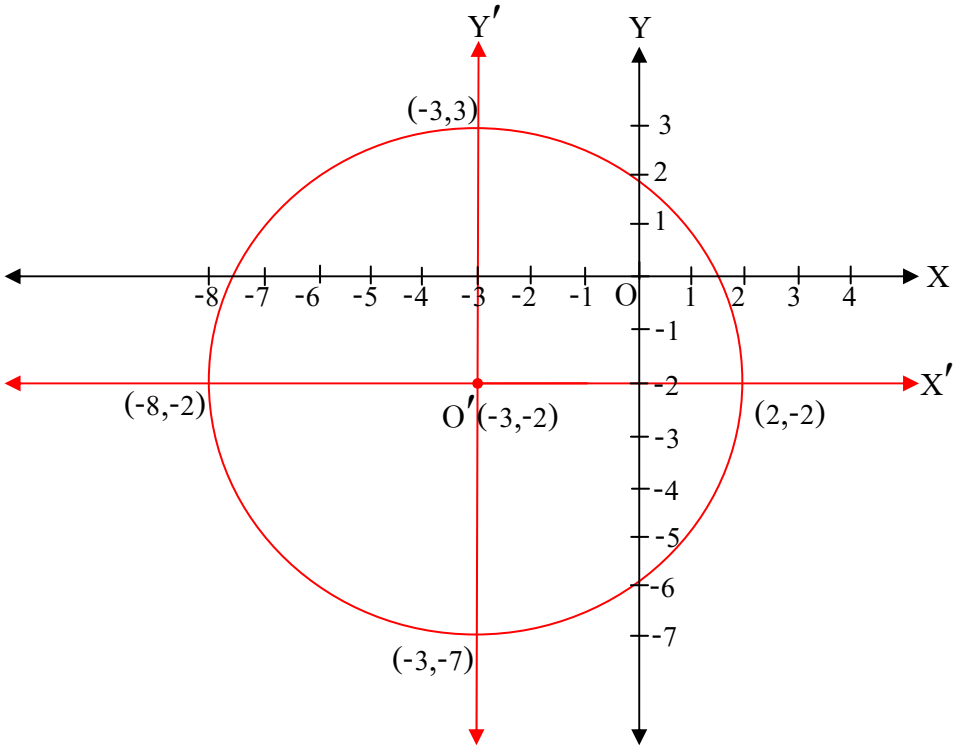
$$(x^2+6x)+(y^2+4y) = 12$$

$$(x^2+6x+3^2)+(y^2+4y+2^2) = 12+9+4$$

$$(x+3)^2+(y+2)^2 = 25$$

$$(x+3)^2+(y+2)^2 = 5^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-3,-2) รัศมีเท่ากับ 5 หน่วย



3. $x^2+y^2-4x+8y+11 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-4x+8y+11 = 0$$

