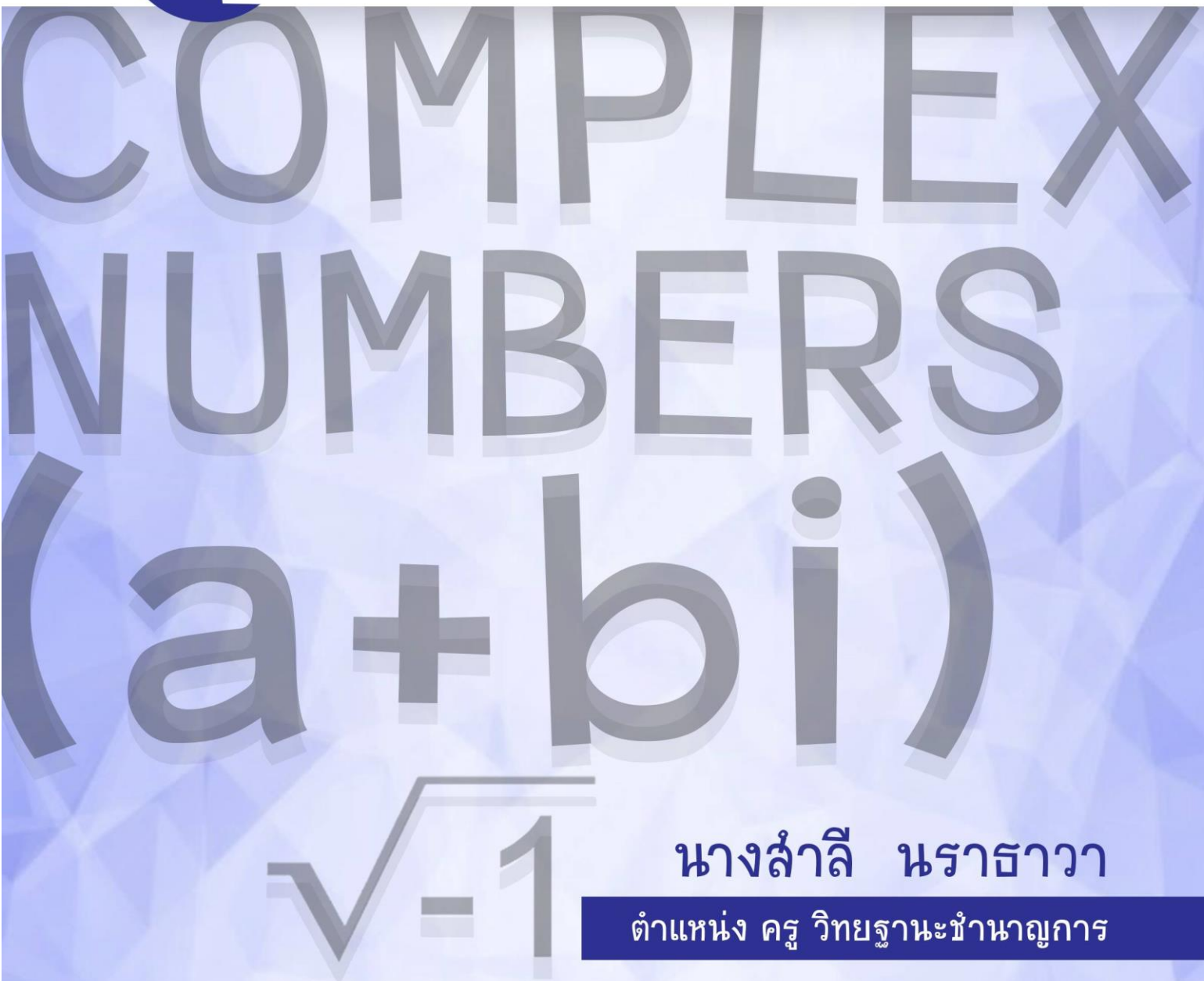


แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน
รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค32202
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เล่ม

1

การสร้างจำนวนเชิงซ้อน



นางสาวลิ นรธาวา

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะชำนาญการ

โรงเรียนมาบตาพุดพันพิทยาคาร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 18

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน รายวิชา คณิตศาสตร์ ค32202 สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดทำขึ้นตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 เป็นแบบฝึกทักษะที่มีวัตถุประสงค์เพื่อจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญและพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนให้สูงขึ้น โดยเน้นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน เพื่อส่งเสริมให้เกิดความรู้ความเข้าใจ การมีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา การให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ ความสมเหตุสมผลของคำตอบและสรุปองค์ความรู้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม พัฒนาไปสู่ทักษะการคิด วิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียน ทั้งยังส่งเสริมให้นักเรียนมีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีระเบียบวินัย มีความซื่อสัตย์สุจริตและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนความสามารถในการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ผู้จัดทำได้พัฒนา ปรับปรุงและเผยแพร่แบบฝึกทักษะ รวมทั้งสิ้นจำนวน 7 เล่ม ดังนี้

- เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน
- เล่มที่ 2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
- เล่มที่ 3 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
- เล่มที่ 4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
- เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
- เล่มที่ 6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- เล่มที่ 7 สมการพหุนาม

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้ จะเป็นประโยชน์สูงสุดต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอนของครูและนักเรียน เพื่อที่จะสามารถพัฒนาคุณภาพนักเรียนตามลักษณะที่พึงประสงค์ สามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างเหมาะสม

สำลี นราธาวา

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	1
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู	2
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน	3
ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	4
แบบทดสอบก่อนเรียน	5
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	7
สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ฯ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้	8
ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง หน่วยจินตภาพ	9
แบบฝึกทักษะที่ 1.1	14
ใบความรู้ที่ 1.2 เรื่อง สัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	16
แบบฝึกทักษะที่ 1.2	17
ใบความรู้ที่ 1.3 เรื่อง การเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน	18
แบบฝึกทักษะที่ 1.3	20
แบบทดสอบหลังเรียน	23
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	25
บรรณานุกรม	26
ภาคผนวก	27
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	28
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1	29
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2	31
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3	32
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	34
แบบบันทึกผลคะแนน	35

คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

1. เอกสารฉบับนี้เป็นแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 มีทั้งหมด 7 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 3 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

