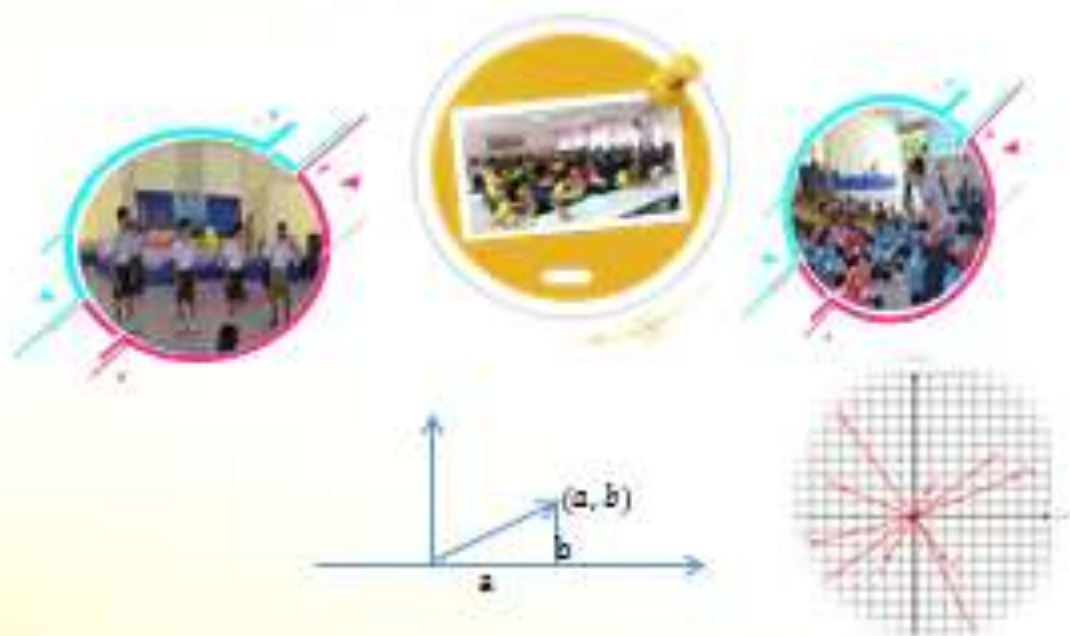




ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์
เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน



นางสาวนิศศิยา แก้วชัย
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

โรงเรียนรือใหญ่วิทยาลังก์
ตำบลรือใหญ่อำเภอชุนันต์ จังหวัดศรีสะเกษ
องค์การบริหารส่วนจังหวัดศรีสะเกษ

คำนำ

ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จัดทำขึ้น เพื่อใช้ในการพัฒนาการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อให้ นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจในเรื่องของจำนวนเชิงซ้อน ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้ ประกอบด้วย คำชี้แจง คำแนะนำสำหรับครู คำแนะนำสำหรับนักเรียน ลำดับชั้นการเรียนรู้ สารการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ แบบทดสอบก่อนเรียน เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน บัตรเนื้อหา บัตรกิจกรรม เฉลยบัตร กิจกรรม บัตรคำสั่ง เฉลยบัตรคำสั่ง บัตรงาน เฉลยบัตรงาน ซึ่งนักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเอง เมื่อนำชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้ ไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนแล้ว จะทำให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนจำนวนเชิงซ้อนมากยิ่งขึ้น และส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ในวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นด้วย

หวังว่าชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้ จะเป็นส่วนหนึ่งของเครื่องมือที่จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการ เรียนรู้อย่างสมบูรณ์ มีประสิทธิภาพ และเอื้อประโยชน์แก่นักเรียน ครูผู้สอนคณิตศาสตร์และผู้สนใจ ตามสมควร

นิตติยา แก้วชัย



สารบัญ

	หน้า
คำชี้แจงเกี่ยวกับชุดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	1
คำแนะนำสำหรับครู.....	2
คำแนะนำสำหรับนักเรียน.....	3
ลำดับขั้นการเรียนรู้.....	4
สาระการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้.....	5
แบบทดสอบก่อนเรียน.....	7
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน.....	10
บัตรเนื้อหาที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน.....	11
บัตรกิจกรรมที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน.....	13
เฉลยบัตรกิจกรรมที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน.....	14
บัตรงานที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน.....	15
เฉลยบัตรงานที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน.....	17
บัตรเนื้อหาที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	19
บัตรกิจกรรมที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	21
เฉลยบัตรกิจกรรมที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	22
บัตรงานที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	23
เฉลยบัตรงานที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	24
บัตรเนื้อหาที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	25
บัตรกิจกรรมที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	27
เฉลยบัตรกิจกรรมที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	28
บัตรงานที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	30
เฉลยบัตรงานที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน.....	32
แบบบันทึกการเรียนรู้.....	35
แบบทดสอบหลังเรียน.....	36
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน.....	39
บรรณานุกรม.....	40



คำชี้แจงเกี่ยวกับชุดกิจกรรมการเรียนรู้
ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. เอกสารเล่มนี้เป็นชุดกิจกรรมการเรียนรู้ รายวิชาเสริมทักษะคณิตศาสตร์ 4 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีทั้งหมด 12 ชุด ดังนี้
ชุดที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 2 เรื่อง การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$
ชุดที่ 3 เรื่อง การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 4 เรื่อง การบวกจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 5 เรื่อง การคูณจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 6 เรื่อง สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 7 เรื่อง สัมมูลของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 8 เรื่อง รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 10 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
ชุดที่ 11 เรื่อง รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
ชุดที่ 12 เรื่อง สมการพหุนาม
2. ชุดกิจกรรม เล่มนี้ จัดทำขึ้น เพื่อใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอน รายวิชา
เสริมทักษะคณิตศาสตร์ 4 รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนปรีอใหญ่วิทยบาลลังก์
3. ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้ ใช้เวลาเรียน 3 คาบ
4. ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้ ประเมินผลการเรียนรู้จากแบบทดสอบหลังเรียนชุดที่ 9 จำนวน 10 ข้อ
คะแนนเต็ม 10 คะแนน เวลาในการสอบ 10 นาที



คำแนะนำสำหรับครู

การใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ชุดนี้ ครูผู้สอนเป็นผู้มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุผลตาม จุดประสงค์ ครูผู้สอนจึงควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตน ก่อนที่จะใช้ชุดกิจกรรม การเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ดังนี้

1. ศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกชุดก่อนการใช้งาน
2. เตรียมชุดกิจกรรมให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอนและวิธีการเรียนรู้ โดยใช้ชุดกิจกรรมอย่างชัดเจน เพื่อให้นักเรียนปฏิบัติได้อย่างถูกต้อง
4. ชี้แจงให้นักเรียนทราบและเข้าใจเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียนในการเรียนรู้โดยใช้ชุดกิจกรรม การเรียนรู้และเน้นย้ำเรื่องความซื่อสัตย์
5. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 9 เพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน
6. แจ้งผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้ ให้นักเรียนทราบ
7. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้
8. การเรียนรู้ของนักเรียนแต่ละคน หรือแต่ละกลุ่มอาจไม่เท่ากัน ครูควรยืดหยุ่นตามความเหมาะสมและสถานการณ์
9. ครูต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนที่ยังไม่เข้าใจบทเรียนศึกษาซ้ำอีกจนกว่าจะเข้าใจ ตลอดจนคอยช่วยเหลือและเปิดโอกาสให้นักเรียน ซักถามข้อสงสัย ในบทเรียนได้ตลอดเวลา
10. หากมีนักเรียนคนใดเรียนไม่ทันเพื่อน เรียนไม่เข้าใจ หรือขาดเรียน ครูควรให้คำแนะนำ หรือมอบหมายงานหรือให้ศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้เพิ่มเติมในเวลาว่าง
11. หลังจากนักเรียนศึกษา ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ชุดนี้จบลงทุกคน ครู อาจช่วยสรุป ซักถาม หรือทบทวนอีกครั้งหนึ่ง ตามความจำเป็นเพื่อช่วยเสริมให้นักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจยิ่งขึ้น
12. เมื่อนักเรียนศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้จบแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 9 เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน พร้อมทั้งบันทึกคะแนน
13. หากมีนักเรียนคนใดทำแบบทดสอบหลังเรียน ได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ควรจัด สอนซ่อมเสริม หรือให้นักเรียนศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ใหม่อีกครั้ง
14. การจัดชั้นเรียนจะจัดให้นักเรียนศึกษาเป็นรายกลุ่มหรือรายบุคคลก็ได้



