

**ใบความรู้ที่ 2.1 ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
และคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**

ให้นักเรียนพิจารณาปัญหาต่อไปนี้

“ผลบวกของจำนวนสองจำนวนเป็น 20 และสี่เท่าของจำนวนน้อยกว่าจำนวนมากอยู่ 5 จงหาจำนวนทั้งสองนั้น”

จากปัญหาดังกล่าว เมื่อกำหนดให้ x แทนจำนวนน้อย และ y แทนจำนวนมาก จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$x + y = 20 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$4x - y = 5 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

ระบบที่ประกอบด้วยสมการ $\textcircled{1}$ และสมการ $\textcircled{2}$ ข้างต้น เป็นตัวอย่างของ **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax + by = e$$

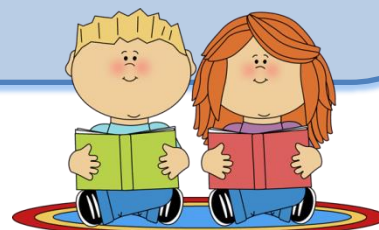
$$cx + dy = f$$

เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรที่มี x และ y เป็นตัวแปร

โดยที่ a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสองของระบบสมการ หรือคู่อันดับ (x, y) ที่ค่า x และค่า y ทำให้สมการทั้งสองของระบบสมการเป็นจริง





ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าคู่อันดับ $(2, 3)$ เป็นคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้หรือไม่

$$2x + y = 7 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$5x - 2y = 4 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

วิธีทำ จากคู่อันดับ $(2, 3)$

แทนค่า x ด้วย 2 และแทนค่า y ด้วย 3 ในสมการ $\textcircled{1}$

$$\text{จะได้ } 2(2) + 3 = 7$$

$$4 + 3 = 7$$

$$7 = 7 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง} \quad \text{-----} \quad (*)$$

แทนค่า x ด้วย 2 และแทนค่า y ด้วย 3 ในสมการ $\textcircled{2}$

$$\text{จะได้ } 5(2) - 2(3) = 4$$

$$10 - 6 = 4$$

$$4 = 4 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง} \quad \text{-----} \quad (**)$$

จาก $(*)$ และ $(**)$ สรุปได้ว่า คู่อันดับ $(2, 3)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

คู่อันดับ (x, y) จะเป็นคำตอบของระบบสมการ ก็ต่อเมื่อ ค่า x และค่า y นั้น
ทำให้สมการทั้งสองของระบบสมการเป็นจริงนะครับ



ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาว่าคู่อันดับ $(-2, 1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้หรือไม่

$$2x + y = -3 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$x - 2y = 0 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

วิธีทำ จากคู่อันดับ $(-2, 1)$

แทนค่า x ด้วย -2 และแทนค่า y ด้วย 1 ในสมการ $\textcircled{1}$

$$\text{จะได้ } 2(-2) + 1 = -3$$

$$-4 + 1 = -3$$

$$-3 = -3 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นจริง} \quad \text{-----} \quad (*)$$

แทนค่า x ด้วย -2 และแทนค่า y ด้วย -3 ในสมการ $\textcircled{2}$

$$\text{จะได้ } (-2) - 2(1) = 0$$

$$-2 - 2 = 0$$

$$-4 = 0 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ} \quad \text{-----} \quad (**)$$

จาก $(*)$ และ $(**)$ สรุปได้ว่า คู่อันดับ $(-2, 1)$ ไม่เป็นคำตอบของระบบสมการ

แบบฝึกทักษะที่ 2.1

จงพิจารณาว่าคู่อันดับที่กำหนดให้ เป็นคำตอบของระบบสมการหรือไม่ (ข้อละ 3 คะแนน)

1. $2x + y = 5$ ①
 $3x + 2y = 8$ ②

คู่อันดับ (2, 1)



วิธีทำ _____

ถ้าแทนค่า x และค่า y จากคู่อันดับ (x, y)
 แล้วทำให้สมการใดสมการหนึ่งของระบบสมการเป็นเท็จ
 แสดงว่าคู่อันดับนั้นไม่เป็นคำตอบของระบบสมการ





2. $2x - 6y = 5$ ----- ①

$$x - 3y = 3 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

คู่อันดับ $(2, 0)$



วิธีทำ

3. $2x - y = 0$ ----- ①

$$2x + y = -3 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

คู่อันดับ $(1, 2)$



วิธีทำ



4. $x + y = 12$ ①
 $x - y = 4$ ②

คู่อันดับ (8, 4)