เล่มที่ 6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 7 สมการพหุนาม

2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ให้ผู้เรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ เป็นเล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน ประกอบด้วย คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ แบบทดสอบหลังเรียน เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน-หลังเรียนและเฉลยแบบฝึกทักษะ

4. แบบฝึกทักษะเล่มนี้ใช้เวลาเรียน 5 ชั่วโมง

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มนี้ ครูผู้สอนควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะ ดังต่อไปนี้

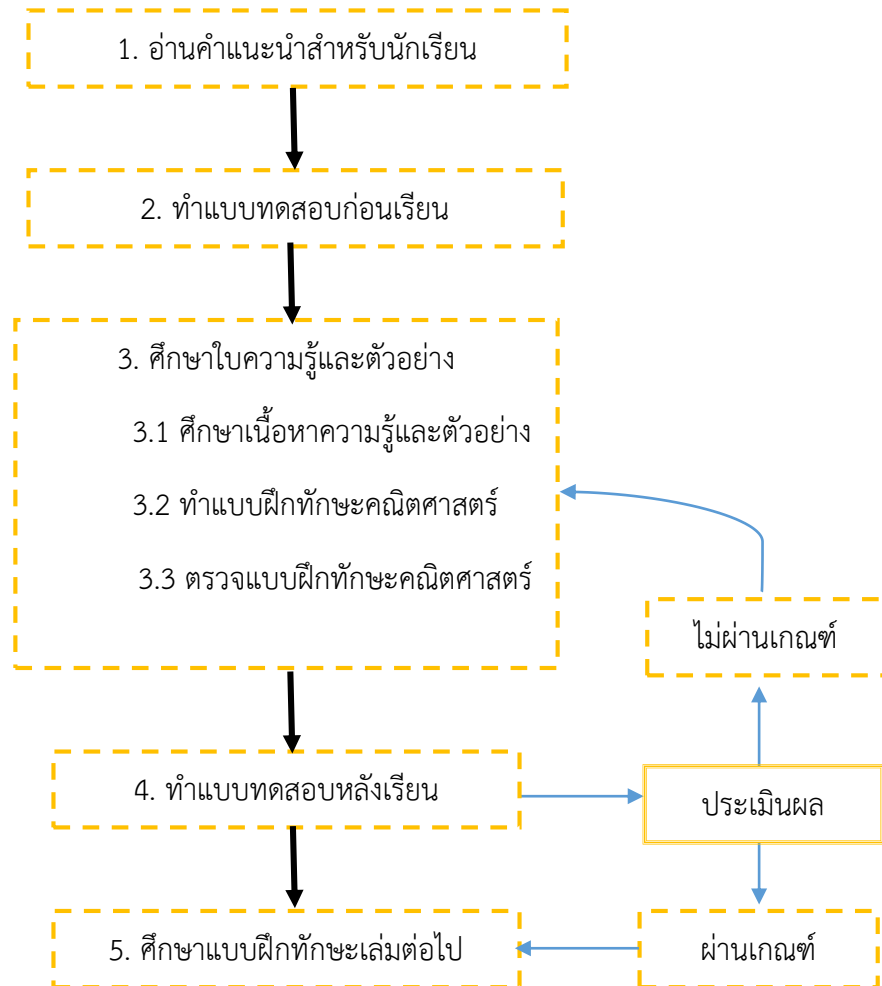
1. ครูต้องศึกษาแบบฝึกทักษะและทำความเข้าใจกับเนื้อหาสาระก่อนนำไปใช้จัดกิจกรรมการเรียนการสอน
2. ครูเตรียมแบบฝึกทักษะให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผลและประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอนและวิธีการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะอย่างชัดเจนและประโยชน์ที่ได้รับจากการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้
5. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียนในการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้ให้เข้าใจและเน้นย้ำความซื่อสัตย์ไม่ดูเฉยก่อน หรือไม่ลอกเพื่อน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจบทบาทตัวเองในการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน
7. แจ้งผลการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
8. ดำเนินการสอบตามกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้
9. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 แล้วเปลี่ยนกันตรวจตามเฉลย
10. ครูสังเกต ดูแลความตั้งใจ ความสนใจในการเรียน การทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มของนักเรียนทุกกลุ่มอย่างใกล้ชิด ถ้ากลุ่มใดมีปัญหาครูจะได้ทำการช่วยเหลือให้คำแนะนำทันที
11. เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน อาจไม่เท่ากัน ครูควรยืดหยุ่นตามความเหมาะสม
12. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะเสร็จสิ้น เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
13. ประเมินผลการเรียนของนักเรียนอย่างต่อเนื่องและให้แรงเสริมในการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียน

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้นักเรียนควรปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. อ่านคำชี้แจงเกี่ยวกับการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียนให้เข้าใจก่อนศึกษา
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน
3. ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้และทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 ด้วยตนเอง ถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ให้กลับไปศึกษาเนื้อหาใหม่อีกครั้งหรือปรึกษาครูที่สอน
4. เปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกทักษะตามเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้
5. ทำแบบทดสอบหลังเรียน เมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 เสร็จสิ้น เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
5. การทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะ แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียนให้นักเรียนตั้งใจทำและมีความซื่อสัตย์โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน

ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน





- คำชี้แจง 1. แบบทดสอบก่อนเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก
จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 10 นาที
2. นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว ในแต่ละข้อ
แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนน คือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

-
1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนจินตภาพแท้
- ก. $(-5, 0)$ ข. $(0, -5)$
ค. -6 ง. $2 + 3i$
2. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- ก. $\sqrt{-5}\sqrt{-3} = \sqrt{21}$ ข. $\sqrt{-25}\sqrt{-9} = 15$
ค. $\sqrt{-2} = 2i$ ง. $\sqrt{-8} = 2\sqrt{2}i$
3. i^{345} มีค่าตรงกับข้อใด
- ก. 1 ข. -1
ค. $-i$ ง. i
4. $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{202}$ มีค่าตรงกับข้อใด
- ก. 1 ข. $1 - i$
ค. $-1 + i$ ง. i
5. กำหนดให้ $z = 4 + 7i$ ข้อใดกล่าวถูกต้อง
- ก. $\text{Re}(z) = 4$ ข. $\text{Im}(z) = -7$
ค. $\text{Re}(z) = i$ ง. $\text{Im}(z) = 7i$
6. ข้อใดมีค่าเท่ากับ $(3 - 5i) + (5 + 3i)$
- ก. $6 - 10i$ ข. 8
ค. $-2i$ ง. $8 - 2i$
7. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- ก. $i + i^2 + i^3 + i^4 = -1$ ข. $(i)(i^2)(i^3)(i^4) = 0$
ค. $\sqrt{(-4)(-3)} = (\sqrt{-4})(\sqrt{-3})$ ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง
8. ข้อใดมีค่าเท่ากับ $(3 + 2i)(2 - 5i)$
- ก. $6 - 10i$ ข. $10 - 15i$
ค. $16 - 11i$ ง. $16 - 19i$