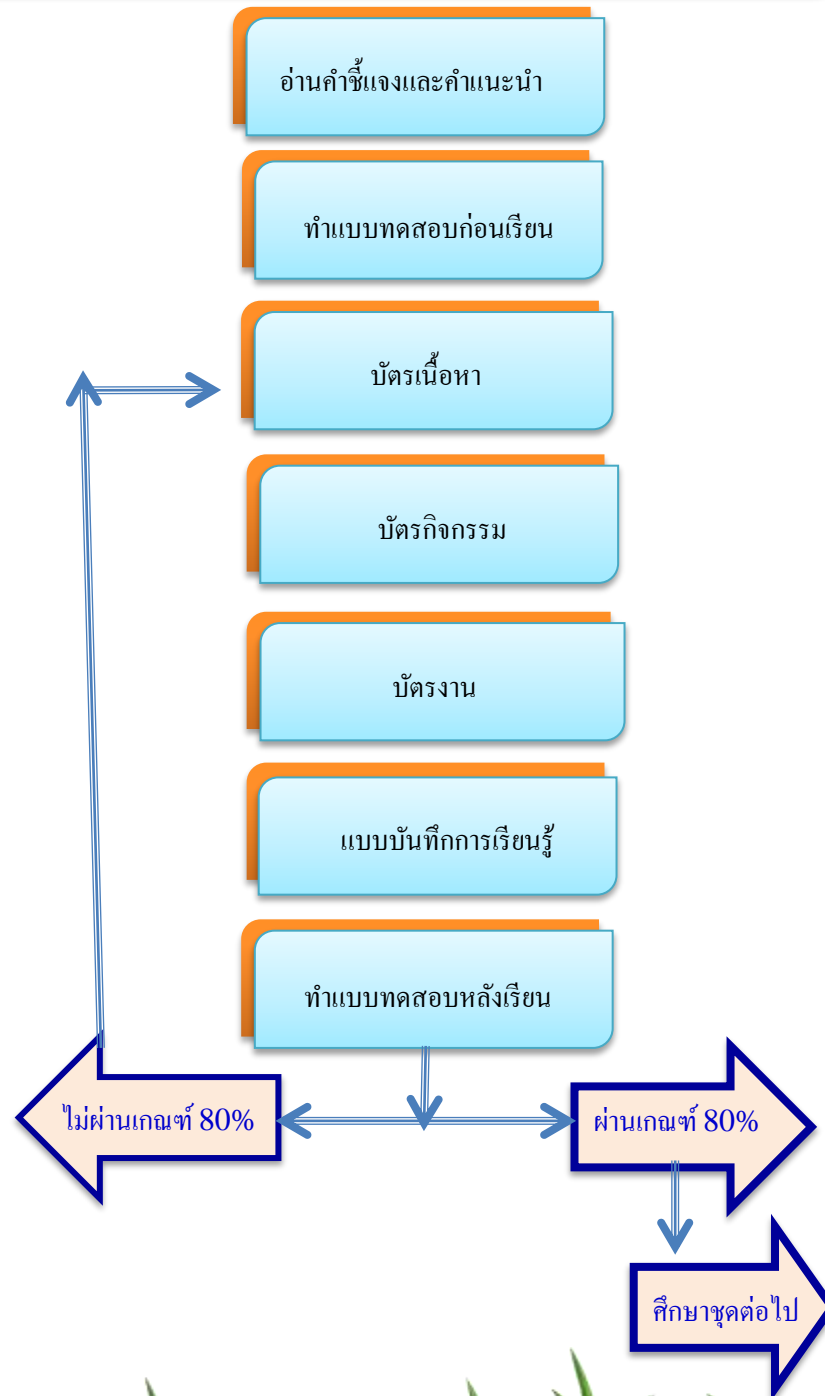
คำแนะนำสำหรับนักเรียน

ในการศึกษาชุดกิจกรรมการเรียนรู้ ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ชุดนี้ เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อนักเรียนเอง ก่อนที่จะศึกษาขอให้นักเรียนปฏิบัติตามคำแนะนำดังต่อไปนี้

1. อ่านคำชี้แจงเกี่ยวกับชุดกิจกรรมการเรียนรู้ และคำแนะนำสำหรับนักเรียนให้เข้าใจ
2. นักเรียนต้องซื่อสัตย์ต่อตนเอง “ไม่ควรเปิดดูเฉลยก่อน” เพราะจะทำให้นักเรียนไม่เกิดความรู้ความเข้าใจเรื่องที่ศึกษา
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดที่ 9 เพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน แล้วตรวจคำตอบจากบัตรเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้
4. นักเรียนต้องปฏิบัติตามกิจกรรม เรียงลำดับไปที่ละหน้า ไม่ควรศึกษาข้ามหน้า ตามบัตรเนื้อหา บัตรกิจกรรม บัตรงาน และ แบบบันทึกการเรียนรู้ เรื่องกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
5. เมื่อศึกษาไปความรู้เสร็จ ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามที่กำหนดไว้ จากนั้นจึงแลกเปลี่ยนกันตรวจ
6. หากคำตอบของนักเรียนไม่ตรงกับเฉลย ให้นักเรียนกลับไปศึกษา ในชุดกิจกรรมการเรียนรู้เดิมอีกครั้งจนเข้าใจ และสามารถตอบได้ถูกต้อง โดยไม่ต้องแก้ไขคำตอบเดิม
7. เมื่อศึกษาและทำกิจกรรมในชุดกิจกรรมการเรียนรู้จบแล้ว ให้ทำแบบทดสอบหลังเรียน ชุดที่ 9 เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
8. นำชุดกิจกรรมการเรียนรู้ส่งครูทุกครั้งหลังศึกษาจบในแต่ละชุด



ลำดับชั้นการเรียนรู้โดยใช้ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน



สาระการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และสมรรถนะสำคัญ
ชุดกิจกรรมการเรียนรู้ตามทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ชุดที่ 9 เรื่อง กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

สาระที่ 1 จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.1 เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวนระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน
ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้

มาตรฐาน ค 1.3 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ และเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่
กำหนดให้

2. ผลการเรียนรู้

ค 1.1 ม 5/1 เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

ค 1.1 ม 5/2 ทหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1

ค 1.3 ม. 5/6 แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียว ดีกรีไม่เกินสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและ
นำไปใช้ในการแก้ปัญหา



3. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบบทเรียนตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นี้แล้วนักเรียนสามารถ

3.1 ด้านความรู้

- 3.1.1 นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยจุดลงบนกราฟได้
- 3.1.2 นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยเวกเตอร์ลงบนกราฟได้
- 3.1.3 นักเรียนสามารถเขียนหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ได้ และนำคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

3.2 ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

- 3.2.1 นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาได้
- 3.2.2 นักเรียนสามารถให้เหตุผลได้
- 3.2.3 นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้

3.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 3.3.1 นักเรียนมีความรับผิดชอบ ส่งงานทันเวลาที่กำหนดได้
- 3.3.2 นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริต
- 3.3.3 นักเรียนมีระเบียบวินัย

4. สมรรถนะสำคัญ

- 4.1 ความสามารถในการคิด
- 4.2 ความสามารถในการแก้ปัญหา
- 4.3 ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต



คำชี้แจง

แบบทดสอบก่อนเรียน

ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาท × หน้าคำตอบข้อ ก, ข, ค และ ง ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว โดยใช้เวลาสอบ 10 นาที

1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = -7i$

ก. $|z| = \sqrt{0^2 - 7i^2}$

ข. $|z| = \sqrt{0^2 + (-7i)^2}$

ค. $|z| = \sqrt{0^2 + (-7)^2}$

ง. $|z| = \sqrt{0^2 + 7^2}$

2. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = 4 - 2i$

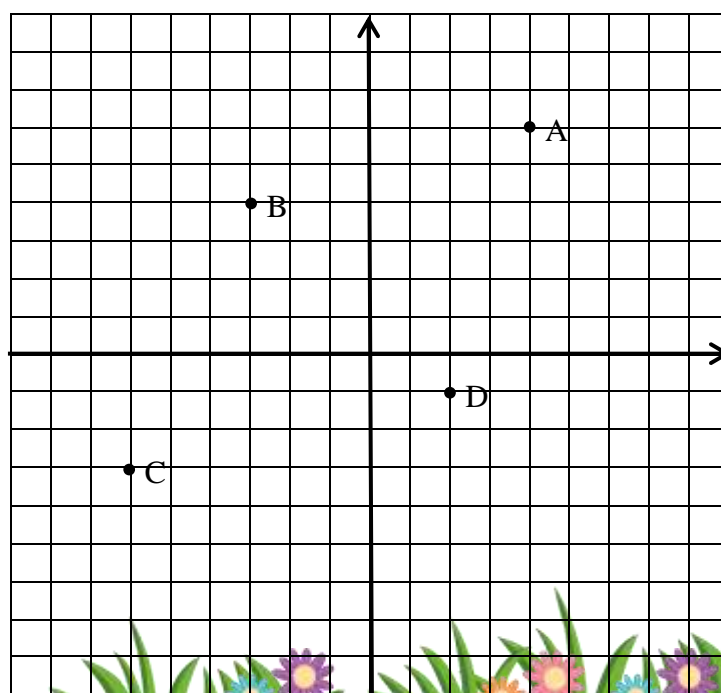
ก. $|z| = 5\sqrt{2}$

ข. $|z| = \sqrt{2}$

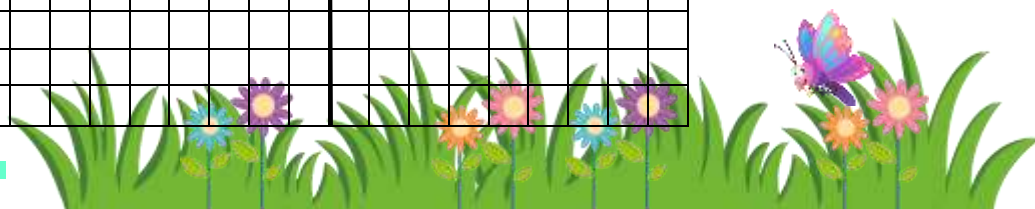
ค. $|z| = 3\sqrt{5}$

ง. $|z| = 2\sqrt{5}$

3. จากกราฟที่กำหนดให้ จุด A, B, C และ D เป็นจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด y แกนจินตภาพ