วิธีทำ

5. $x - y = -5$ ①
 $2x + y = -1$ ②

คู่อันดับ (0, 5)

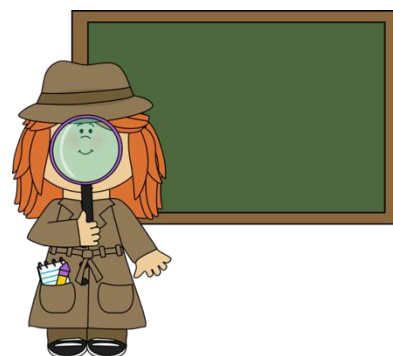


วิธีทำ



แบบบันทึกผลคะแนนแบบฝึกทักษะที่ 2.1

ข้อที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
1	3	
2	3	
3	3	
4	3	
5	3	
รวม	15	



ผู้ตรวจ.....

เกณฑ์การให้คะแนน

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
3	สามารถแสดงวิธีการตรวจสอบคู่อันดับแล้วสรุปคำตอบได้อย่างถูกต้องและสมบูรณ์
2	สามารถแสดงวิธีการตรวจสอบคู่อันดับได้ถูกต้อง แต่สรุปคำตอบไม่ถูกต้อง
1	สามารถแสดงวิธีการตรวจสอบคู่อันดับได้บางส่วน และสรุปคำตอบไม่ถูกต้อง
0	ไม่สามารถแสดงวิธีการตรวจสอบคู่อันดับ สรุปคำตอบโดยไม่แสดงวิธีการตรวจสอบคู่อันดับ





ใบความรู้ที่ 2.2 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยกราฟ

ให้นักเรียนพิจารณาการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรด้วยการเขียนกราฟของแต่ละสมการบนระนาบโดยใช้แกนคู่เดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้

$$x + 2y = 10 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$-x + y = 5 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$



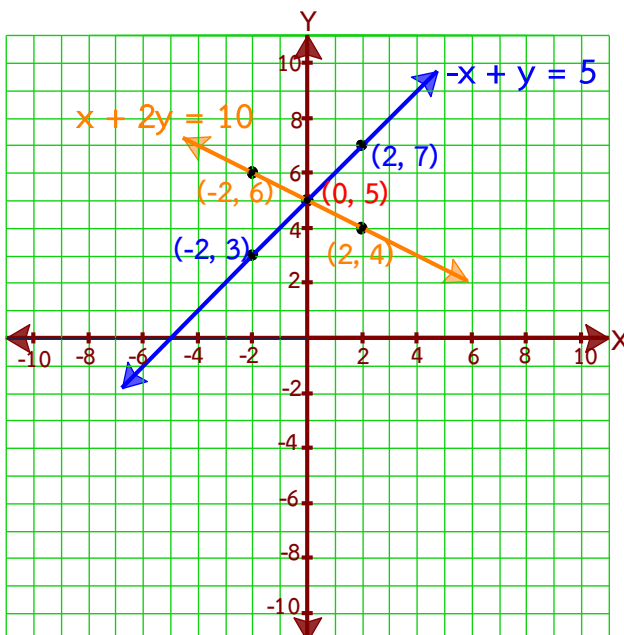
$$x + 2y = 10 \text{ เขียนได้เป็น } y = -\frac{1}{2}x + 5$$

x	-2	0	2
y	6	5	4

$$-x + y = 5 \text{ เขียนได้เป็น } y = x + 5$$

x	-2	0	2
y	3	5	7

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟจะเห็นว่ามีความชันต่างกัน
ที่เป็นคำตอบของสมการ $x + 2y = 10$
และมีความชันต่างกันที่เป็นคำตอบของสมการ
 $-x + y = 5$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสอง
เป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกันที่จุด $(0, 5)$