9. กำหนดให้ $(a - bi) + (3 + 2i) = 1 - 3i$ ค่าของ a และ b ตรงกับข้อใด

ก. $a = -2$ และ $b = 1$

ข. $a = -2$ และ $b = 5$

ค. $a = -4$ และ $b = 1$

ง. $a = 4$ และ $b = -1$

10. กำหนดให้ $(x + y) + i = 5 + (x - y)i$ แล้ว xy ตรงกับข้อใด

ก. 6

ข. 3

ค. 0

ง. -2

ⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇⓇ

กระดาษคำตอบ แบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ..... เลขที่..... ระดับชั้น..... ห้อง.....

คำชี้แจง : ให้เลือกคำตอบจากข้อสอบก่อนเรียนแล้วทำเครื่องหมาย X ลงในช่องที่ถูกที่สุด

ข้อ	ก	ข	ค	ง	คะแนน
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
รวมคะแนนที่ได้					

ผู้ตรวจ.....

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ. 2551

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน ค1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และสามารถใช้ในการดำเนินการในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำเสนอเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน ค4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

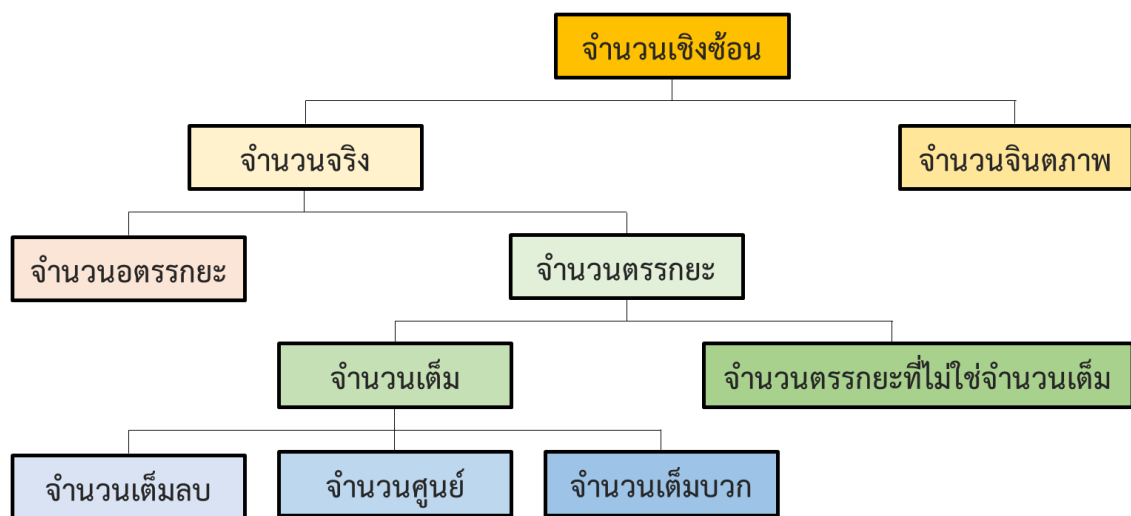
1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน เขียนกราฟและหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
2. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรีไม่เกินสาม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปหน่วยจินตภาพได้
2. นักเรียนสามารถหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้
3. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าจำนวนใดเป็นจำนวนเชิงซ้อน
4. นักเรียนสามารถบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้
5. นักเรียนมีความเข้าใจหลักการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน
6. นักเรียนสามารถหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนได้
7. นักเรียนสามารถหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง หน่วยจินตภาพ (Imaginary unit)

ในระบบจำนวนจริงสมการพหุนามบางสมการ เช่น $x^2 + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบ เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ จะมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เพื่อให้สามารถศึกษาเกี่ยวกับจำนวนได้กว้างขึ้นและหาคำตอบของสมการพหุนามทุกสมการได้เสมอ นักคณิตศาสตร์จึงได้สร้างระบบจำนวนขึ้น โดยขยายจากเซตของจำนวนจริงออกไป เรียกจำนวนในระบบที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่าจำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) ซึ่งนอกจากจะแก้ปัญหาในเรื่องการมีคำตอบของสมการใดๆ แล้ว ยังสามารถนำไปประยุกต์อย่างกว้างขวางกับสาขาต่างๆ ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น วงจรอิเล็กทรอนิกส์ กลศาสตร์ของไหล เป็นต้น ซึ่งมีโครงสร้าง ดังนี้



พิจารณา การหาคำตอบ สมการ

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

พบว่า 1 และ -1 เป็นคำตอบของสมการ

$$x^2 - 1 = 0$$

แต่ สมการ

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm \sqrt{-1}$$

พบว่า $\sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง เพราะไม่มีจำนวนจริงใด เมื่อนำมายกกำลังสอง แล้วได้จำนวนลบ

ดังนั้น นักคณิตศาสตร์ จึงใช้สัญลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$

ซึ่ง

$$i^2 = -1$$

นิยาม $\sqrt{-1}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ i โดยที่ $i^2 = -1$ เรียก i ว่า หน่วยจินตภาพ (Imaginary unit)

นิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว จะเรียก $\sqrt{-a}$ ว่า จำนวนจินตภาพแท้
และ $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$ เมื่อ $a > 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป หน่วยจินตภาพ

$$\begin{array}{llll} 1) \sqrt{-3} & = \sqrt{3}\sqrt{-1} & = \sqrt{3}i \\ 2) \sqrt{-8} & = \sqrt{8}\sqrt{-1} & = 2\sqrt{2}i \\ 3) \sqrt{-2}\sqrt{-5} & = \sqrt{2}i\sqrt{5}i & = \sqrt{10}i^2 & = -\sqrt{10} \\ 4) \sqrt{-9}\sqrt{-16} & = (3i)(4i) & = 12i^2 & = -12 \end{array}$$