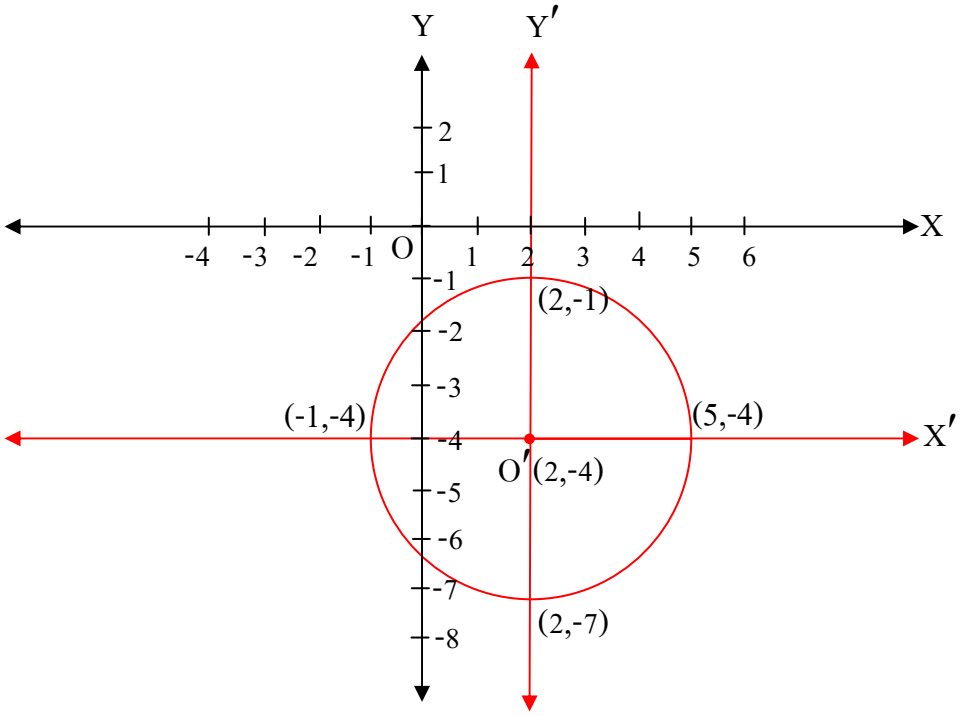
$$(x^2-4x)+(y^2+8y) = -11$$

$$(x^2-4x+2^2)+(y^2+8y+4^2) = -11+4+16$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2 = 9$$

$$(x-2)^2+(y+4)^2 = 3^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (2,-4) รัศมีเท่ากับ 3 หน่วย



4. $x^2+y^2+6x-6y-46 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+6x+6y-46 = 0$$

