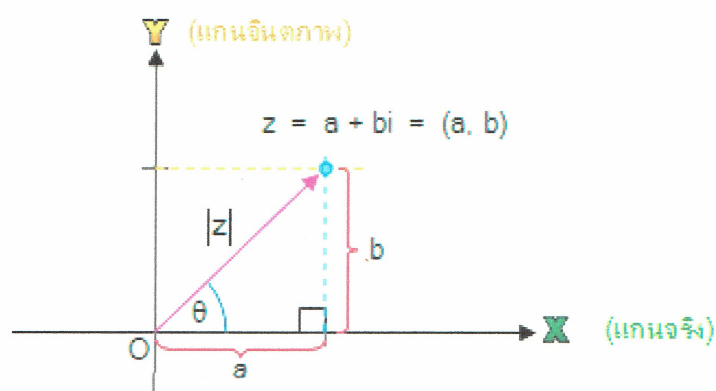


แบบฝึกหัดทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5



เล่มที่ 5

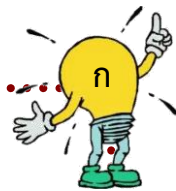
จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

นางวชิราภรณ์ วงศ์รัตน์

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนพรานกระต่ายพิทยาคม อำเภอพรานกระต่าย จังหวัดกำแพงเพชร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41



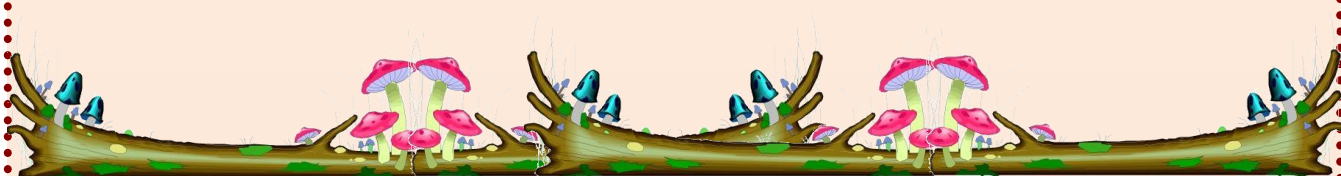
คำนำ

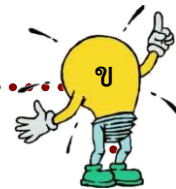
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จัดทำขึ้นเพื่อพัฒนา
การออกแบบการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน โดยส่งเสริมความก้าวหน้า
ทางการเรียนรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และมุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ โดยใช้
กระบวนการคิดวิเคราะห์สังเคราะห์หลายรูปแบบ โดยผู้เรียนสามารถศึกษาค้นคว้า
ด้วยตนเอง ทำให้เกิดทักษะการเรียนรู้อย่างถูกวิธีและมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน
เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนในการเรียนรู้ สามารถ
นำผู้เรียนไปสู่จุดหมายตามศักยภาพ เป็นผู้ที่มีความรู้และทักษะอันพึงประสงค์นำความรู้
ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้ และ เป็นแนวทางสำหรับผู้ที่มีความสนใจต่อไป

ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการโรงเรียนพรานกระต่ายพิทยาคม คณะครูผู้เชี่ยวชาญ
ผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านและขอบใจนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ทุกคน ที่ให้กำลังใจ
ตลอดมา ทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี ขอขอบคุณเป็นอย่างสูง
ไว้ ณ โอกาสนี้

วชิราภรณ์ วงศ์รัตน์

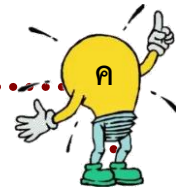




สารบัญ

	หน้า
คำนำ.....	ก
สารบัญ.....	ข
ส่วนประกอบของแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์.....	ค
คำชี้แจง.....	1
คู่มือครู.....	2
คู่มือนักเรียน.....	4
สาระการเรียนรู้.....	5
จุดประสงค์การเรียนรู้.....	6
แบบทดสอบก่อนเรียน.....	7
ใบความรู้ที่ 1.....	9
แบบฝึกทักษะที่ 1.....	15
ใบความรู้ที่ 2.....	21
แบบฝึกทักษะที่ 2.....	24
ใบความรู้ที่ 3.....	30
แบบฝึกทักษะที่ 3.....	33
แบบทดสอบหลังเรียน.....	39
บรรณานุกรม.....	41
ภาคผนวก.....	42
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน.....	43
เฉลยแนวคำตอบแบบฝึกทักษะที่ 1.....	44
เฉลยแนวคำตอบแบบฝึกทักษะที่ 2.....	49
เฉลยแนวคำตอบแบบฝึกทักษะที่ 3.....	54
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน.....	59