ข้อพึงระวัง

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$

เช่น

$$\begin{array}{llll} \text{พิจารณา } \sqrt{-4}\sqrt{-9} & = (2i)(3i) & = -6 \\ \text{แต่ } \sqrt{(-4)(-9)} & = \sqrt{36} & = 6 \\ \text{ดังนั้น } \sqrt{-4}\sqrt{-9} & \neq \sqrt{(-4)(-9)} \end{array}$$

การหาค่า i^n

ลองพิจารณาการหาค่า i^n ต่อไปนี้ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned}
 i^1 &= i \\
 i^2 &= -1 \\
 i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)(i) = -i \\
 i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1 \\
 i^5 &= i^4 \cdot i = (1)(i) = i \\
 i^6 &= i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1 \\
 i^7 &= i^4 \cdot i^3 = (1)(-i) = -i \\
 i^8 &= i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = 1 \\
 i^9 &= i^8 \cdot i = (1)(i) = i \\
 i^{10} &= i^8 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1 \\
 i^{11} &= i^8 \cdot i^3 = (1)(-i) = -i \\
 i^{12} &= i^8 \cdot i^4 = (1)(1) = 1 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

จากการหาค่า i^n ข้างต้น จะพบว่า ค่าของ i^n จะเป็นไปได้เพียง 4 ค่าเท่านั้น คือ $i, -1, -i, 1$ ซึ่งจัดกลุ่มตามลักษณะของคำตอบได้ ดังนี้

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i$$

$$i^9 = i$$

$$\vdots$$

กลุ่มที่เลขชี้กำลังถูก

หารด้วย 4 แล้ว

เหลือเศษ 1

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = -1$$

$$i^{10} = -1$$

$$\vdots$$

กลุ่มที่เลขชี้กำลังถูก

หารด้วย 4 แล้ว

เหลือเศษ 2

$$i^3 = -i$$

$$i^7 = -i$$

$$i^{11} = -i$$

$$\vdots$$

กลุ่มที่เลขชี้กำลังถูก

หารด้วย 4 แล้ว

เหลือเศษ 3

$$i^4 = 1$$

$$i^8 = 1$$

$$i^{12} = 1$$

$$\vdots$$

กลุ่มที่เลขชี้กำลังถูก

หารด้วย 4 แล้ว

ลงตัว

จากข้อมูลข้างต้น สรุปได้ว่า ค่าของ i^n จะมีค่าแตกต่างกัน 4 ค่า คือ $i, -1, -i, 1$ หาได้จาก

1. ถ้า n หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1 มีค่า i
2. ถ้า n หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่า -1
3. ถ้า n หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3 มีค่า $-i$
4. ถ้า n หารด้วย 4 แล้วลงตัว มีค่า 1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $i^{18}, i^{24}, i^{30}, i^{45}, i^{99}, i^{181}, i^{1984}$

วิธีทำ	$i^{18} = -1$	เนื่องจาก 18 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2
	$i^{24} = 1$	เนื่องจาก 24 หารด้วย 4 ลงตัว
	$i^{30} = -1$	เนื่องจาก 30 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2
	$i^{45} = i$	เนื่องจาก 45 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1
	$i^{99} = -i$	เนื่องจาก 99 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3
	$i^{181} = i$	เนื่องจาก 181 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1
	$i^{1984} = 1$	เนื่องจาก 1984 หารด้วย 4 ลงตัว

พิจารณาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + i^4 &= i + (-1) + (-i) + 1 = 0 \\ i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} &= -i + 1 + i + (-1) = 0 \\ i^{104} + i^{105} + i^{106} + i^{107} &= 1 + i + (-1) + (-i) = 0 \end{aligned}$$

จากข้อมูลข้างต้น สรุปได้ว่า

ถ้าให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$
นั่นคือ i ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน บวกกันได้ 0 เสมอ

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาค่าของจำนวนต่อไปนี้

$$\begin{aligned} (i)(i^2)(i^3)(i^4) &= (i)(-1)(-i)(1) = -1 \\ (i^7)(i^8)(i^9)(i^{10}) &= (-i)(1)(i)(-1) = -1 \\ (i^{104})(i^{105})(i^{106})(i^{107}) &= (1)(i)(-1)(-i) = -1 \end{aligned}$$

จากข้อมูลข้างต้น สรุปได้ว่า

ถ้าให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า $(i^n)(i^{n+1})(i^{n+2})(i^{n+3}) = -1$
นั่นคือ i ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน คูณกันได้ -1 เสมอ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $i^{202} + i^{203} + i^{204} + i^{205}$

2. $i^{21} + i^{22} + i^{23} + i^{24} + \dots + i^{30}$

3. $(i^{73})(i^{74})(i^{75})(i^{76})$

4. $(i^{13})(i^{14})(i^{15}) \dots (i^{24})$

วิธีทำ 1. $i^{202} + i^{203} + i^{204} + i^{205} = 0$

(เนื่องจาก i ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน บวกกันได้ 0 เสมอ)

$$\begin{aligned}
 2. \underbrace{i^{21} + i^{22} + i^{23} + i^{24}}_0 + \underbrace{i^{25} + i^{26} + i^{27} + i^{28}}_0 + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\
 &= i^{4(7)+1} + i^{4(7)+2} \\
 &= i - 1
 \end{aligned}$$

3. $(i^{73})(i^{74})(i^{75})(i^{76}) = -1$

(เนื่องจาก i ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน คูณกันได้ -1 เสมอ)

$$\begin{aligned}
 4. \underbrace{(i^{13})(i^{14})(i^{15})(i^{16})}_{-1} \underbrace{(i^{17})(i^{18})(i^{19})(i^{20})}_{-1} \underbrace{(i^{21})(i^{22})(i^{23})(i^{24})}_{-1} (i^{25}) &= (-1)(-1)(-1)(i^{25}) \\
 &= (-1)(i) \\
 &= -i
 \end{aligned}$$

แบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง หน่วยจินตภาพ

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปหน่วยจินตภาพ

1.1 $\sqrt{-1}$ =

1.2 $\sqrt{-8}$ =

1.3 $\sqrt{-25}$ =

1.4 $\sqrt{-17}$ =

1.5 $\sqrt{-54}$ =

1.6 $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$ =

1.7 $\sqrt{(-3)(-5)}$ =

1.8 $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$ $\sqrt{(-3)(-5)}$

1.9 $\sqrt{-48}\sqrt{-27}$ =

=

=

1.10 $\sqrt{-20}\sqrt{-25}$ =

=

=

=

2. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $i^{78} = \dots\dots\dots$