เพียงจุดเดียว แสดงว่ามีความชันเพียงคู่เดียว
คือ $(0, 5)$ ที่เป็นคำตอบของระบบสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบ
เพียงคำตอบเดียวคือ $(0, 5)$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้

$$2x - y = 3 \quad \text{----- ①}$$

$$4x - 2y = 6 \quad \text{----- ②}$$

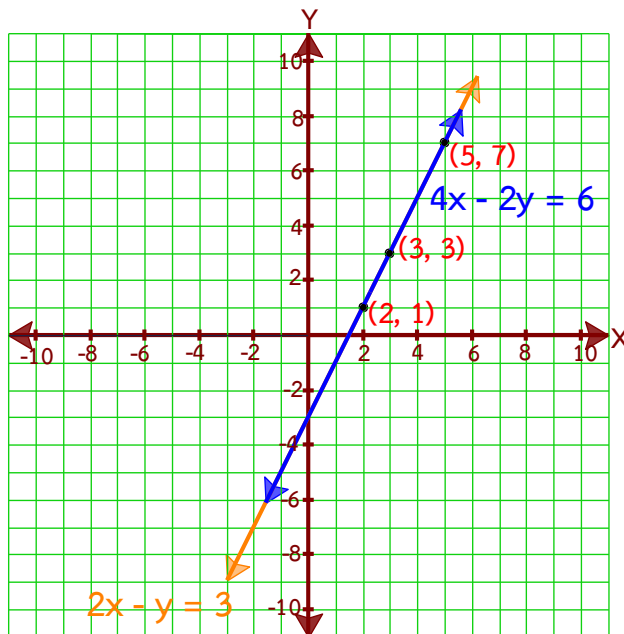
$2x - y = 3$ เขียนได้เป็น $y = 2x - 3$

x	2	3	5
y	1	3	7

$4x - 2y = 6$ เขียนได้เป็น $y = 2x - 3$

x	2	3	5
y	1	3	7

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



การกำหนดค่า x เพื่อหาค่า y
เราจะกำหนดค่า x เป็นจำนวนจริงใดๆ ก็ได้
นะคะ



จากกราฟจะเห็นว่า มีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x - y = 3$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $4x - 2y = 6$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งทับกันหรือเป็นเส้นตรงเดียวกัน แสดงว่าคู่อันดับทุกคู่อันดับที่เป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรงที่ทับกันนี้ เป็นคำตอบของระบบสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด โดยที่คู่อันดับทุกคู่อันดับที่เป็นคำตอบ ต้องสอดคล้องกับสมการ $2x - y = 3$ หรือ $4x - 2y = 6$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้

$$3x = y + 5 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1}$$

$$y - 3x = 1 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2}$$

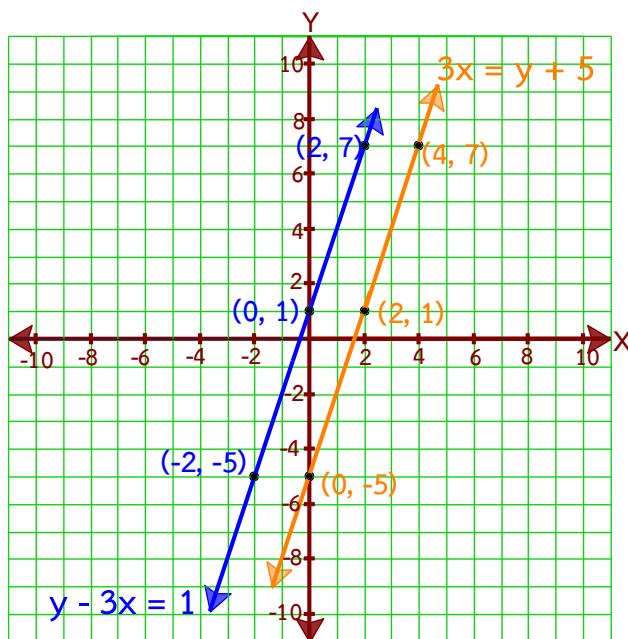
$3x = y + 5$ เขียนได้เป็น $y = 3x - 5$

x	0	2	4
y	-5	1	7

$y - 3x = 1$ เขียนได้เป็น $y = 3x + 1$

x	-2	0	2
y	-5	1	7

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



การกำหนดค่า x เพื่อหาค่า y
เราจะกำหนดค่า x เป็นจำนวนจริงใดๆ
ก็ได้ค่ะ แต่ถ้ากำหนดให้ x เป็น 0
อาจทำให้การคำนวณหาค่า y ยากขึ้น



จากกราฟจะเห็นว่าคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x = y + 5$ และมีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $y - 3x = 1$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งขนานกัน จึงไม่มีคู่อันดับใดเป็นคำตอบของสมการทั้งสอง