ส่วนประกอบของแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อน
ในรูปเชิงขั้ว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

1. ส่วนประกอบต้น มีดังนี้



ปก



คำนำ



สารบัญ



ส่วนประกอบของแบบฝึกทักษะ



คำชี้แจง

2. คู่มือครู มีดังนี้



คำชี้แจงสำหรับครูผู้สอน

3. คู่มือนักเรียน มีดังนี้



คำชี้แจงสำหรับนักเรียน



จุดประสงค์การเรียนรู้



แบบทดสอบก่อนเรียน



เนื้อหา



แบบฝึกทักษะ



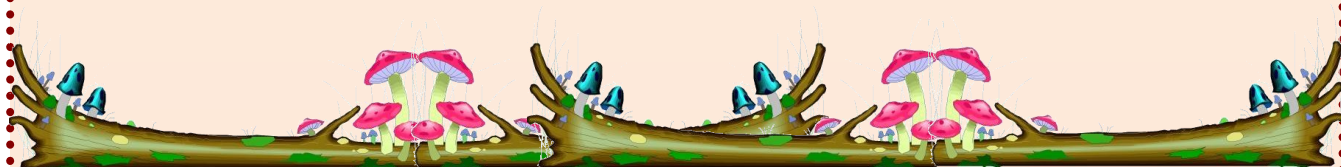
แบบทดสอบหลังเรียน

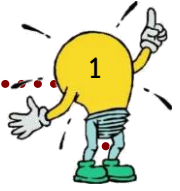


บรรณานุกรม



ภาคผนวก เฉลยแบบทดสอบและเฉลยแบบฝึกทักษะ





คำชี้แจง

เพื่อให้การศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว นักเรียน ควรปฏิบัติดังนี้

1. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมของนักเรียนก่อนที่จะศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้และเนื้อหาตามลำดับขั้นตอนให้เข้าใจ
3. ศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์แต่ละเรื่องตามลำดับให้ต่อเนื่องกัน หากมีข้อสงสัยหรือพบปัญหาให้ขอคำแนะนำหรือสอบถามจากครูผู้สอนเมื่อศึกษาเนื้อหาจบในแต่ละใบความรู้แล้วให้ทำแบบฝึกทักษะเพื่อทบทวนความรู้
4. เมื่อศึกษาเนื้อหาและปฏิบัติกิจกรรมครบทุกกิจกรรมแล้วให้ทำแบบทดสอบหลังเรียนและตรวจคำตอบกับเฉลย
5. นักเรียนต้องซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่ดูเฉลยแนวคำตอบก่อนตอบคำถาม
6. เมื่อทำผิดควรย้อนกลับไปศึกษาเนื้อหาใหม่อีกครั้ง



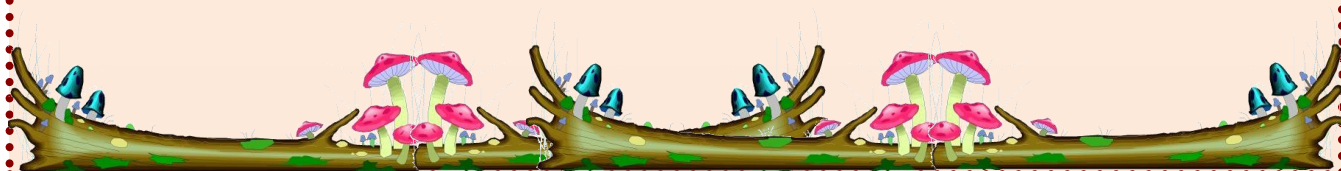


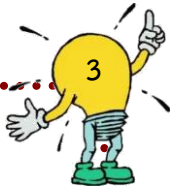
คู่มือครู

คำชี้แจงสำหรับครูผู้สอนแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ได้แบ่งขั้นตอนการดำเนินการ ดังนี้