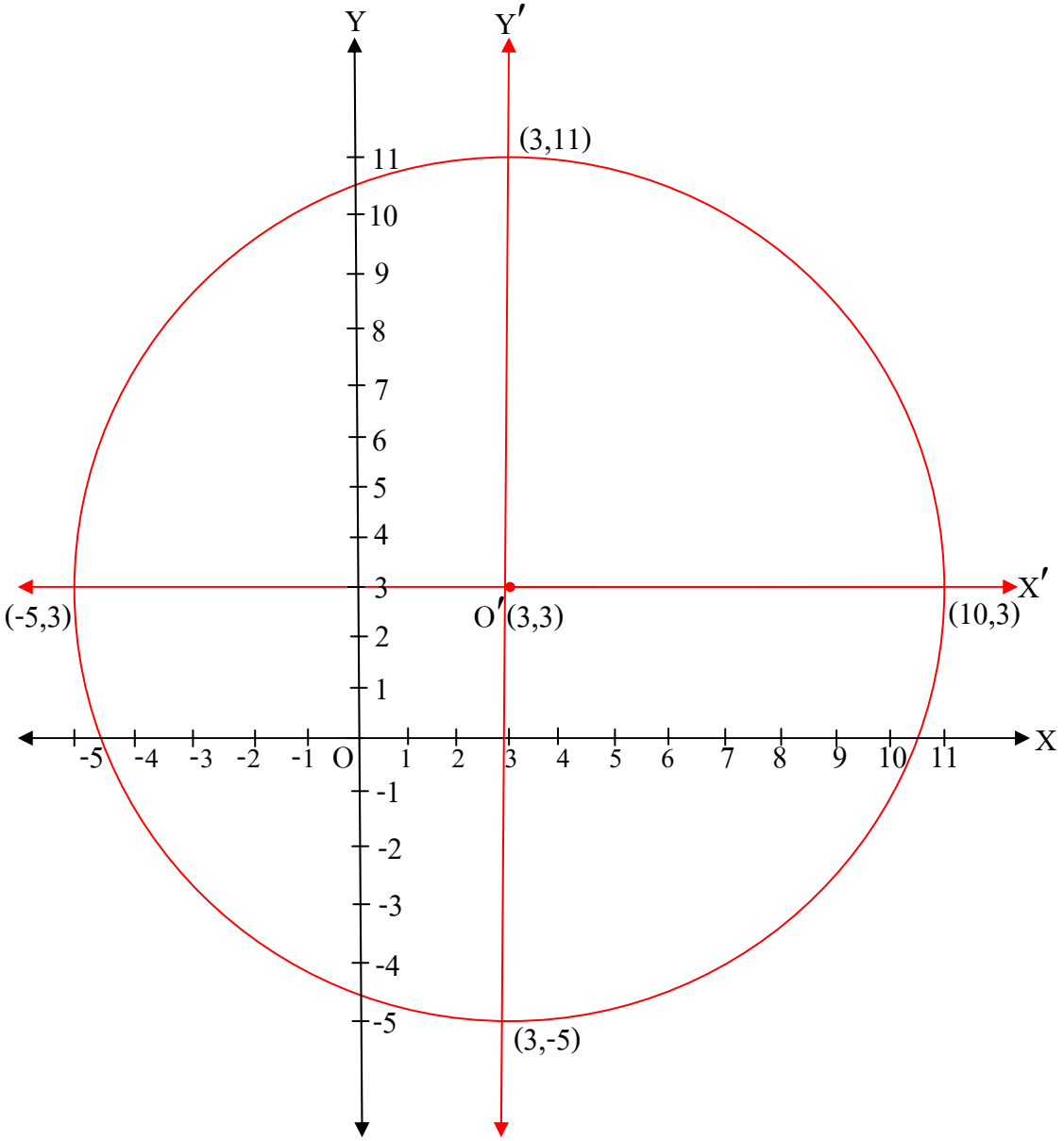
$$(x^2+6x)+(y^2+6y) = 46$$

$$(x^2+6x+3^2)+(y^2+6y+3^2) = 46+9+9$$

$$(x+3)^2+(y+3)^2 = 64$$

$$(x+3)^2+(y+3)^2 = 8^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (3,3) รัศมีเท่ากับ 8 หน่วย



5. $x^2+y^2-6x+4y = 3$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-6x+4y = 3$$

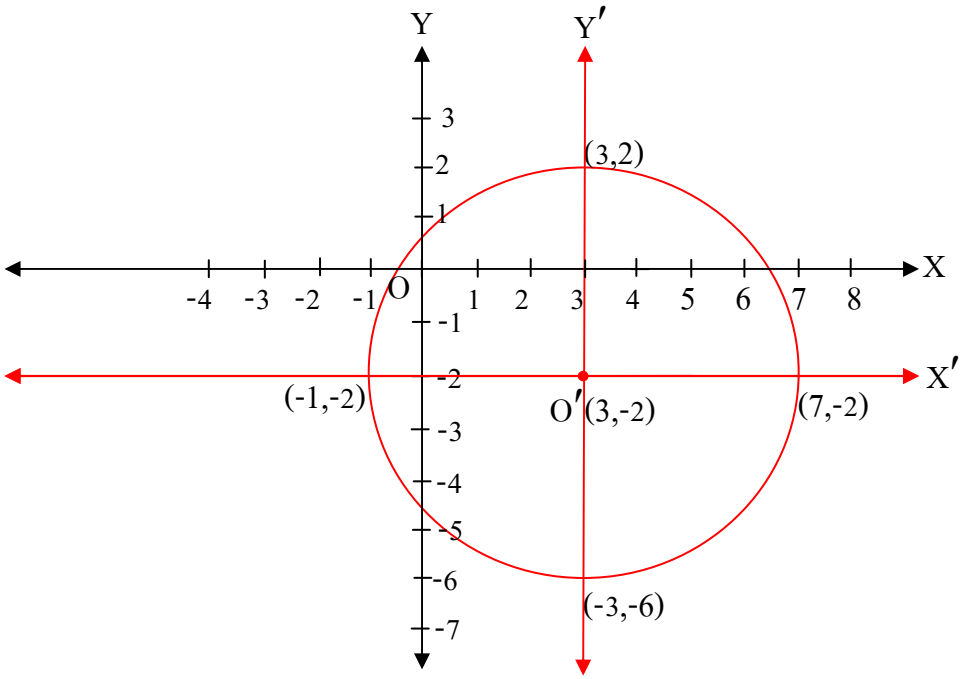
$$(x^2-6x)+(y^2+4y) = 3$$

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2+4y+2^2) = 3+9+4$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2 = 16$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2 = 4^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (3,-2) รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย



6. $2x^2+2y^2-8x+4y-22 = 0$

วิธีทำ

$$2x^2+2y^2-8x+4y-22 = 0$$

$$(2x^2-8x)+(2y^2+4y) = 22$$

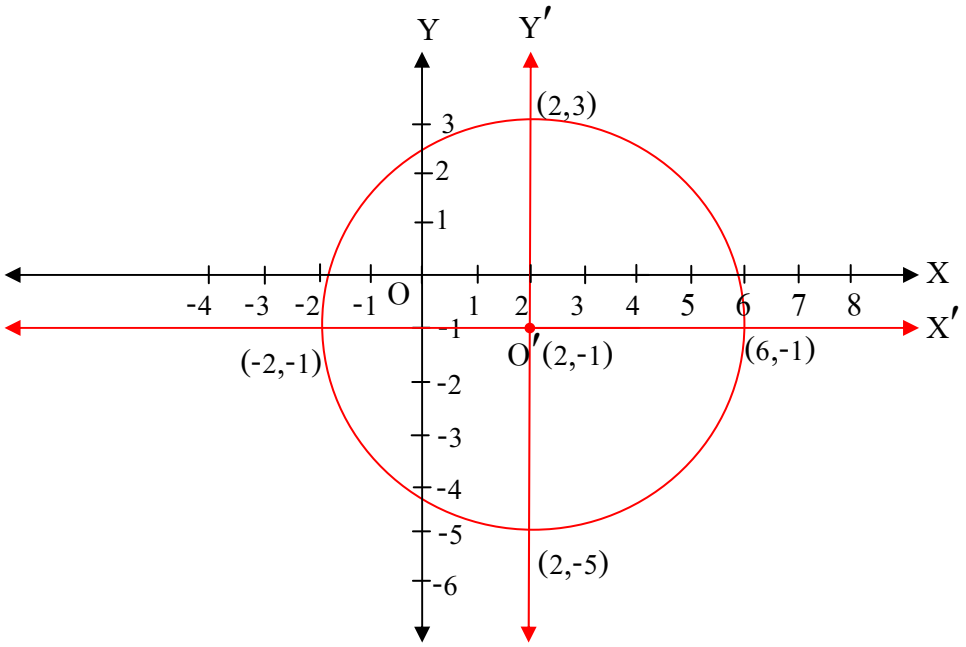
$$(x^2-4x)+(y^2+2y) = 11 \quad \text{(นำ 2 หารทั้งสองข้าง)}$$

$$(x^2-4x+2^2)+(y^2+2y+1^2) = 11+4+1$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 16$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = 4^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (2,-1) รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย



7. $x^2+y^2-6x-8y+21=0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-6x-8y+21 = 0$$

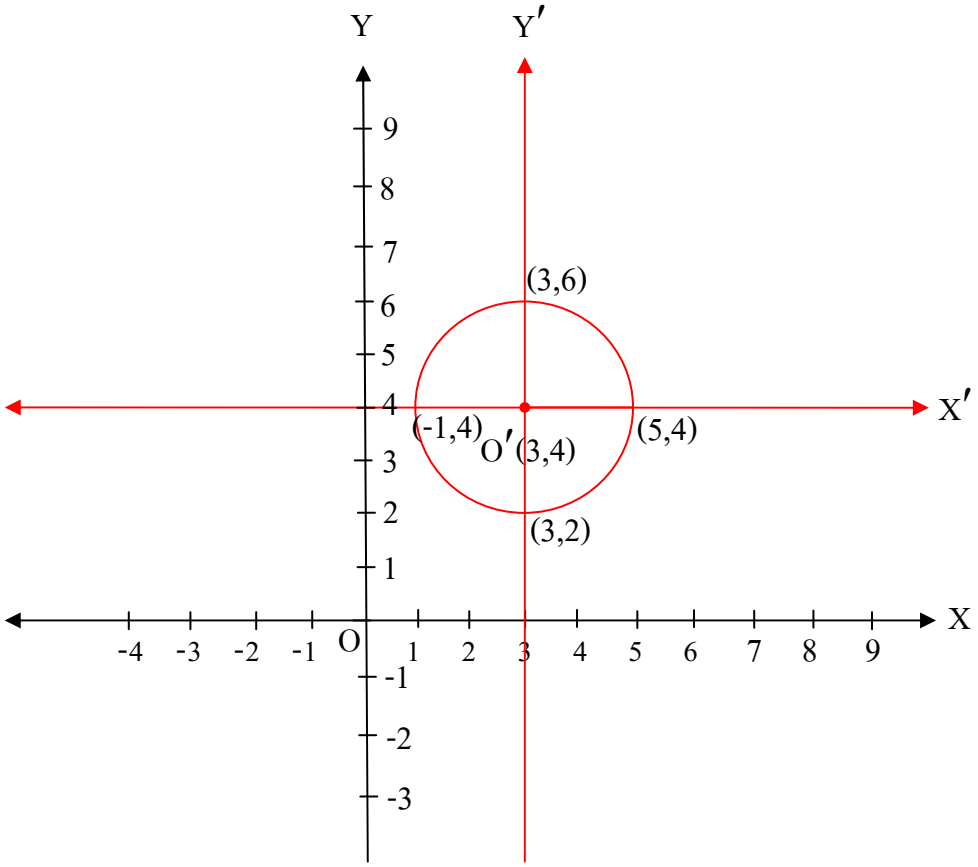
$$(x^2-6x)+(y^2-8y) = -21$$

$$(x^2-6x+3^2)+(y^2-8y+4^2) = -21+9+16$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 4$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2 = 2^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (3,4) รัศมีเท่ากับ 2 หน่วย