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมี**ไม่มีคำตอบ**

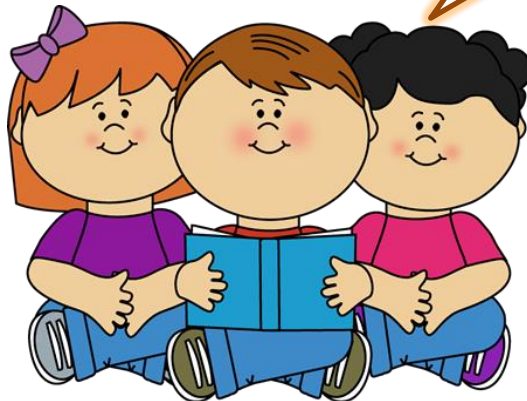


จากตัวอย่างจะเห็นว่า คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร มี 3 แบบ ดังนี้

1. มีคำตอบเดียว
2. มีหลายคำตอบ
3. ไม่มีคำตอบ

ถ้ากราฟของสมการทั้งสอง เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ตัดกัน ระบบสมการนั้นจะมีคำตอบเดียว ซึ่งคำตอบคือจุดตัดของกราฟนั่นเอง

ถ้ากราฟของสมการทั้งสอง เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ทับกันหรือ เป็นเส้นตรงเดียวกัน ระบบสมการนั้นจะมีคำตอบมากมายไม่จำกัด



ถ้ากราฟของสมการทั้งสอง เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ระบบสมการนั้นจะไม่มีคำตอบ



แบบฝึกทักษะที่ 2.2

1. จงเขียนกราฟ แล้วหาว่าระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้มีคำตอบเดียว มีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบ ในกรณีที่ไม่มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น (ข้อละ 5 คะแนน)

1) $y = 4x + 1$ ----- ①

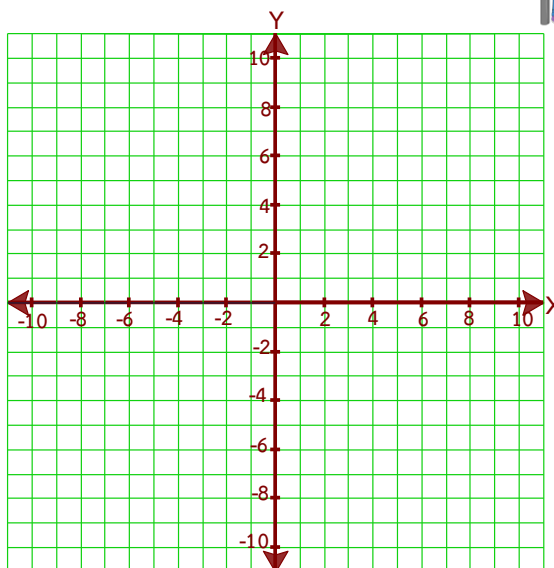
$y = -4x + 1$ ----- ②

$y = 4x + 1$

x	-2	0	2
y			

$y = -4x + 1$

x	-2	0	2
y			



ตอบ.....

2) $x = 2y$ ----- ①

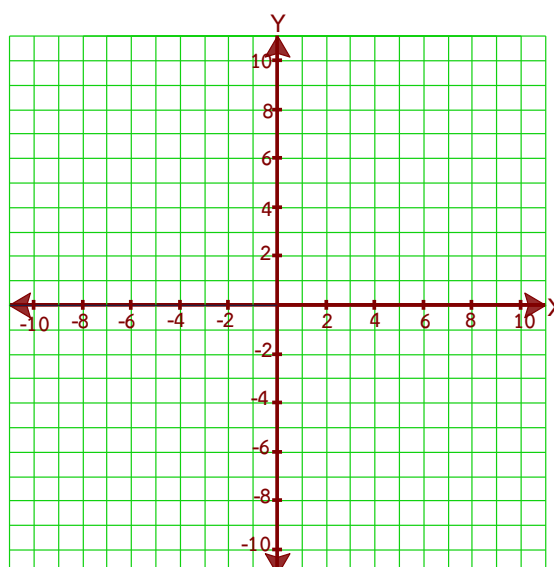
$2x = 4y$ ----- ②

จากสมการ ① เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-6	0	6
y			

จากสมการ ② เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-2	0	2
y			



ตอบ.....