2.2 $i^{565} = \dots\dots\dots$

2.3 $i^{2527} = \dots\dots\dots$

2.4 $i^{4300} = \dots\dots\dots$

2.5 $i^{425} + i^{426} + i^{427} + i^{428} = \dots\dots\dots$

2.6 $(i^{425})(i^{426})(i^{427})(i^{428}) = \dots\dots\dots$

2.7 $i^{15} + i^{16} + \dots + i^{30} = \dots\dots\dots$

2.8 $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2560} + i^{2561} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2.9 $i^{17} + i^{27} + i^{37} + i^{47} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

2.10 $(i^{50})(i^{99})(i^{170})(i^{201}) = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

ใบความรู้ที่ 1.2 เรื่อง สัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ เขียนจำนวนเชิงซ้อน z ได้ 2 แบบ คือ 1. $z = (a, b)$ 2. $z = a + bi$
โดย จำนวนจริง a เรียกว่า ส่วนจริงของ z (real part) เขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$
จำนวนจริง b เรียกว่า ส่วนจินตภาพของ z (imaginary part) เขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จากบทนิยามข้างต้น สรุปได้ว่า

1. จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้ 2 แบบ คือ อยู่ในรูปคู่อันดับ หรืออยู่ในรูป i ซึ่งมีความหมายเหมือนกัน คือ $z = (a, b) = a + bi$ เช่น $(1, 5) = 1 + 5i$, $(2, 3) = 2 + 3i$ เป็นต้น
หมายเหตุ จริงๆ แล้วจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้ทั้งหมด 3 แบบ คือ เขียนอยู่ในรูปเชิงขั้ว ซึ่งจะกล่าวในภายหลัง

2. จาก $z = a + bi$ ถ้า $b = 0$ จำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวก็คือ **จำนวนจริง** นั่นเอง แสดงว่า จำนวนจริงเป็นสับเซตของจำนวนเชิงซ้อน เช่น $(1, 0) = 1$, $(-2, 0) = -2$

3. จาก $z = a + bi$ ถ้า $a = 0$ จำนวนเชิงซ้อนดังกล่าวก็คือ **จำนวนจินตภาพแท้** นั่นเอง
เช่น $(0, 5) = 5i$, $(0, -4) = -4i$

ตัวอย่างที่ 1 จงบอกว่าจำนวนที่กำหนดให้เป็นจำนวนเชิงซ้อนหรือไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน และเป็นจำนวนจริงหรือเป็นจำนวนจินตภาพแท้

1. $z = (1, -4i)$ ตอบ ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน
2. $z = 3$ ตอบ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เป็นจำนวนจริง
3. $z = (0, 3)$ ตอบ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เป็นจำนวนจินตภาพแท้
4. $z = -i$ ตอบ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เป็นจำนวนจินตภาพแท้
5. $z = (-1, -5)$ ตอบ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 2 จงบอกส่วนจริง(real part) และส่วนจินตภาพ(imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------|-----------------------|---------------------|
| 1. $z = 1 + 2i$ | $\text{Re}(z)$ คือ 1 | $\text{Im}(z) = 2$ |
| 2. $z = (-3, -1)$ | $\text{Re}(z)$ คือ -3 | $\text{Im}(z) = -1$ |
| 3. $z = -3$ | $\text{Re}(z)$ คือ -3 | $\text{Im}(z) = 0$ |
| 4. $z = -i$ | $\text{Re}(z)$ คือ 0 | $\text{Im}(z) = -1$ |
| 5. $z = 3 - 5i$ | $\text{Re}(z)$ คือ 3 | $\text{Im}(z) = -5$ |
| 6. $z = 2 - i$ | $\text{Re}(z)$ คือ 2 | $\text{Im}(z) = -1$ |
| 7. $z = 4i^2 = -4$ | $\text{Re}(z)$ คือ -4 | $\text{Im}(z) = 0$ |

แบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง สัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. จงทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่เป็นคำตอบในแต่ละข้อ

จำนวน	เป็นจำนวน เชิงซ้อน	ไม่เป็นจำนวน เชิงซ้อน	จำนวนจริง	จำนวนจินตภาพแท้
1. $(-2, 5)$				
2. $(3, i)$				
3. $-2i$				
4. -9				
5. $-4i^3$				

2. จงบอกส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน (z)	ส่วนจริง $\text{Re}(z)$	ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$
1. $(-1, 0)$		
2. $(5, -22)$		
3. $\frac{2}{3} - i$		
4. $2+i$		
5. $0 - 3i^3$		

3. จงเติม ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือ × หน้าข้อความที่ไม่ถูกต้อง

.....1) จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

.....2) จำนวนเชิงซ้อนเป็นสับเซตของจำนวนจริง

.....3) $z = a + bi$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เมื่อ $a = 0$ แต่ $b \neq 0$

.....4) $i = -1$

.....5) คำตอบของสมการ $x^2 = -1$ ไม่เป็นจำนวนจริง แต่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ใบความรู้ที่ 1.3

เรื่อง การเท่ากัน การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนดให้ $z_1 = (a, b) = a + bi$ และ $z_2 = (c, d) = c + di$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ กำหนดการเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

การเท่ากัน

$$z_1 = z_2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

การบวก

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

การคูณ

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

$$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า x และ y จากเงื่อนไขต่อไปนี้

$$1. (x+1, 5) = (-2, y-1)$$

$$2. 3x+2yi = 6 - 6i$$

$$3. 3x + (x+4y)i = 12+16i$$

$$4. (3x-9)+(y+1)i = (y+3)+(2x-2)i$$

วิธีทำ

$$1. (x+1, 5) = (-2, y-1)$$

$$\begin{array}{lll} \text{จะได้ว่า} & x+1 = -2 & \text{นั่นคือ } x = -3 \\ & 5 = y-1 & \text{นั่นคือ } y = 6 \end{array}$$

$$2. 3x+2yi = 6 - 6i$$

$$\begin{array}{lll} \text{จะได้ว่า} & 3x = 6 & \text{นั่นคือ } x = 2 \\ & 2y = -6 & \text{นั่นคือ } y = -3 \end{array}$$

$$3. 3x + (x+4y)i = 12+16i$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad 3x = 12 \quad \text{นั่นคือ } x = 4$$

$$\text{และ} \quad x+4y = 16 \quad \text{จะได้ว่า } 4+4y = 16 \quad \text{นั่นคือ } y = 3$$

$$4. (3x-9)+(y+1)i = (y+3)+(2x-2)i$$

$$\text{จะได้ว่า} \quad 3x-9 = y+3 \quad \text{นั่นคือ } 3x-y = 12 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และ} \quad y+1 = 2x-2 \quad \text{นั่นคือ } 2x-y = 3 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{นำ } (1)-(2) ; \quad x = 9$$

$$\text{แทน } x = 9 \text{ ใน } (2) \quad \text{จะได้ว่า } 2(9)-y = 3 \quad \text{นั่นคือ } y = 15$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $(4, 2) + (3, 8)$