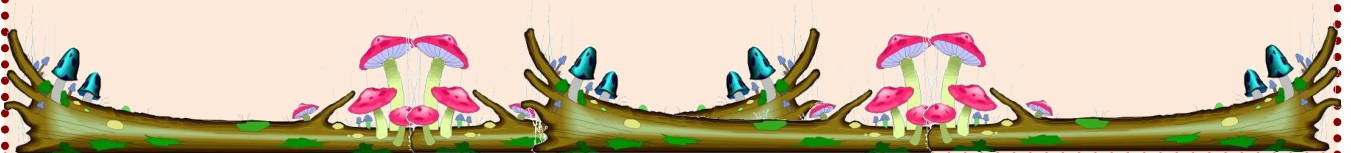
1. การทดสอบก่อนใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน
โดยนำแบบทดสอบก่อนเรียน วัดผลการเรียนรู้ซึ่งเป็นแบบปรนัยจำนวนชุดละ 10 ข้อ
2. การให้ความรู้กับนักเรียน เป็นขั้นที่ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้นักเรียน
มีความเข้าใจในเนื้อหาในแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ประกอบ เพื่อให้นักเรียนมีความเข้าใจ
ที่ดีขึ้น
3. นำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน มาใช้ในการสร้าง
ความเข้าใจในเนื้อหา ในแต่ละเล่ม
4. การให้นักเรียนได้ฝึกฝน เป็นการให้นักเรียนได้ทำแบบฝึกทักษะในแต่ละเล่ม
5. การทดสอบหลังเรียนแต่ละเล่ม เป็นการวัดผลสัมฤทธิ์การเรียนรู้ของนักเรียน
ในแต่ละเล่ม

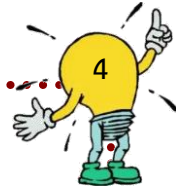




บทบาทผู้สอน

1. ทดสอบนักเรียนก่อนเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ด้วยข้อสอบปรนัย 30 ข้อ
2. แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 5-6 คน โดยคละนักเรียนเก่ง ปานกลาง อ่อนให้อยู่ในกลุ่มเดียวกัน เพื่อให้นักเรียนเก่งได้ช่วยสอนนักเรียนที่เรียนอ่อน
3. ให้นักเรียนเลือกประธาน เลขานุการกลุ่ม ผู้สอนแนะนำบทบาทหน้าที่ของสมาชิก
4. เตรียมแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ให้ผู้เรียนซึ่งประกอบไปด้วยคู่มือนักเรียน ดังนี้ คำชี้แจงสำหรับผู้เรียน เนื้อหา แบบฝึกทักษะ แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียนของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม
5. ขณะที่นักเรียนใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ผู้สอนคอยดูแลชี้แนะและให้คำปรึกษาสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล และการทำงานกลุ่มเพื่อเสนอแนะและปรับปรุงการทำงานให้ดีขึ้น
6. ผู้สอน/ผู้เรียนเก็บคะแนนจากการทำแบบฝึกทักษะ และการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ตรวจผลงานนักเรียนและประเมินผล
7. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์หลังเรียนใช้เวลา 60 นาที





คู่มือนักเรียน

นักเรียนปฏิบัติ ดังนี้



ทำแบบทดสอบก่อนเรียน (รายบุคคล) จำนวน 10 ข้อ ลงใน
กระดาษคำตอบ



ศึกษาเนื้อหาเล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



ทำแบบฝึกทักษะให้ครบทุกฉบับ



ตรวจคำตอบแบบฝึกทักษะจากเฉลย



นำผลการทำแบบทดสอบก่อนเรียน-หลังเรียน มาบันทึก
ลงในตารางเพื่อให้ทราบผลการเรียนและการพัฒนา





สาระการเรียนรู้

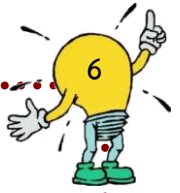
สาระการเรียนรู้

1. การสร้างจำนวนเชิงซ้อน
2. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
3. รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
4. กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
5. จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
6. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
7. สมการพหุนาม

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน
2. นำสมบัติต่างๆเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน การดำเนินการไปใช้แก้ปัญหาได้
3. นำความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนไปแก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มดีกรีไม่เกินสาม และหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้





จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

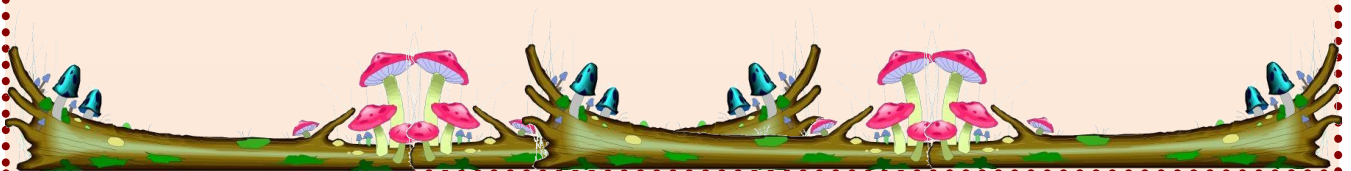
- 1.1 นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้
- 1.2 นักเรียนสามารถหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้
- 1.3 นักเรียนสามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้

ด้านทักษะกระบวนการ

- 2.1 การเชื่อมโยงศาสตร์เดียวกัน
- 2.2 การให้เหตุผล
- 2.3 การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร สื่อความหมาย และนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุม

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 3.1 มีความรับผิดชอบ
- 3.2 มีความซื่อสัตย์
- 3.3 มีระเบียบวินัย





แบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X คำตอบที่ถูกที่สุดในกระดาษคำตอบ (10 คะแนน)



1. รูปเชิงขั้วของ $z = 2 + 2i$ ตรงกับข้อใด

ก. $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

ข. $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

ค. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

ง. $4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$



2. รูปเชิงขั้วของ $z = -4 - 4i$ ตรงกับข้อใด

ก. $4\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

ข. $4\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

ค. $4\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

ง. $4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$



3. $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

ก. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ข. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ค. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ง. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$



4. $z = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

ก. $3i$

ข. $-3i$

ค. 3

ง. -3



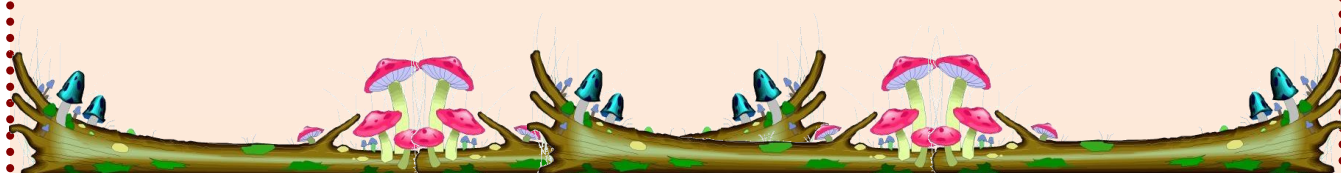
5. $z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

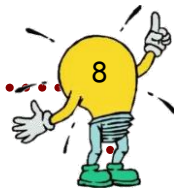
ก. $2 - 2\sqrt{3}i$

ข. $2 + 2\sqrt{3}i$

ค. $-2 - 2\sqrt{3}i$

ง. $-2 + 2\sqrt{3}i$





6.

เมื่อกำหนด $z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

แล้ว $z_1 z_2$ ตรงกับข้อใด

ก. $12\sqrt{3}i$

ข. $-12\sqrt{3}i$

ค. $12i$

ง. $-12i$

7.

เมื่อกำหนด $z_1 = \cos \pi + i \sin \pi$ และ $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ แล้ว $z_1 z_2$

ตรงกับข้อใด

ก. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

ข. $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

ค. $\cos \pi + i \sin \pi$

ง. $\cos 2\pi + i \sin 2\pi$

8.

$$[4(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)][3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)][2(\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)]$$

มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $12\sqrt{3} - 12i$

ข. $-12\sqrt{3} + 12i$

ค. $-12 - 12\sqrt{3}i$

ง. $12 - 12\sqrt{3}i$

9.

เมื่อกำหนด $z_1 = 8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$

ตรงกับข้อใด

ก. $2 + 2\sqrt{3}i$

ข. $2 - 2\sqrt{3}i$

ค. $-2 + 2\sqrt{3}i$

ง. $-2 - 2\sqrt{3}i$

10.