x แกนจริง

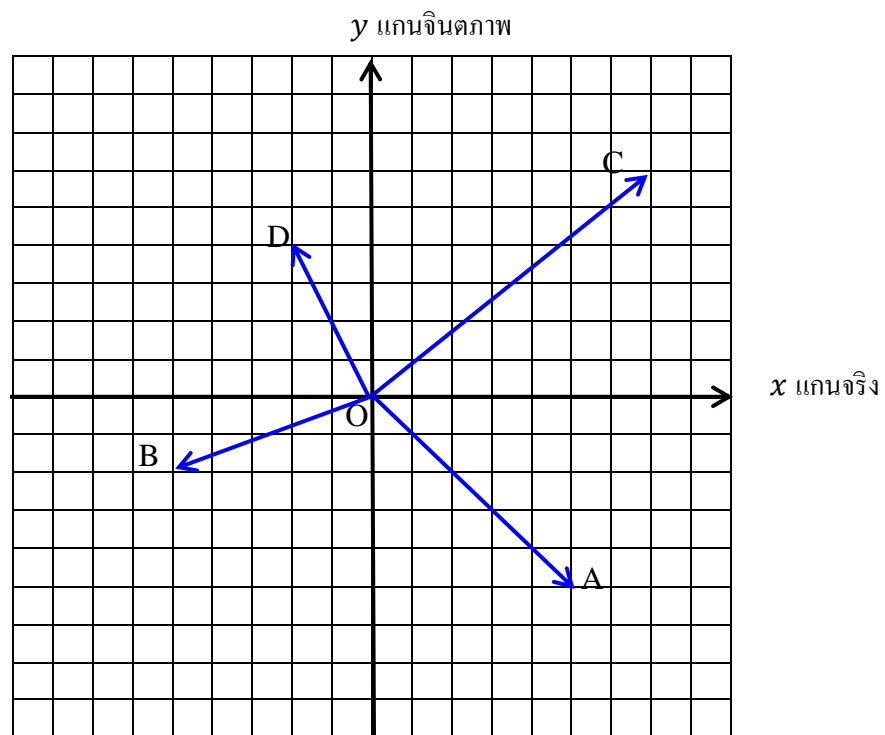


- ก. $-6 - 3i, 4 + 6i, -3 + 4i, 2 - i$ ตามลำดับ
 ข. $4 + 6i, -6 - 3i, -3 + 4i, 2 - i$ ตามลำดับ
 ค. $4 + 6i, -3 + 4i, -6 - 3i, 2 - i$ ตามลำดับ
 ง. $-3 + 4i, 4 + 6i, 2 - i, -6 - 3i$ ตามลำดับ

4. ค่าของ $|i^{80}| - |8i^{24}|$ คือข้อใด

- ก. -7
 ข. 0
 ค. 3
 ง. 5

ใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบข้อ 5 - 6



5. จำนวนเชิงซ้อน $-5 - 2i, 5 - 5i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ใด

- ก. \vec{OA}, \vec{OB} ตามลำดับ
 ข. \vec{OB}, \vec{OA} ตามลำดับ
 ค. \vec{OC}, \vec{OA} ตามลำดับ
 ง. \vec{OD}, \vec{OC} ตามลำดับ



6. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

ก. \overrightarrow{OD} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ข. \overrightarrow{OC} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ค. \overrightarrow{OB} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ง. \overrightarrow{OA} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

7. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (1 + \sqrt{3}i)^2 (\sqrt{3} - i)^4$ คือข้อใด

ก. 2^2

ข. 2^4

ค. 2^6

ง. 2^8

8. กำหนดให้ $z = \frac{1-2i}{i}$ จงหา $|z^2 - 6z + 9|$

ก. $\sqrt{26}$

ข. 26

ค. $\sqrt{27}$

ง. 27

9. กำหนดให้ $w = 12 + 5i$ และ $z = -3 + 4i$ ค่าของ $|zw^{-1}|$ คือข้อใด

ก. $\frac{13}{5}$

ข. $\frac{5}{13}$

ค. 65

ง. -65

10. ข้อใดเป็นจริง

ก. $|3 - 4i| = |-3 - 4i|$

ข. $|-5 - 2i| < |4 + 3i|$

ค. $|5i| \neq |5|$

ง. $|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i| > |\frac{1}{4}|$



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

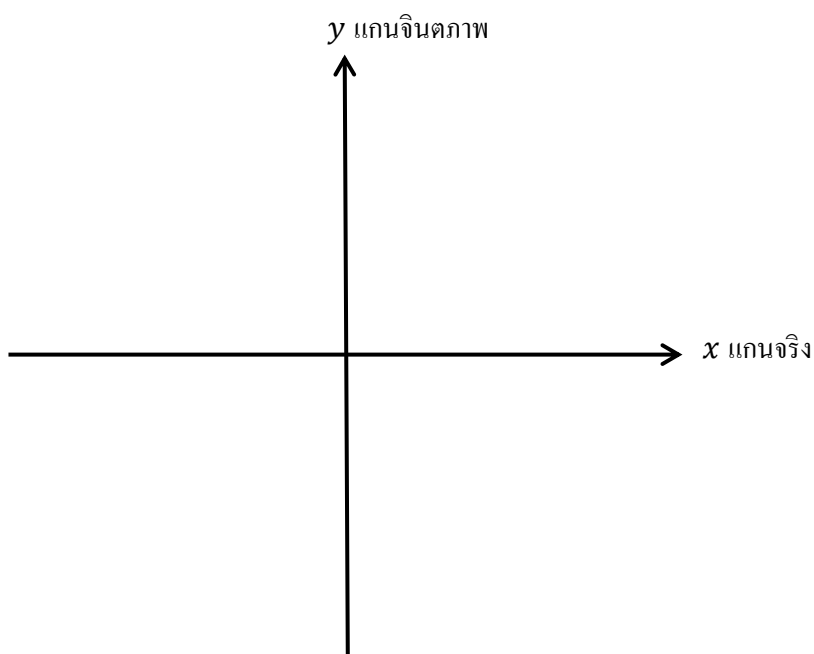
- | | |
|------|-------|
| 1. ค | 2. ง |
| 3. ค | 4. ก |
| 5. ข | 6. ก |
| 7. ค | 8. ง |
| 9. ข | 10. ก |



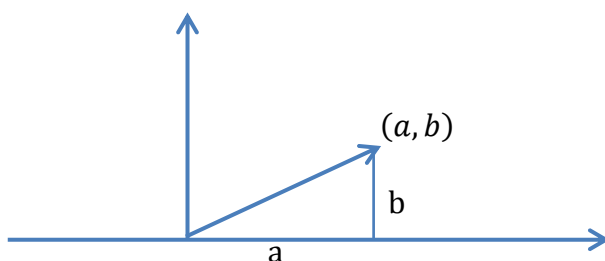
บัตรเนื้อหาที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ สามารถเขียนในรูปของคู่อันดับ (a, b) ได้ ดังนั้น จึงสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อน แทนด้วยจุดบนระนาบ และเรียกระนาบนั้นว่า ระนาบเชิงซ้อน โดย ให้แกน x แทนส่วนจริง เรียกว่า แกนจริง และให้แกน y แทน ส่วนจินตภาพ เรียกว่า แกนจินตภาพ แกนทั้งสองตั้งฉากกันและตัดกันที่ $(0,0)$

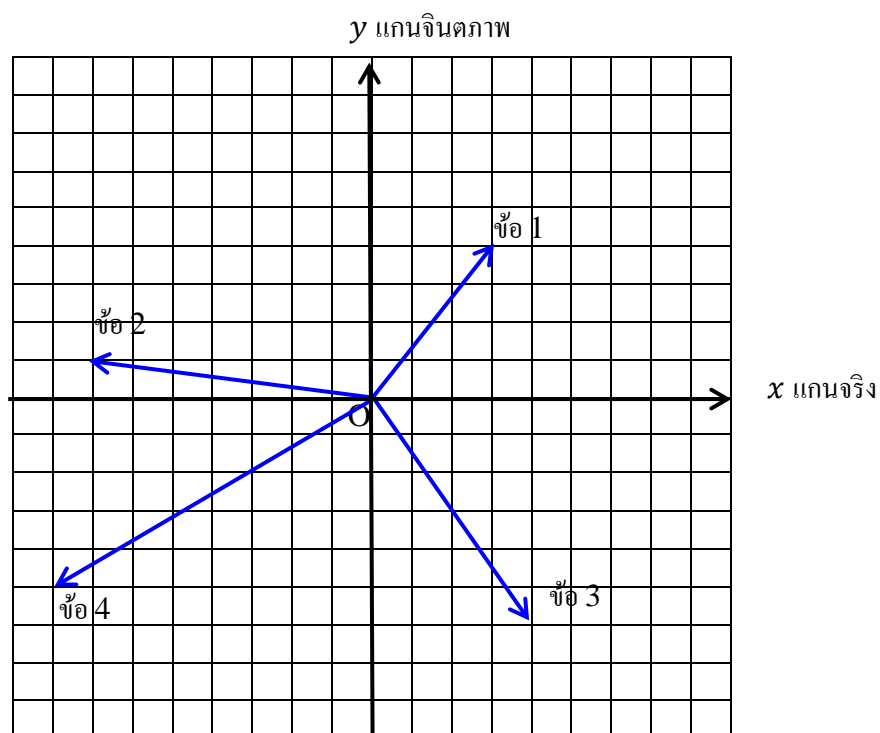


นอกจากจะเขียนจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ แทนด้วยจุดแล้ว ยังสามารถเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ โดยให้จุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุด $(0,0)$ เท่านั้น และให้จุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ เช่น



จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ แทนด้วยเวกเตอร์

1. $3 + 4i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $(3,4)$
2. $-7 + i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $(-7,1)$
3. $4 - 6i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $(4, -6)$
4. $-8 - 5i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $(-8, -5)$



บัตรกิจกรรมที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ แทนด้วยจุดบนกราฟ

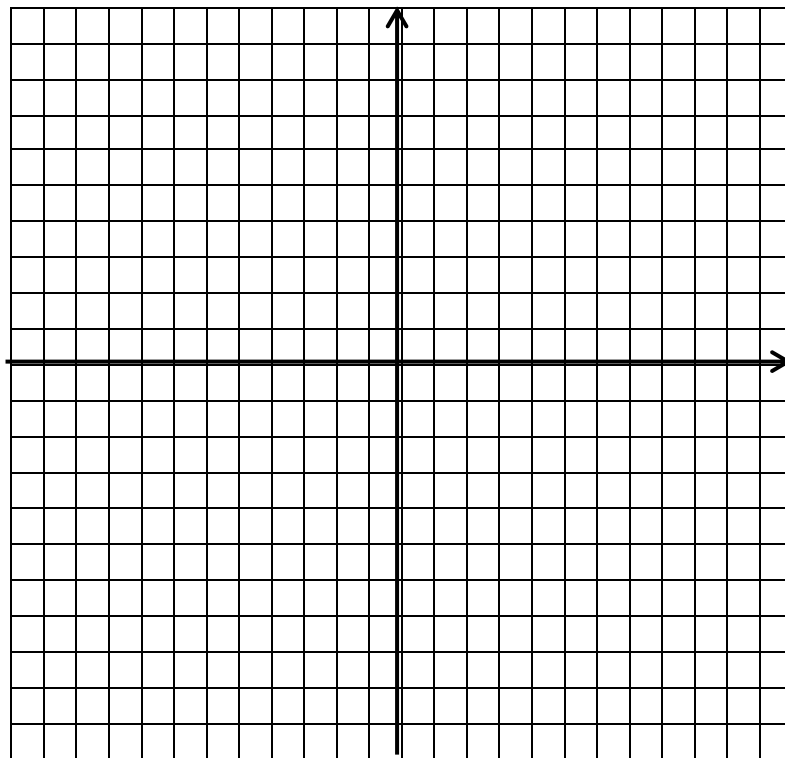
1.1) $4 + 2i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

1.2) $-3 - i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

1.3) $-7 + 3i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

1.4) $6 - 4i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

y แกนจินตภาพ



2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ แทนด้วยจุดบนกราฟ

2.1) $-1 - 2i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

2.2) 5 เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

2.3) $3i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,

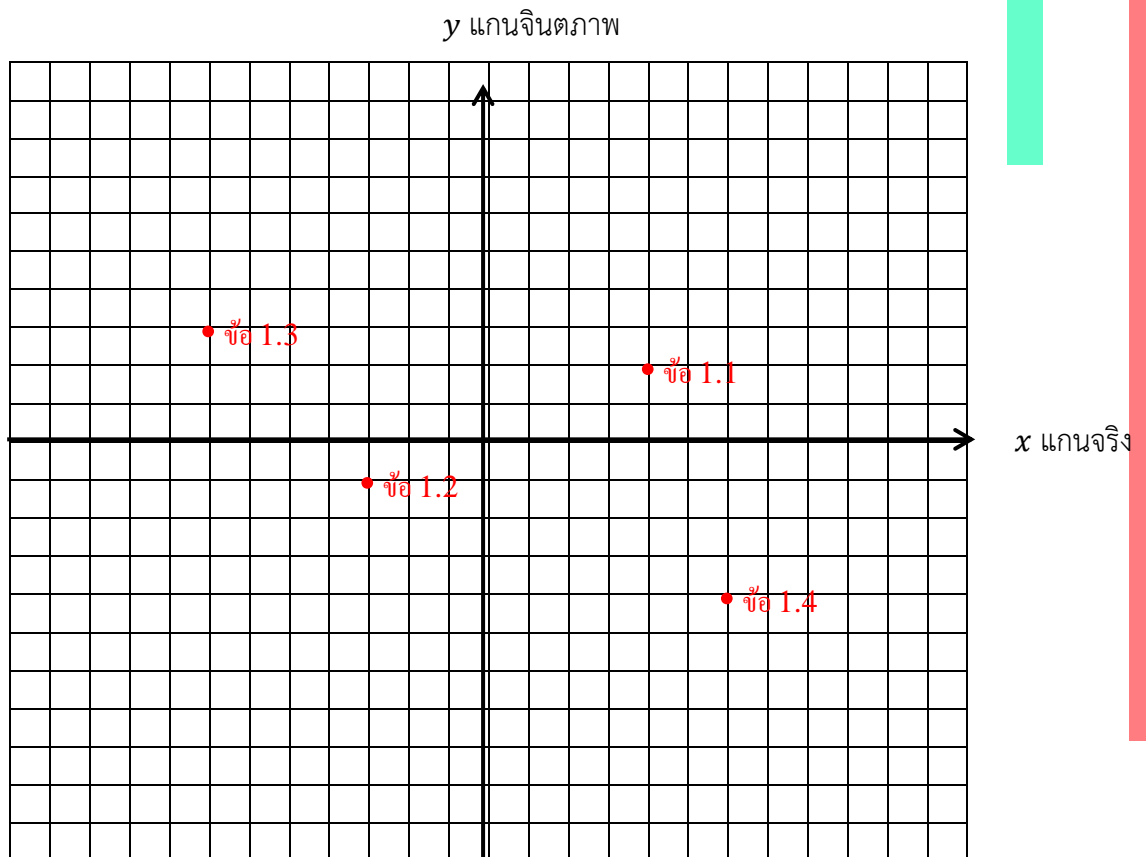
2.4) $-4 + 5i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ (.....,



เฉลยบัติกรกรรมที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ แทนด้วยจุดบนกราฟ
 - 1.1) $4 + 2i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(4,2)$
 - 1.2) $-3 - i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(-3, -1)$
 - 1.3) $-7 + 3i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(-7,3)$
 - 1.4) $6 - 4i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(6, -4)$



2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ แทนด้วยจุดบนกราฟ
 - 2.1) $-1 - 2i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(-1, -2)$
 - 2.2) 5 เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(5,0)$
 - 2.3) $3i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(0,3)$
 - 2.4) $-4 + 5i$ เขียนในรูปคู่อันดับได้เท่ากับ $(-4,5)$



บัตรงานที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยจุดบนกราฟ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ดังต่อไปนี้

$$z_1 = (3,4)$$

$$z_2 = (-2,3)$$

$$z_3 = -4 - 2i$$

$$z_4 = 2 - 2i$$

$$z_5 = (5, -6)$$

$$z_6 = -1 + 7i$$

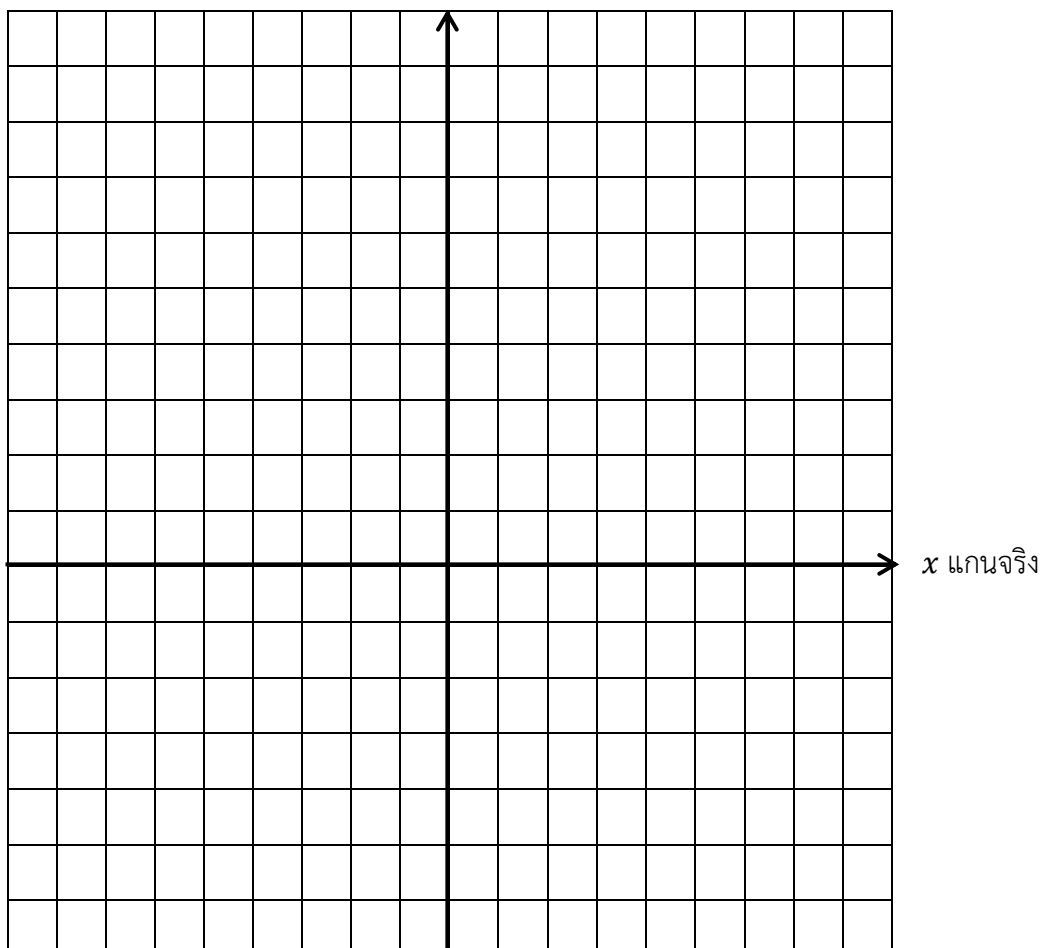
$$z_7 = (-4, -6)$$

$$z_8 = -5 + 6i$$

$$z_9 = -7 - 2i$$

$$z_{10} = 6 + 2i$$

y แกนจินตภาพ



2. จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปของเวกเตอร์ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ดังต่อไปนี้