2. $(-5, 4) + (-2, -3)$

3. $(2 - 7i) + (-3 + 4i)$

4. $-2i + 4 + i - 7 + 5i^2$

5. $3 - \sqrt{-16} + \sqrt{-9} + 1$

วิธีทำ

1. $(4, 2) + (3, 8) = (4+3, 2+8)$

$= (7, 10)$

2. $(-5, 4) + (-2, -3) = (-5+(-2), 4+(-3))$

$= (-7, 1)$

3. $(2 - 7i) + (-3 + 4i) = (2+(-3)) + (-7+4)i$

$= -1 - 3i$

4. $-2i + 4 + i - 7 + 5i^2 = (4-7-5) + (-2+1)i$

$= -8-i$

5. $3 - \sqrt{-16} + \sqrt{-9} + 1 = 3 - 4i + 3i + 1$

$= (3+1) + (-4+3)i$

$= 4 - i$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $(4, 2)(3, 8)$

2. $(-5, 4)(-2, -3)$

3. $(1+6i)(5-7i)$

4. $(1-2i)(3i)$

5. $(-3+5i)(7-i)$

วิธีทำ

1. $(4, 2)(3, 8) = [(4)(3) - (2)(8), (4)(8) + (2)(3)]$

$= (12-16, 32+6)$

$= (-4, 38)$

2. $(-5, 4)(-2, -3) = [(-5)(-2) - (4)(-3), (-5)(-3) + (4)(-2)]$

$= (10+12, 15-8)$

$= (22, 7)$

3. $(1+6i)(5-7i) = [(1)(5) - (6)(-7)] + [(1)(-7) + (6)(5)]i$

$= (5+42) + (-7+30)i$

$= 47+23i$

4. $(1-2i)(3i) = (1)(3i) + (-2i)(3i)$

$= 3i-6i^2$

$= 6+3i$

5. $(-3+5i)(7-i) = [(-3)(7) - (5)(-1)] + [(-3)(-1) + (5)(7)]i$

$= (-21+5) + (3+35)i$

$= -16+38i$

แบบฝึกทักษะที่ 1.3
เรื่อง การเท่ากัน การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง จงแสดงวิธีหาคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาค่า x และ y จากเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1) $(x+2, -4) = (5, y-3)$

.....

.....

.....

1.2) $(2x+3, 10) = (-9, 4-2y)$

.....

.....

.....

1.3) $(3x+yi) + (-y+xi) = -1+3i$

.....

.....

.....

1.4) $(3x+4)+(2x+y)i = (y+5)+(x+3)i$

.....

.....

.....

1.5) $(2x+5)+(3x+y)i = (y+8)+(x+13)i$

.....

.....

.....

2. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

2.1) $(3, -10) + (-6, 2)$

.....

.....

.....

2.2) $(5, -3) + (0, -2)$

.....

.....

.....

2.3) $(-5-7i) + (-3+i)$

.....

.....

.....

2.4) $(-1+3i) + (-4-6i)$

.....

.....

.....

2.5) $3i + 2 - 6i - 4 + 5i^2$

.....

.....

.....

3. จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1) $(-1, 3)(2, 4)$

.....

.....

.....

3.2) $(-3, 1)(6, -4)$

.....

.....

.....

3.3) $(8-i)(-2-3i)$

.....

.....

.....

3.4) $(-2i)(-2-3i)$

.....

.....

.....

3.5) $(\sqrt{3} - i)(5\sqrt{3} + 2i)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

©©©©©©©©©©©©©©©©©©



- คำชี้แจง** 1. แบบทดสอบหลังเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก
จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลา 10 นาที
2. นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว ในแต่ละข้อ
แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนน คือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ข้อใดต่อไปนี้**ถูก**ต้อง

ก. $\sqrt{-6}\sqrt{-3} = \sqrt{18}$

ข. $\sqrt{-4}\sqrt{-9} = 6$

ค. $\sqrt{-2} = 2i$

ง. $\sqrt{-16} = 4i$

2. i^{434} มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. -1

ค. $-i$

ง. i

3. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่**ถูกต้อง

ก. $i^{14} = i^{124}$

ข. $i^2 = i^{10}$

ค. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

ง. $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 = -1$

4. $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2295}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 1

ข. $-1 + i$

ค. $-i$

ง. -1

5. กำหนดให้ $z = 5 - i$ ข้อใดกล่าว**ถูก**ต้อง

ก. $\text{Re}(z) = -5$

ข. $\text{Im}(z) = -1$

ค. $\text{Re}(z) = -i$

ง. $\text{Im}(z) = -i$

6. ข้อใดมีค่าเท่ากับ $(5 - 8i) + (3 + 5i)$

ก. 8

ข. $-3i$

ค. $8 - 3i$

ง. $-8 + 3i$

7. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่**ถูกต้อง

ก. $(i^2)(i^3)(i^4)(i^5) = -1$

ข. $i^2 + i^3 + i^4 + i^5 = 0$

ค. $\sqrt{(-2)(-3)} = (\sqrt{-2})(\sqrt{-3})$

ง. $\sqrt{(-2)(-3)} \neq (2)(\sqrt{-3})$

8. ข้อใดมีค่าเท่ากับ $(3 - i)(1 + 4i)$

ก. $18i$

ข. $7 + 11i$

ค. $11 - 7i$

ง. $7 - 11i$

9. กำหนดให้ $(a - bi) + (3 + 2i) = 1 + 5i$ ค่าของ a และ b ตรงกับข้อใด

ก. $a = -4$ และ $b = -3$

ข. $a = 2$ และ $b = -5$

ค. $a = -4$ และ $b = 3$

ง. $a = -2$ และ $b = 5$

10. กำหนดให้ $(2x + y) - i = 6 + (3x - y)i$ ค่าของ $x - y$ ตรงกับข้อใด

ก. -7

ข. -3

ค. 3

ง. 7



กระดาษคำตอบ แบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ..... เลขที่..... ระดับชั้น..... ห้อง.....