3) $2x - y = 1$ ----- ①

$x + y = -1$ ----- ②

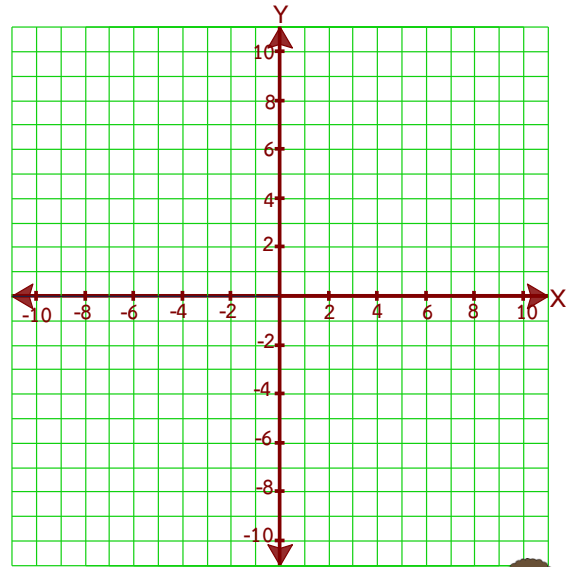
จากสมการ ① เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-3	0	3
y			

จากสมการ ② เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-3	0	3
y			

ตอบ.....



4) $x - 3y = 6$ ----- ①

$2x - 6y = -6$ ----- ②

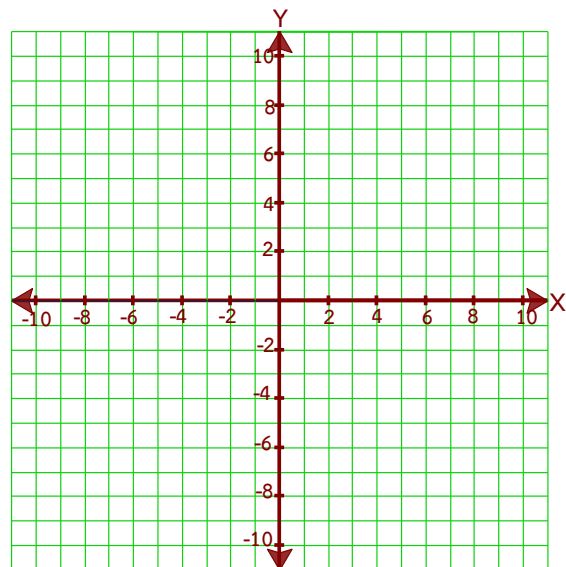
จากสมการ ① เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-6	0	6
y			

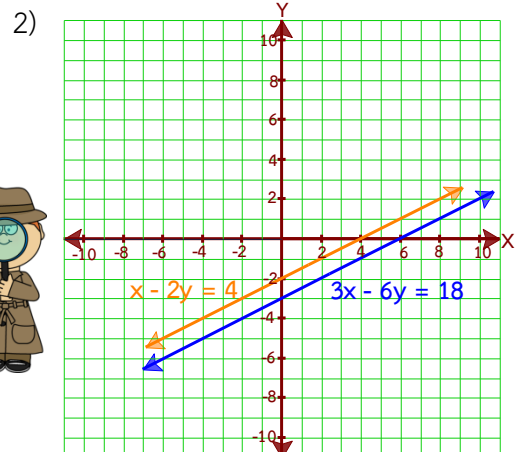
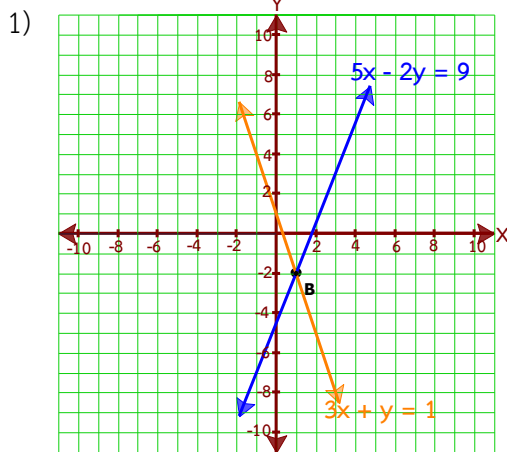
จากสมการ ② เขียนได้เป็น $y =$ _____

x	-9	-3	3
y			

ตอบ.....