$$z_1 = (1, 2)$$

$$z_2 = (-2, -3)$$

$$z_3 = -8 - 6i$$

$$z_4 = -5 + 7i$$

$$z_5 = (2, -3)$$

$$z_6 = 4 - 8i$$

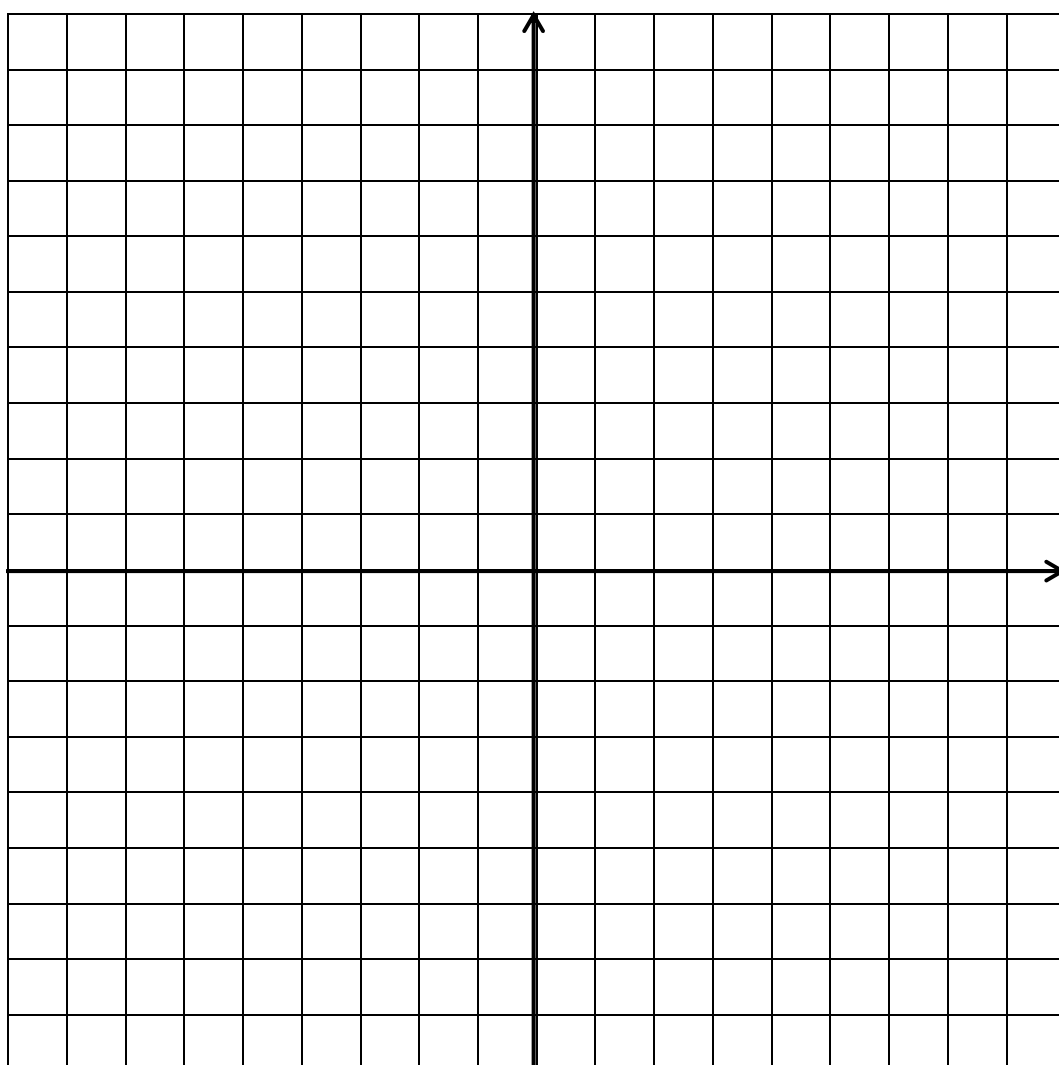
$$z_7 = 5 + 4i$$

$$z_8 = (-5, 2)$$

$$z_9 = -7 - 2i$$

$$z_{10} = 7 + 3i$$

y แกนจินตภาพ



x แกนจริง



เฉลยบัตรงานที่ 9.1 เรื่อง การเขียนจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยจุดบนกราฟ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ดังต่อไปนี้

$$z_1 = (3,4)$$

$$z_2 = (-2,3)$$

$$z_3 = -4 - 2i$$

$$z_4 = 2 - 2i$$

$$z_5 = (5, -6)$$

$$z_6 = -1 + 7i$$

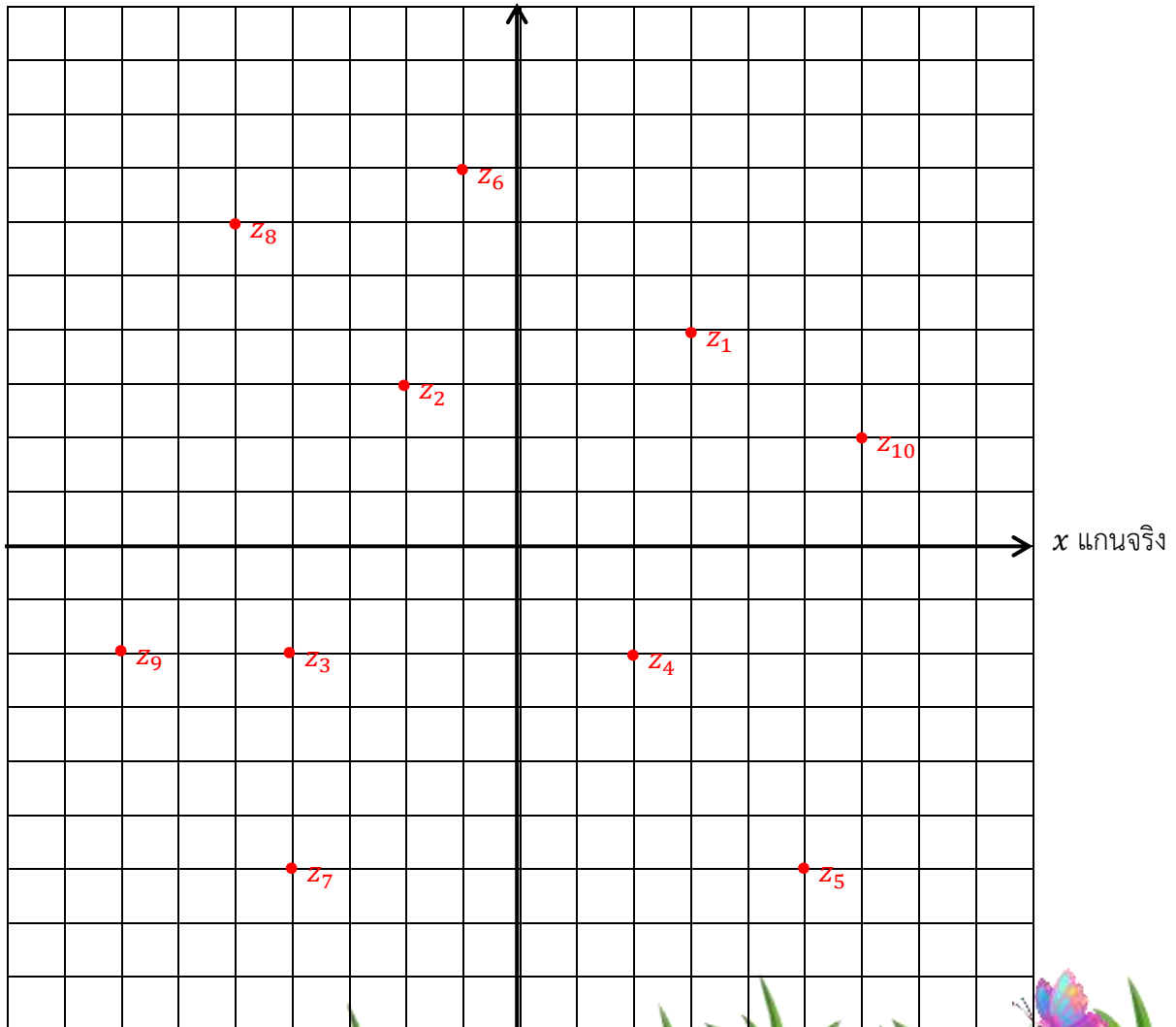
$$z_7 = (-4, -6)$$

$$z_8 = -5 + 6i$$

$$z_9 = -7 - 2i$$

$$z_{10} = 6 + 2i$$

y แกนจินตภาพ



2. จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปของเวกเตอร์ เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนให้ดังต่อไปนี้