8. $x^2+y^2+4x+8y+4 = 0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2+4x+8y+4 = 0$$

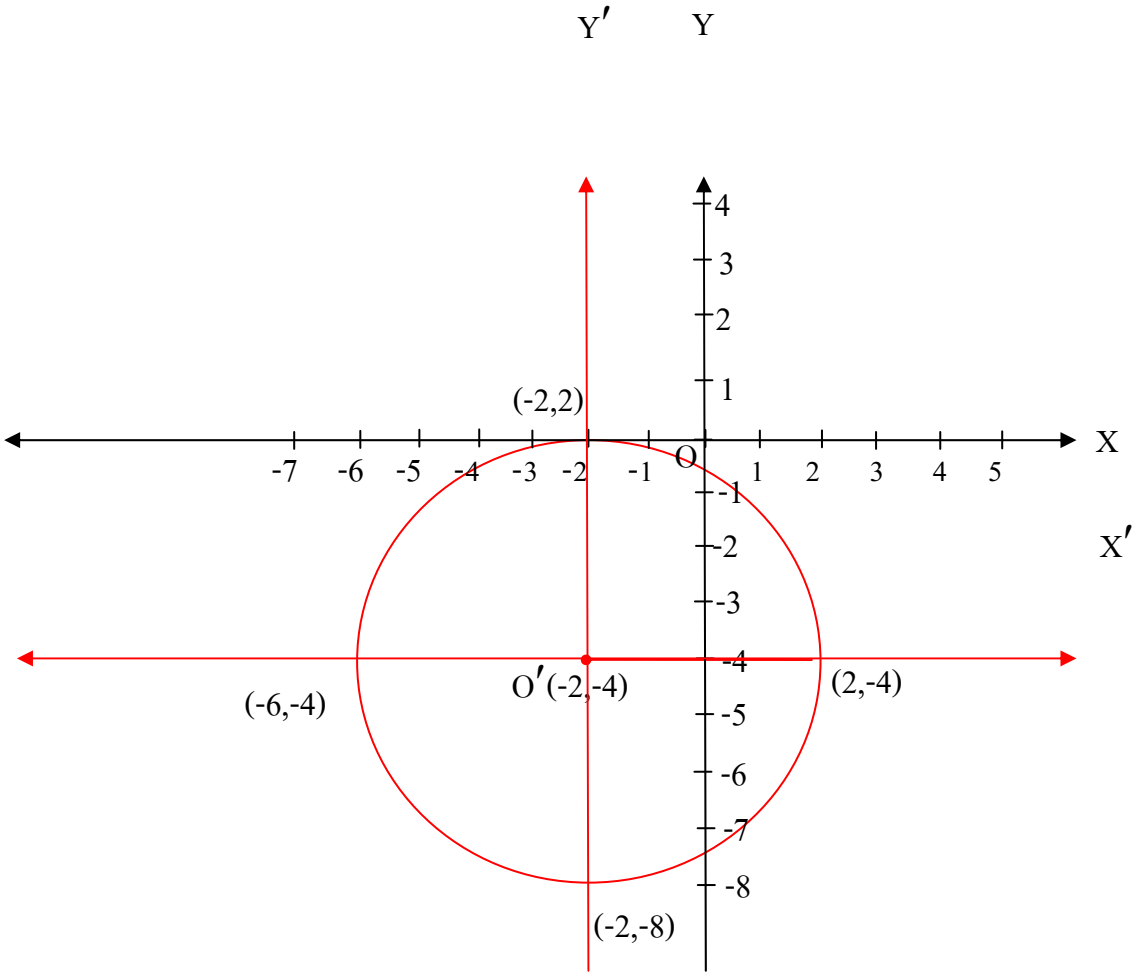
$$(x^2+4x)+(y^2+8y) = -4$$

$$(x^2+4x+2^2)+(y^2+8y+4^2) = -4+4+16$$

$$(x+2)^2+(y+4)^2 = 16$$

$$(x+2)^2+(y+4)^2 = 4^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (-2,-4) รัศมีเท่ากับ 4 หน่วย



9. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$

วิธีทำ

$$x^2+y^2-4x+6y-36 = 0$$

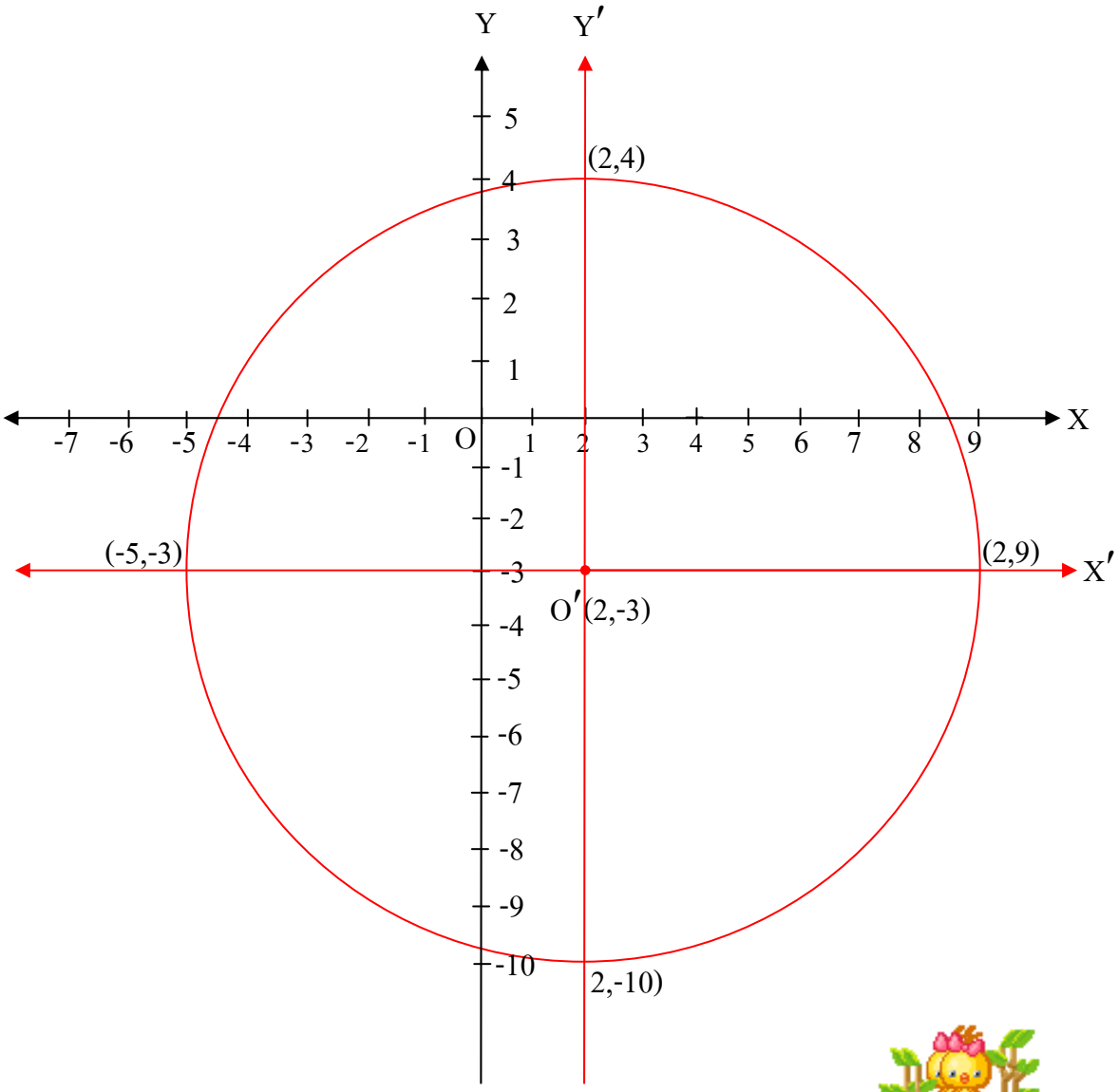
$$(x^2-4x)+(y^2+6y) = 36$$

$$(x^2-4x+2^2)+(y^2+6y+3^2) = 36+4+9$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 49$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2 = 7^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (2,-3) รัศมีเท่ากับ 7 หน่วย