คำชี้แจง : ให้เลือกคำตอบจากข้อสอบหลังเรียนแล้วทำเครื่องหมาย X ลงในช่องที่ถูกต้องที่สุด

ข้อ	ก	ข	ค	ง	คะแนน
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
รวมคะแนนที่ได้					

ผู้ตรวจ.....

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2554). แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 4. กรุงเทพมหานคร: บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- กวิยา เนาวประทีป. (2556). หนังสือชุดเทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จำนวนเชิงซ้อน. กรุงเทพมหานคร:
ฟิลิสเซ็นเตอร์.
- จำรัส อินสม. (2547). คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 เล่ม 2.
กรุงเทพมหานคร: บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.
- ณรงค์ ปั่นนัม และคณะ. (ม.ป.ป.). คู่มือ-เตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 2.
กรุงเทพมหานคร: บริษัท ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพมหานคร: บริษัท
สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.
- ธนวัฒน์ สันทราพรพล. (ม.ป.ป.). คู่มือรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติม เล่ม 4. กรุงเทพมหานคร:
สำนักพิมพ์ SCIEN CENTER.
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. (2555). คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 4. กรุงเทพมหานคร:
บริษัท สำนักพิมพ์เดอะบุคส์ จำกัด.
- ศุภกิจ เถลิณวิสุตม์กุล. (2550). เทคนิคคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร: บริษัท
สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.
- ศักดิ์สิน แก้วประจบ. (2555). คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 4-5-6 เล่ม 4. กรุงเทพมหานคร: บริษัท
สำนักพิมพ์ พีบีซี จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2556). หนังสือเรียนรายวิชา
เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์
สทศ. ลาดพร้าว.

ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อที่	เฉลยคำตอบ
1	ข
2	ง
3	ง
4	ค
5	ก
6	ง
7	ง
8	ค
9	ข
10	ก

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง หน่วยจินตภาพ

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปหน่วยจินตภาพ

$$1.1 \quad \sqrt{-1} = i$$

$$1.2 \quad \begin{aligned} \sqrt{-8} &= \sqrt{8} \sqrt{-1} \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$1.3 \quad \begin{aligned} \sqrt{-25} &= \sqrt{25} \sqrt{-1} \\ &= 5i \end{aligned}$$

$$1.4 \quad \begin{aligned} \sqrt{-17} &= \sqrt{17} \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{17}i \end{aligned}$$

$$1.5 \quad \begin{aligned} \sqrt{-54} &= \sqrt{(9)(6)} \sqrt{-1} \\ &= 3\sqrt{6}i \end{aligned}$$

$$1.6 \quad \begin{aligned} \sqrt{-3} \sqrt{-5} &= (\sqrt{3}i)(\sqrt{5}i) \\ &= \sqrt{15}i^2 \\ &= -\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$1.7 \quad \sqrt{(-3)(-5)} = \sqrt{15}$$

$$1.8 \quad \sqrt{-3} \sqrt{-5} \neq \sqrt{(-3)(-5)}$$

$$1.9 \quad \begin{aligned} \sqrt{-48} \sqrt{-27} &= (\sqrt{48} \sqrt{-1})(\sqrt{27} \sqrt{-1}) \\ &= (4\sqrt{3}i)(3\sqrt{3}i) \\ &= 36i^2 \\ &= -36 \end{aligned}$$

$$1.10 \quad \begin{aligned} \sqrt{-20} \sqrt{-25} &= (\sqrt{20} \sqrt{-1})(\sqrt{25} \sqrt{-1}) \\ &= (2\sqrt{5}i)(5i) \\ &= 10\sqrt{5}i^2 \\ &= -10\sqrt{5} \end{aligned}$$

2. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 2.1 \quad i^{78} &= i^{4(19)+2} \\
 &= i^2 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2 \quad i^{565} &= i^{4(141)+1} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.3 \quad i^{2527} &= i^{4(631)+3} \\
 &= i^3 \\
 &= -i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.4 \quad i^{4300} &= i^{4(1075)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$2.5 \quad i^{425} + i^{426} + i^{427} + i^{428} = 0 \quad (\text{เนื่องจาก } i \text{ ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน บวกกันได้ 0 เสมอ})$$

$$2.6 \quad (i^{425})(i^{426})(i^{427})(i^{428}) = -1 \quad (\text{เนื่องจาก } i \text{ ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน คูณกันได้ -1 เสมอ})$$

$$2.7 \quad i^{15} + i^{16} + \dots + i^{30} = 0 \quad (\text{เนื่องจาก } i \text{ ยกกำลังจำนวนเต็มบวกเรียงติดกัน 4 จำนวน บวกกันได้ 0 เสมอ})$$

$$\begin{aligned}
 2.8 \quad i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2560} + i^{2561} &= 0 + i^{2561} \\
 &= i^{4(640)+1} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.9 \quad i^{17} + i^{27} + i^{37} + i^{47} &= i^{4(4)+1} + i^{4(6)+3} + i^{4(9)+1} + i^{4(11)+3} \\
 &= i - i + i - i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.10 \quad (i^{50})(i^{99})(i^{170})(i^{201}) &= (i^{4(12)+2})(i^{4(24)+3})(i^{4(42)+2})(i^{4(50)+1}) \\
 &= (i^2)(i^3)(i^2)(i) \\
 &= (-1)(-i)(-1)(i) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง สัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

1. จงทำเครื่องหมาย ☒ ลงในช่องว่างที่เป็นคำตอบในแต่ละข้อ

จำนวน	เป็นจำนวนเชิงซ้อน	ไม่เป็นจำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจริง	จำนวนจินตภาพแท้
1. $(-2, 5)$	✓			
2. $(3, i)$		✓		
3. $-2i$	✓			✓
4. -9	✓		✓	
5. $-4i^3 = 4i$	✓			✓