$$z_1 = (1, 2)$$

$$z_2 = (-2, -3)$$

$$z_3 = -8 - 6i$$

$$z_4 = -5 + 7i$$

$$z_5 = (2, -3)$$

$$z_6 = 4 - 8i$$

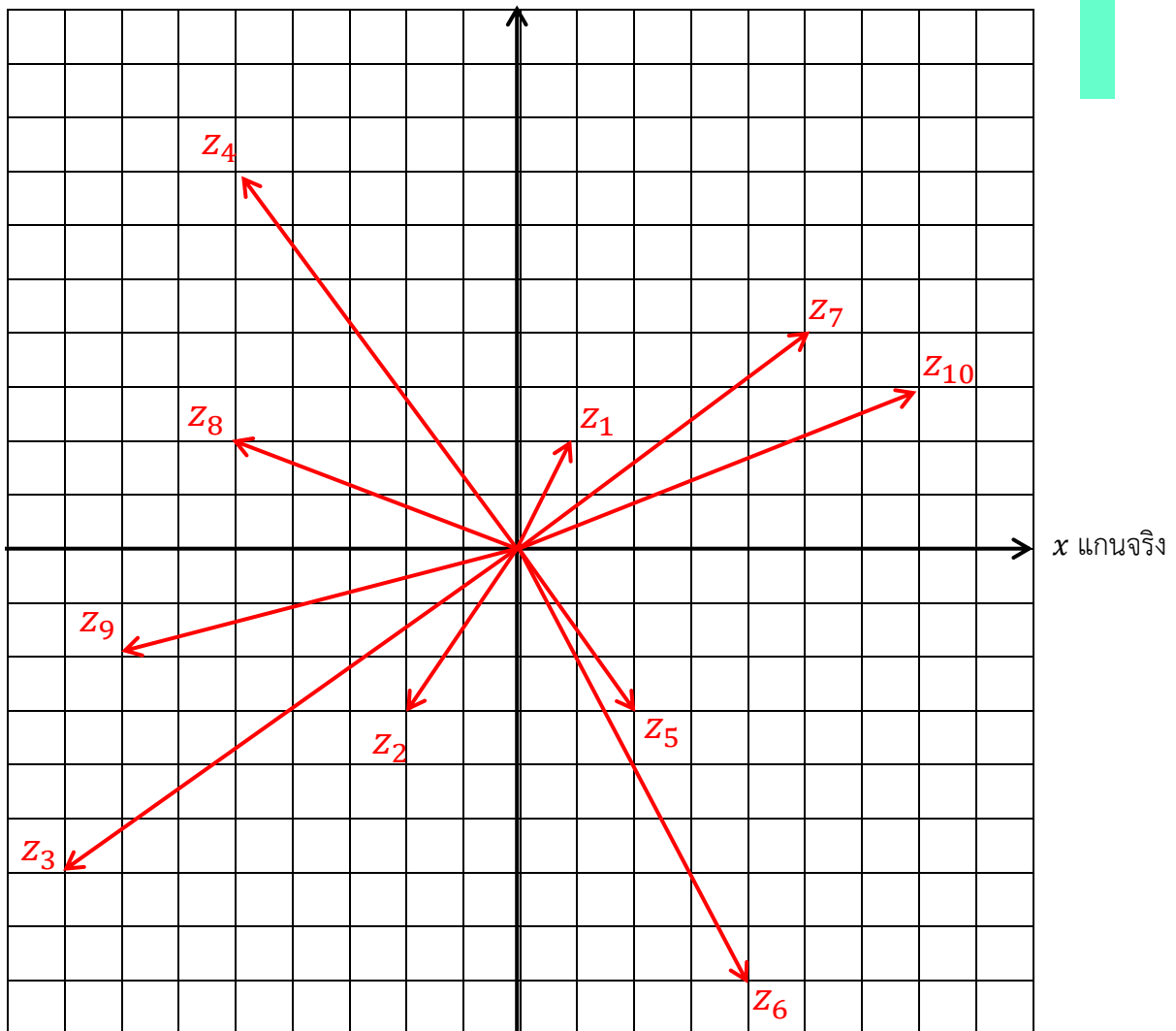
$$z_7 = 5 + 4i$$

$$z_8 = (-5, 2)$$

$$z_9 = -7 - 2i$$

$$z_{10} = 7 + 3i$$

y แกนจินตภาพ



บัตรเนื้อหาที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ สามารถเขียน แทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด (a, b) ดังนั้นค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน คือระยะทางจากจุดเริ่มต้น $(0,0)$ ไปยังจุดสิ้นสุด (a, b) ของเวกเตอร์ และค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

$$z = (a, b) = a + bi$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|z|$ หรือ $|(a, b)|$ หรือ $|a + bi|$

ค่าสัมบูรณ์ของ z สามารถหาได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} |z| &= |(a, b)| \\ &= |a + bi| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $4 - 3i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } 4 - 3i \text{ คือ } |4 - 3i| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

2. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $3 + 5i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } 3 + 5i \text{ คือ } |3 + 5i| &= \sqrt{3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{9 + 25} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

3. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $1 - \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } 1 - \sqrt{3}i \text{ คือ } |1 - \sqrt{3}i| &= \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{1 + 3} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$



4. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $2\sqrt{2} - i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } 2\sqrt{2} - i \text{ คือ } |2\sqrt{2} - i| &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{8 + 1} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

5. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ $13i$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } 13i \text{ คือ } |13i| &= \sqrt{(0)^2 + (13)^2} \\ &= \sqrt{(13)^2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

6. จงหาค่าสัมบูรณ์ของ -18

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ค่าสัมบูรณ์ของ } -18 \text{ คือ } |-18| &= \sqrt{(-18)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{(-18)^2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

ทำได้หรือเปล่า
คิดว่าทำได้อยู่แล้ว



สบายมาก
จ้า



บัตรกิจกรรมที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

จงเขียนค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $14i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ คือ..... =
 =
 =
 =

2. $-\sqrt{2} + 3i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ คือ..... =
 =
 =
 =
 =

3. $8 - 6i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ คือ..... =
 =
 =
 =
 =

4. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ คือ..... =
 =
 =
 =
 =

5. $-5 - 12i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ คือ..... =
 =
 =
 =
 =



เฉลยบัตรกิจกรรมที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. $14i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $14i$ คือ $|14i|$

$$= \sqrt{(0)^2 + 14^2}$$

$$= \sqrt{14^2}$$

$$= 14$$

2. $-\sqrt{2} + 3i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $-\sqrt{2} + 3i$ คือ $|-\sqrt{2} + 3i|$

$$= \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{2 + 9}$$

$$= \sqrt{11}$$

3. $8 - 6i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $8 - 6i$ คือ $|8 - 6i|$

$$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 36}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= 10$$

4. $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i$ คือ $|\sqrt{5} + 2\sqrt{3}i|$

$$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{5 + 12}$$

$$= \sqrt{17}$$

5. $-5 - 12i$

วิธีทำ ค่าสัมบูรณ์ของ $-5 - 12i$ คือ $|-5 - 12i|$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$



บัตรงานที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน Z ต่อไปนี้

1. $z = 1 + \sqrt{3}i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

2. $z = 5 + 4i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

3. $z = -3 + 7i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

4. $z = \frac{1}{2} - i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

6. $z = -2\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

6. $z = 1 - 2\sqrt{3}i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

7. $z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

8. $z = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

9. $z = -4 + 3i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$

10. $z = 3 - 7i$

$z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$
 $z =$



เฉลยใบงานที่ 9.2 เรื่อง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

$$1. z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$z = \sqrt{1 + 3}$$

$$z = \sqrt{4}$$

$$z = 2$$

$$2. z = 5 + 4i$$

$$z = \sqrt{5^2 + 4^2}$$

$$z = \sqrt{25 + 16}$$

$$z = \sqrt{41}$$

$$3. z = -3 + 7i$$

$$z = \sqrt{(-3)^2 + 7^2}$$

$$z = \sqrt{9 + 49}$$

$$z = \sqrt{58}$$

$$4. z = \frac{1}{2} - i$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}$$

$$z = \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$z = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$5. z = -2\sqrt{2} + \sqrt{3}i$$

$$z = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$z = \sqrt{8 + 3}$$

$$z = \sqrt{11}$$

$$6. z = 1 - 2\sqrt{3}i$$

$$z = \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{3})^2}$$

$$z = \sqrt{1 + 12}$$

$$z = \sqrt{13}$$

$$7. z = \sqrt{5} - \sqrt{3}i$$

$$z = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$z = \sqrt{5 + 3}$$

$$z = \sqrt{8}$$

$$z = 2\sqrt{2}$$

$$8. z = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}i$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

$$z = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{36}}$$

$$z = \sqrt{\frac{17}{36}}$$

$$9. z = -4 + 3i$$

$$z = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$$

$$z = \sqrt{16 + 9}$$

$$z = \sqrt{25}$$

$$z = 5$$

$$10. z = 3 - 7i$$

$$z = \sqrt{3^2 + (-7)^2}$$

$$z = \sqrt{9 + 49}$$

$$z = \sqrt{58}$$



บัตรเนื้อหาที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว

1. $|z|^2 = z\bar{z}$
2. $|z| = |-z|$
3. $|z| = |\bar{z}|$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$
6. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$
7. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ เมื่อ $w \neq 0$
8. $|z + w| \leq |z| + |w|$
9. $|z - w| \geq |z| - |w|$
10. $|z - w| \geq ||z| - |w||$