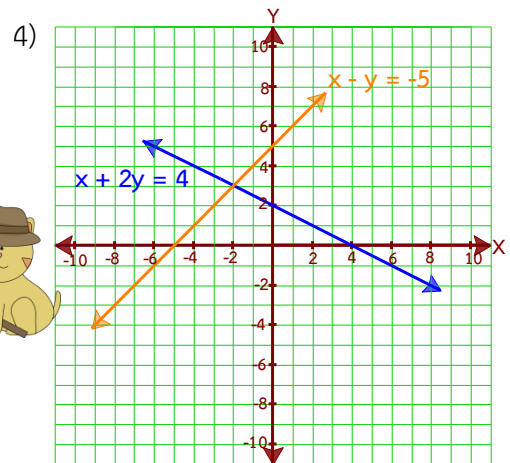
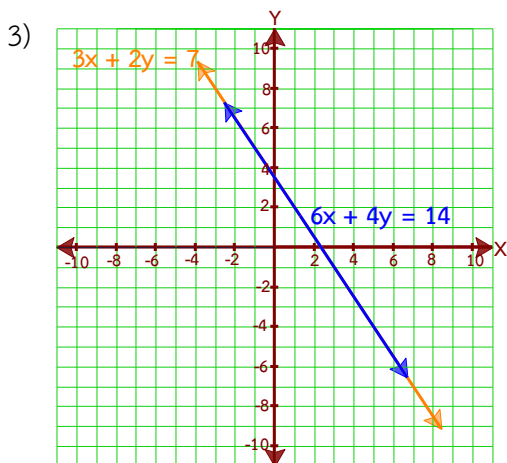


2. จากกราฟของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ จงหาว่าแต่ละระบบสมการมีคำตอบเดียว มีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบ ในกรณีที่มีคำตอบเดียวให้ระบุคำตอบนั้น (ข้อละ 1 คะแนน)



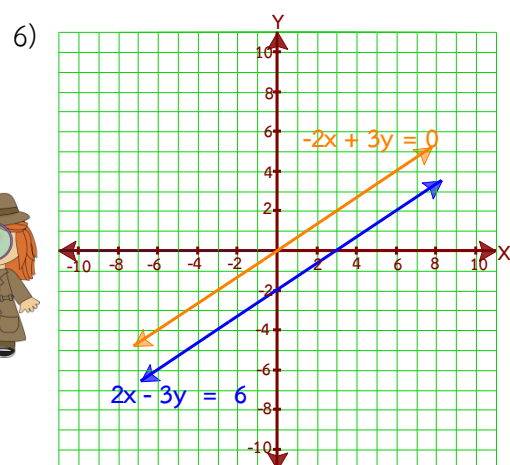
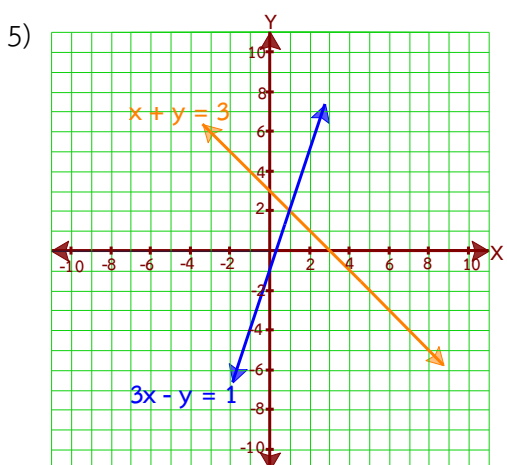
ตอบ.....

ตอบ.....



ตอบ.....

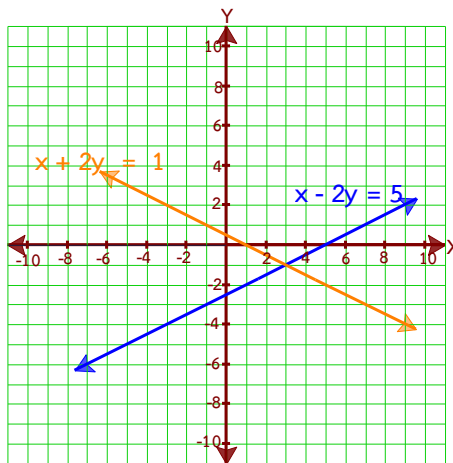
ตอบ.....