10. $x^2+y^2-2x-4y-20 = 0$

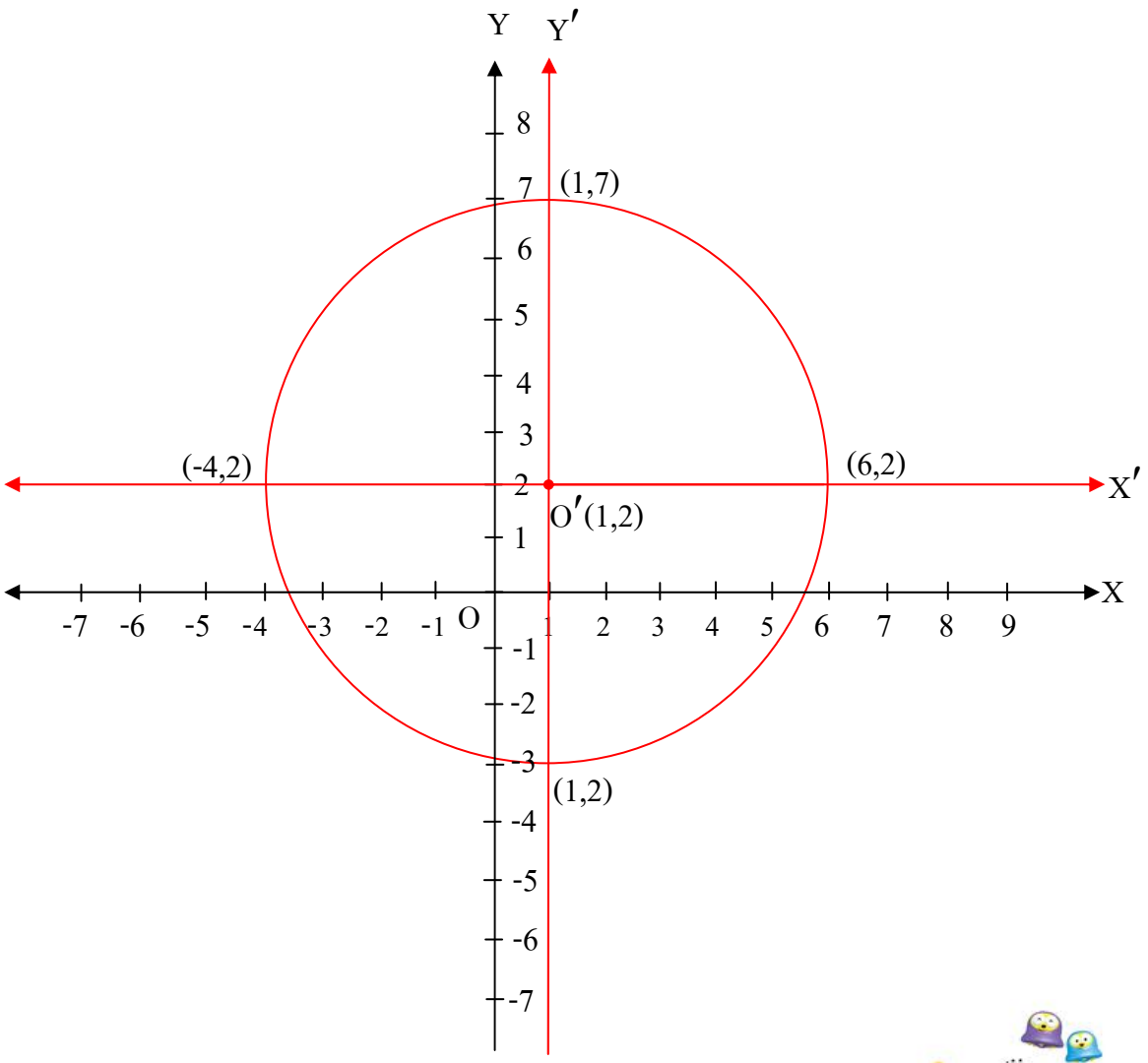
วิธีทำ

$$x^2+y^2-2x-4y-20 = 0$$

$$(x^2-2x)+(y^2-4y) = 20$$

$$(x^2-2x+1^2)+(y^2-4y+2^2) = 20+1+4$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 25$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 5^2$$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (1,2) รัศมีเท่ากับ 5 หน่วย