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $z = 4 - 3i$ และ $w = 5 - 12i$ จงหา

1. จงหา $|z + w|$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } |z + w| &= |(4 - 3i) + (5 - 12i)| \\
 &= |9 - 15i| \\
 &= \sqrt{9^2 + (-15)^2} \\
 &= \sqrt{81 + 225} \\
 &= \sqrt{306} \\
 &= 3\sqrt{34}
 \end{aligned}$$



2. จงหา $|z^{-1}|$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } |z^{-1}| &= \frac{1}{|z|} \text{ เพราะว่า } z \neq 0 \\ &= \frac{1}{|4-3i|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{16+9}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

3. จงหา $|zw|$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } |zw| &= |(4-3i)| \cdot |(5-12i)| \\ &= \sqrt{4^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{5^2+(-12)^2} \\ &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{169} \\ &= 5 \cdot 13 \\ &= 65 \end{aligned}$$

4. จงหา $|z^3|$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } |z^3| &= |z|^3 \\ &= |(4-3i)|^3 \\ &= \sqrt{4^2+(-3)^2}^3 \\ &= \sqrt{25}^3 \\ &= 5^3 \\ &= 125 \end{aligned}$$

5. จงหา $\left| \frac{z}{w} \right|$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \left| \frac{z}{w} \right| &= \frac{|z|}{|w|} \text{ เพราะว่า } w \neq 0 \\ &= \frac{|4-3i|}{|5-12i|} \\ &= \frac{\sqrt{4^2+(-3)^2}}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}} \\ &= \frac{5}{13} \end{aligned}$$



บัตรกิจกรรมที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. กำหนดให้ $z = -2 + 4i$ และ $w = \sqrt{3} - \sqrt{6}i$ จงหา

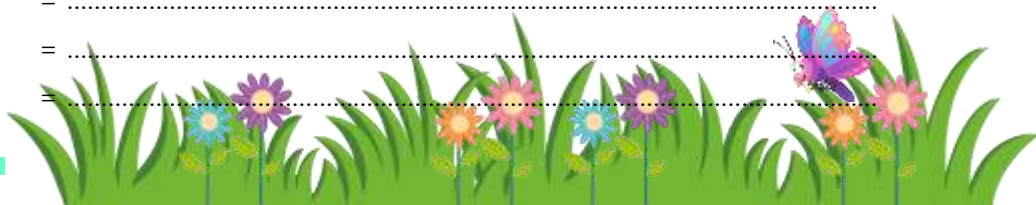
$$\begin{aligned}
 1.1) |z^2 w^3| &= |z^2| \cdot |w^3| \\
 &= |z|^2 \cdot |w|^3 \\
 &= |-2 + 4i|^2 \cdot |\sqrt{3} - \sqrt{6}i|^3 \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2) \left| \frac{z^2}{w} \right| &= \frac{|z|^2}{|w|} \\
 &= \frac{|z|^2}{|w|} \\
 &= \frac{|-2+4i|^2}{|\sqrt{3}-\sqrt{6}i|} \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

2. จงหา $|z|$ เมื่อกำหนดให้

$$\begin{aligned}
 2.1) z &= (1 + \sqrt{3}i)^2 (\sqrt{3} - i)^4 \\
 |z| &= |(1 + \sqrt{3}i)^2 (\sqrt{3} - i)^4| \\
 &= |(1 + \sqrt{3}i)^2| \cdot |(\sqrt{3} - i)^4| \\
 &= |1 + \sqrt{3}i|^2 \cdot |\sqrt{3} - i|^4 \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2) z &= \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4}{-1-\sqrt{3}i} \\
 |z| &= \left| \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4}{-1-\sqrt{3}i} \right| \\
 &= \frac{|(1+\sqrt{3}i)(-1+i)^4|}{|-1-\sqrt{3}i|} \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots \\
 &= \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$



เฉลยบัตรกิจกรรมที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. กำหนดให้ $z = -2 + 4i$ และ $w = \sqrt{3} - \sqrt{6}i$ จงหา

$$\begin{aligned}
 1.1) |z^2 w^3| &= |z^2| \cdot |w^3| \\
 &= |z|^2 \cdot |w|^3 \\
 &= |-2 + 4i|^2 \cdot |\sqrt{3} - \sqrt{6}i|^3 \\
 &= (\sqrt{(-2)^2 + 4^2})^2 \cdot (\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{6})^2})^3 \\
 &= (\sqrt{20})^2 \cdot (\sqrt{9})^3 \\
 &= 20 \cdot 27 \\
 &= 540
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2) \left| \frac{z^2}{w} \right| &= \frac{|z|^2}{|w|} \\
 &= \frac{|z^2|}{|w|} \\
 &= \frac{|-2+4i|^2}{|\sqrt{3}-\sqrt{6}i|} \\
 &= \frac{\sqrt{(-2)^2+4^2}}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-\sqrt{6})^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{9}} \\
 &= \frac{2\sqrt{5}}{3}
 \end{aligned}$$



2. จงหา $|z|$ เมื่อกำหนดให้

$$\begin{aligned}
 2.1) z &= (1 + \sqrt{3}i)^2(\sqrt{3} - i)^4 \\
 |z| &= |(1 + \sqrt{3}i)^2(\sqrt{3} - i)^4| \\
 &= |(1 + \sqrt{3}i)^2| \cdot |(\sqrt{3} - i)^4| \\
 &= |1 + \sqrt{3}i|^2 \cdot |\sqrt{3} - i|^4 \\
 &= \left(\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}\right)^4 \\
 &= (\sqrt{9 + 3})^2 \cdot (\sqrt{3 + 1})^4 \\
 &= (\sqrt{9 + 3})^2 \cdot (\sqrt{3 + 1})^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2) z &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)(-1 + i)^4}{-1 - \sqrt{3}i} \\
 |z| &= \left| \frac{(1 + \sqrt{3}i)(-1 + i)^4}{-1 - \sqrt{3}i} \right| \\
 &= \frac{|(1 + \sqrt{3}i)(-1 + i)^4|}{|-1 - \sqrt{3}i|} \\
 &= \frac{|(1 + \sqrt{3}i)| |(-1 + i)^4|}{|-1 - \sqrt{3}i|} \\
 &= \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2}^4}{\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}^4}{\sqrt{4}} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$



บัตรงานที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงหา $|z|$ เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

1.1) $z = (2 + 3i) + (4 - 5i)$

=
 =
 =
 =
 =

1.2) $z = (2 + 3i) - (4 - 5i)$

=
 =
 =
 =
 =

1.3) $z = (2 + 3i) \cdot (4 - 5i)$

=
 =
 =
 =
 =

1.4) $z = \frac{(2+3i)}{(4-5i)}$

=
 =
 =
 =
 =



2. กำหนดให้ $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $w = -2 + 3i$ จงหา

2.1) $|zw|$

=
=
=
=
=
=

2.2) $|z^2w^3|$

=
=
=
=
=
=

2.3) $\left|\frac{z^5}{w^2}\right|$

=
=
=
=
=
=

2.4) $|-4w^{-1}(z^{-1})^5|$

=
=
=
=
=
=



เฉลยบัตรงานที่ 9.3 เรื่อง สมบัติของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....กลุ่มที่.....

1. จงหา $|z|$ เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 1.1) z &= (2 + 3i) + (4 - 5i) \\
 &= |(2 + 3i) + (4 - 5i)| \\
 &= |(2 + 4) + (3 - 5)i| \\
 &= |6 - 2i| \\
 &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 4} \\
 &= \sqrt{40} \\
 &= 2\sqrt{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.2) z &= (2 + 3i) - (4 - 5i) \\
 &= |(2 + 3i) - (4 - 5i)| \\
 &= |(2 - 4) + (3 + 5)i| \\
 &= |-2 + 8i| \\
 &= \sqrt{(-2)^2 + 8^2} \\
 &= \sqrt{4 + 64} \\
 &= \sqrt{68} \\
 &= 2\sqrt{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.3) z &= (2 + 3i) \cdot (4 - 5i) \\
 &= |(2 + 3i) \cdot (4 - 5i)| \\
 &= |(2 + 3i)| \cdot |4 - 5i| \\
 &= \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-5)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 9} \cdot \sqrt{16 + 25} \\
 &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{41} \\
 &= \sqrt{533}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 1.4) z &= \frac{(2+3i)}{(4-5i)} \\
 &= \frac{|(2+3i)|}{|(4-5i)|} \\
 &= \frac{|2+3i|}{|4-5i|} \\
 &= \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{4^2+(-5)^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{16+25}} \\
 &= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}}
 \end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ และ $w = -2 + 3i$ จงหา

2.1) $|zw|$

$$\begin{aligned}
 |zw| &= \left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \cdot (-2 + 3i) \right| \\
 &= \left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right| \cdot |-2 + 3i| \\
 &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 3^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{4 + 9} \\
 &= \sqrt{\frac{4}{4}} \cdot \sqrt{13} \\
 &= \sqrt{1} \cdot \sqrt{13} \\
 &= \sqrt{13}
 \end{aligned}$$



$$2.2) |z^2 w^3|$$

$$\begin{aligned} |z^2 w^3| &= \left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 \cdot (-2 + 3i)^3 \right| \\ &= \left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right|^2 \cdot |-2 + 3i|^3 \\ &= \left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \right)^3 \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} \right)^2 \cdot \sqrt{4 + 9}^3 \\ &= (\sqrt{13})^3 \\ &= 13\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$2.3) \left| \frac{z^5}{w^2} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|^5}{|-2 + 3i|^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \right)^5}{\left(\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \right)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{1})^5}{(\sqrt{13})^2} \\ &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$2.4) |-4w^{-1}(z^{-1})^5|$$

$$\begin{aligned} &= |-4| \cdot |w^{-1}| \cdot |z^{-1}|^5 \\ &= 4 \cdot \left| \frac{1}{w} \right| \cdot \frac{1}{|z^5|} \\ &= 4 \cdot \left| \frac{1}{-2 + 3i} \right| \cdot \frac{1}{\left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^5 \right|} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} \cdot \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^5} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}} \right)^5} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{13}} \end{aligned}$$



แบบบันทึกกิจกรรมการเรียนรู้

กลุ่มที่.....ชื่อกลุ่ม.....ชั้น.....
ให้นักเรียนสรุปใจความสำคัญของหัวข้อต่อไปนี้

กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

.....