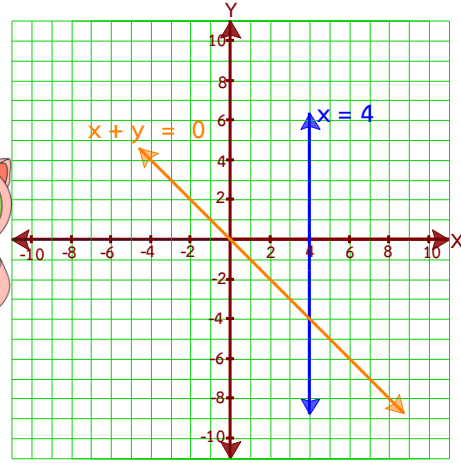
ตอบ.....

ตอบ.....

7)



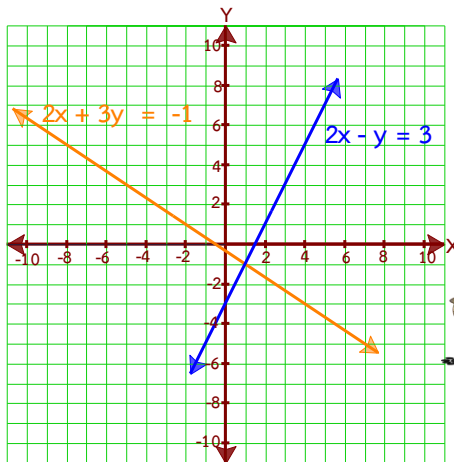
8)



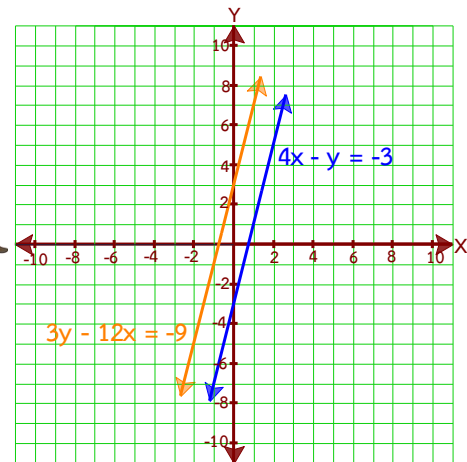
ตอบ.....

ตอบ.....

9)



10)



ตอบ.....

ตอบ.....

ต่อไปนี่ผมก็สามารถหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
จากกราฟได้แล้วครับ



แบบบันทึกผลคะแนนแบบฝึกทักษะที่ 2.2

ข้อที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
1	20	
2	10	
รวม	30	



ผู้ตรวจ.....

เกณฑ์การให้คะแนนข้อ 1

ขั้นตอนการหาคำตอบ	ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
การเขียนสมการให้อยู่ ในรูป $y = ax + b$ ในสมการ ①	1	แทนค่า x และหาค่า y ในสมการ ① แล้วเขียนคู่อันดับ ได้ถูกต้อง
	0	แทนค่า x และหาค่า y ในสมการ ① แล้วเขียนคู่อันดับ ไม่ถูกต้อง
การเขียนสมการให้อยู่ ในรูป $y = ax + b$ ในสมการ ②	1	แทนค่า x และหาค่า y ในสมการ ② แล้วเขียนคู่อันดับ ได้ถูกต้อง
	0	แทนค่า x และหาค่า y ในสมการ ② แล้วเขียนคู่อันดับ ไม่ถูกต้อง
การเขียนกราฟของ สมการ ①	1	เขียนกราฟของสมการ ① ได้ถูกต้อง
	0	เขียนกราฟของสมการ ① ไม่ถูกต้อง
การเขียนกราฟของ สมการ ②	1	เขียนกราฟของสมการ ② ได้ถูกต้อง
	0	เขียนกราฟของสมการ ② ไม่ถูกต้อง
การสรุปคำตอบ	1	แปลความหมายจากกราฟของระบบสมการแล้วสรุป คำตอบได้ถูกต้อง
	0	แปลความหมายจากกราฟของระบบสมการแล้วสรุป คำตอบไม่ถูกต้อง

เกณฑ์การให้คะแนนข้อ 2

ระดับคะแนน	เกณฑ์การให้คะแนน
1	คำตอบถูกต้อง
0	คำตอบไม่ถูกต้อง