2. จงบอกส่วนจริง (real part) และส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน (z)	ส่วนจริง $\text{Re}(z)$	ส่วนจินตภาพ $\text{Im}(z)$
1. $(-1, 0)$	-1	0
2. $(5, -22)$	5	-22
3. $\frac{2}{3} - i$	$\frac{2}{3}$	-1
4. $2+i$	2	1
5. $0 - 3i^8 = -3$	-3	0

3. จงเติม ☒ หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือ ☐ หน้าข้อความที่ไม่ถูกต้อง

..... ☒ 1) จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

..... ☐ 2) จำนวนเชิงซ้อนเป็นสับเซตของจำนวนจริง

..... ☐ 3) $z = a + bi$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เมื่อ $a = 0$ แต่ $b \neq 0$

..... ☐ 4) $i = -1$

..... ☒ 5) คำตอบของสมการ $x^2 = -1$ ไม่เป็นจำนวนจริง แต่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3

เรื่อง การเท่ากัน การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง จงแสดงวิธีหาคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงหาค่า x และ y จากเงื่อนไขต่อไปนี้

1.1) $(x+2, -4) = (5, y-3)$

วิธีทำ จะได้ว่า $x+2 = 5$ นั่นคือ $x = 3$
 $-4 = y-3$ นั่นคือ $y = -1$

1.2) $(2x+3, 10) = (-9, 4-2y)$

วิธีทำ จะได้ว่า $2x+3 = -9$ นั่นคือ $x = -6$
 $10 = 4-2y$ นั่นคือ $y = -3$

1.3) $(3x+yi) + (-y+xi) = -1+3i$

วิธีทำ จะได้ว่า $(3x-y) + (y+x)i = -1+3i$
 จะได้ว่า $3x-y = -1$ (1)
 และ $y+x = 3$ (2)

นำ (1)+(2) : $4x = 2$ นั่นคือ $x = \frac{1}{2}$

แทน $x = \frac{1}{2}$ ใน (2) : จะได้ว่า $y + \frac{1}{2} = 3$ นั่นคือ $y = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

1.4) $(3x+4)+(2x+y)i = (y+5)+(x+3)i$

วิธีทำ จะได้ว่า $3x+4 = y+5$ นั่นคือ $3x-y = 1$ (1)
 และ $2x+y = x+3$ นั่นคือ $x+y = 3$ (2)

นำ (1)+(2) : $4x = 4$ นั่นคือ $x = 1$

แทน $x = 1$ ใน (2) จะได้ว่า $1+y = 3$ นั่นคือ $y = 2$

1.5) $(2x+5)+(3x+y)i = (y+8)+(x+13)i$

วิธีทำ จะได้ว่า $2x+5 = y+8$ นั่นคือ $2x-y = 3$ (1)
 และ $3x+y = x+13$ นั่นคือ $2x+y = 13$ (2)

นำ (1)+(2) : $4x = 16$ นั่นคือ $x = 4$

แทน $x = 4$ ใน (1) จะได้ว่า $2(4)-y = 3$ นั่นคือ $y = 5$

2. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

2.1) $(3, -10) + (-6, 2) = (3+(-6), -10+2)$
 $= (-3, -8)$

2.2) $(5, -3) + (0, -2) = (5+0, -3+(-2))$
 $= (5, -5)$

2.3) $(-5-7i) + (-3+i) = (-5+(-3)) + (-7+1)i$
 $= -8 - 6i$

2.4) $(-1+3i) + (-4-6i) = (-1+(-4)) + (3+(-6))i$
 $= -5 - 3i$

$$\begin{aligned} 2.5) \quad 3i + 2 - 6i - 4 + 5i^2 &= (2-4-5) + (3-6)i \\ &= -7 - 3i \end{aligned}$$

3. จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3.1) \quad (-1, 3)(2, 4) &= [(-1)(2) - (3)(4), (-1)(4) + (3)(2)] \\ &= (-2-12, -4+6) \\ &= (-14, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.2) \quad (-3, 1)(6, -4) &= [(-3)(6) - (1)(-4), (-3)(-4) + (1)(6)] \\ &= (-18+4, 12+6) \\ &= (-14, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.3) \quad (8-i)(-2-3i) &= [(8)(-2) - (-1)(-3)] + [(8)(-3) + (-1)(-2)]i \\ &= (-16-3) + (-24+2)i \\ &= -19-22i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4) \quad (-2i)(-2-3i) &= (-2i)(-2) + (-2i)(-3i) \\ &= 4i + 6i^2 \\ &= -6+4i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.5) \quad (\sqrt{3} - i)(5\sqrt{3} + 2i) &= [(\sqrt{3})(5\sqrt{3}) - (-1)(2)] + [(\sqrt{3})(2) + (-1)(5\sqrt{3})]i \\ &= [15 + 2] + [2\sqrt{3} + (-5\sqrt{3})]i \\ &= 17 - 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อที่	เฉลยคำตอบ
1	ง
2	ข
3	ก
4	ง
5	ข
6	ค
7	ค
8	ข
9	ก
10	ข

บันทึกผลคะแนน

ชื่อ-สกุล.....ชั้น.....เลขที่.....

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

รายการ	คะแนนเต็ม	เกณฑ์ 75% (คะแนน)	คะแนนที่ได้	ผ่านเกณฑ์ 75% ขึ้นไป
แบบทดสอบก่อนเรียน	10			
แบบฝึกทักษะที่ 1.1	15	11		☐ ผ่าน ☐ ไม่ผ่าน
แบบฝึกทักษะที่ 1.2	10	8		☐ ผ่าน ☐ ไม่ผ่าน
แบบฝึกทักษะที่ 1.3	15	11		☐ ผ่าน ☐ ไม่ผ่าน
แบบทดสอบหลังเรียน	10	8		☐ ผ่าน ☐ ไม่ผ่าน

complex number

A diagram illustrating the components of a complex number. It features four white circles with blue borders, each containing a mathematical expression. The circles are connected by blue lines. A line enters from the top left and connects to the circle containing z . Another line connects the z circle to the $x+yi$ circle. A third line connects the $x+yi$ circle to the $\sqrt{-1}$ circle. A fourth line connects the $\sqrt{-1}$ circle to the i^2 circle. A final line exits from the bottom right of the i^2 circle.

$$z$$

$$x+yi$$

$$\sqrt{-1}$$

$$i^2$$