.....

.....

ให้นักเรียนยกตัวอย่างค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน 3 ตัวอย่าง

.....

.....

.....

ให้นักเรียนเขียนแบบฝึกหัดเกี่ยวกับกราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
1 ข้อ พร้อมแสดงวิธีทำ



แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง

ให้นักเรียนทำเครื่องหมายกากบาท × หน้าคำตอบข้อ ก, ข, ค และ ง ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว โดยใช้เวลาสอบ 10 นาที

1. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = 4 - 2i$

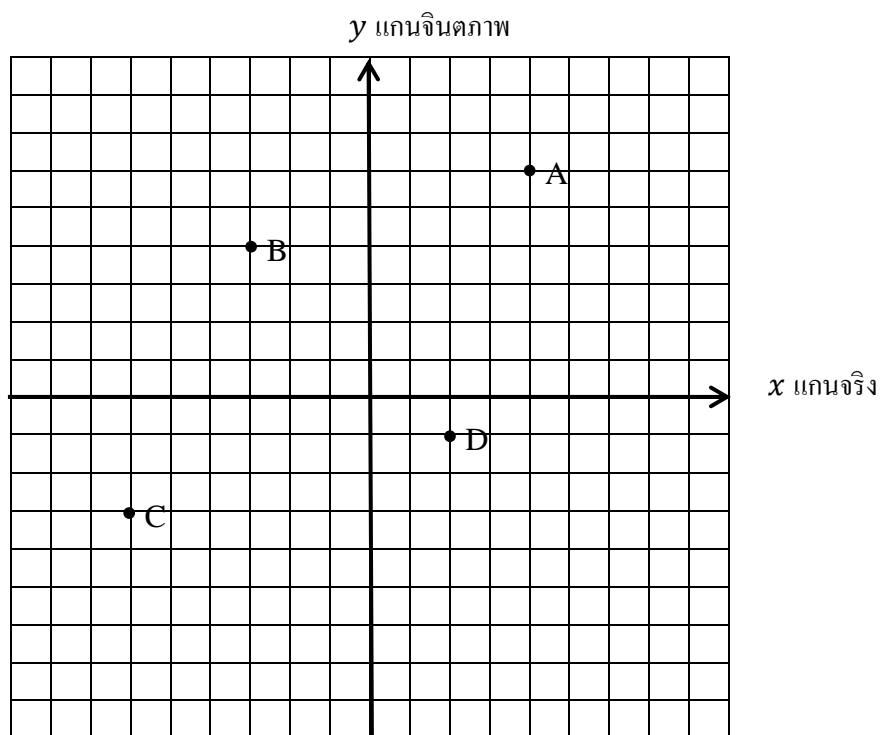
ก. $|z| = 5\sqrt{2}$

ข. $|z| = \sqrt{2}$

ค. $|z| = 3\sqrt{5}$

ง. $|z| = 2\sqrt{5}$

2. จากกราฟที่กำหนดให้ จุด A, B, C และ D เป็นจุดที่แทนจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด



ก. $-6 - 3i, 4 + 6i, -3 + 4i, 2 - i$ ตามลำดับ

ข. $4 + 6i, -6 - 3i, -3 + 4i, 2 - i$ ตามลำดับ

ค. $4 + 6i, -3 + 4i, -6 - 3i, 2 - i$ ตามลำดับ

ง. $-3 + 4i, 4 + 6i, 2 - i, -6 - 3i$ ตามลำดับ

3. ค่าของ $|i^{80}| - |8i^{24}|$ คือข้อใด

- ก. -7
- ข. 0
- ค. 3
- ง. 5

4. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = -7i$

- ก. $|z| = \sqrt{0^2 - 7i^2}$
- ข. $|z| = \sqrt{0^2 + (-7i)^2}$
- ค. $|z| = \sqrt{0^2 + (-7)^2}$
- ง. $|z| = \sqrt{0^2 + 7^2}$

5. กำหนดให้ $w = 12 + 5i$ และ $z = -3 + 4i$ ค่าของ $|zw^{-1}|$ คือข้อใด

- ก. $\frac{13}{5}$
- ข. $\frac{5}{13}$
- ค. 65
- ง. -65

6. กำหนดให้ $z = \frac{1-2i}{i}$ จงหา $|z^2 - 6z + 9|$

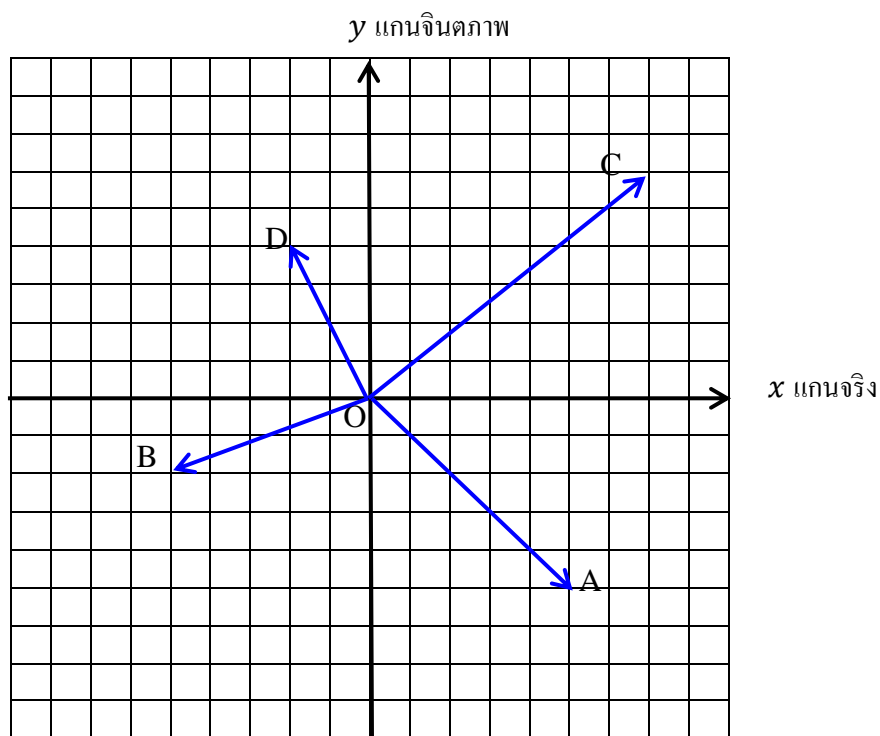
- ก. $\sqrt{26}$
- ข. 26
- ค. $\sqrt{27}$
- ง. 27

7. ข้อใดเป็นจริง

- ก. $|3 - 4i| = |-3 - 4i|$
- ข. $|-5 - 2i| < |4 + 3i|$
- ค. $|5i| \neq |5|$
- ง. $\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right| > \left|\frac{1}{4}\right|$



ใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบข้อ 8 - 9



8. จำนวนเชิงซ้อน $-5 - 2i$, $5 - 5i$ เขียนแทนด้วยเวกเตอร์ใด

ก. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ตามลำดับ

ข. $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ ตามลำดับ

ค. $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$ ตามลำดับ

ง. $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}$ ตามลำดับ

9. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. \overrightarrow{OD} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ข. \overrightarrow{OC} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ค. \overrightarrow{OB} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

ง. \overrightarrow{OA} เขียนแทนด้วย $-2 + 4i$

10. ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $z = (1 + \sqrt{3}i)^2(\sqrt{3} - i)^4$ คือข้อใด

ก. 2^2

ข. 2^4

ค. 2^6

ง. 2^8



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

- | | |
|------|-------|
| 1. ง | 2. ค |
| 3. ก | 4. ค |
| 5. ข | 6. ง |
| 7. ก | 8. ข |
| 9. ก | 10. ค |



บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์และคณะ. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2** ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560).พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรเจริญทัศน์ อจท. จำกัด.
(2562).

กวียา เนาวประทีป. เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ : **จำนวนเชิงซ้อน**. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซนเตอร์.
(2547).

ประทุมพร ศรีวัฒนกุล.หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4 : กรุงเทพฯ :
สำนักพิมพ์วัฒนาพานิช จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5** ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
(ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560).พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.2562.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6**.พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ :พิมพ์ที่โรงพิมพ์ สกสค.
ลาดพร้าว .2554.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้
เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**.พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ :พิมพ์ที่โรงพิมพ์
สกสค. ลาดพร้าว .2551.