เมื่อกำหนด $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ และ $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

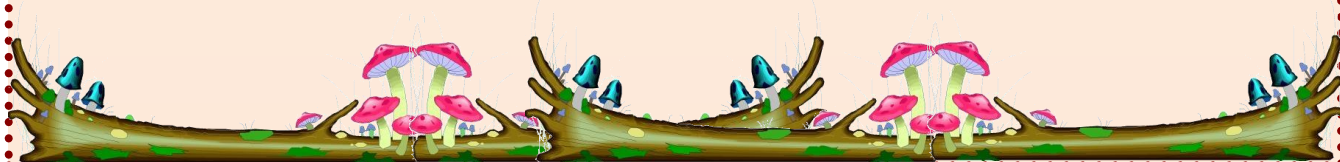
แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

ข. $\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

ค. $\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ง. $\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$



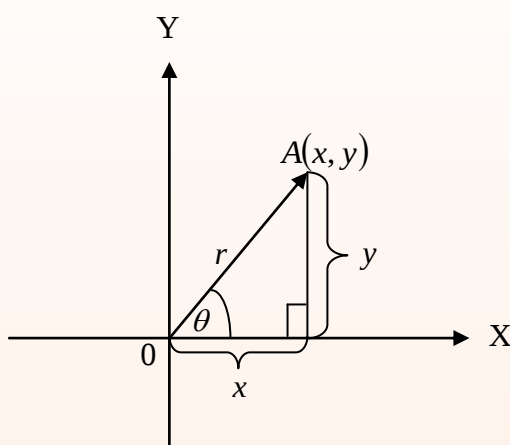


ใบความรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

กำหนด $z = x + yi$ สามารถเขียนกราฟของ z ได้ด้วย (x, y) หรือด้วยเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $O (0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $A(x, y)$ ในระนาบเชิงซ้อน ดังรูป



ให้ r แทนระยะทางระหว่างจุด O กับจุด A

จะได้ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

หาค่า θ ได้จาก $\tan \theta = \frac{y}{x}$

จากรูป จะได้ $\cos \theta = \frac{x}{r}$ และ $\sin \theta = \frac{y}{r}$

$x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$

จาก $z = x + yi$

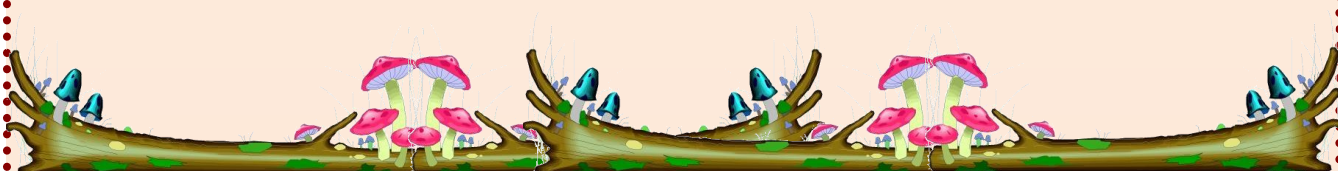
จะได้ $z = r \cos \theta + ir \sin \theta$

หรือ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

นั่นคือ

จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ เขียนในรูปเชิงขั้ว ได้เป็น

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เมื่อ $r = |z|$



ตัวอย่างที่ 1

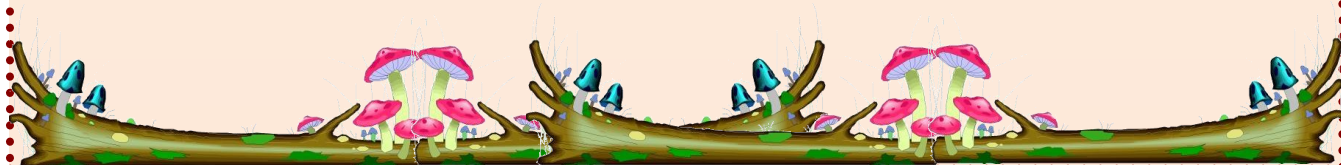
จงเขียน จำนวนเชิงซ้อน $\sqrt{3}+i$ ในรูปเชิงขั้ว



$$\begin{aligned} \text{ให้ } z &= \sqrt{3}+i \quad \text{จะได้ } x = \sqrt{3} \text{ และ } y = 1 \\ \text{จากสูตร } r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{จะได้ } r &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{3+1} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \\ \text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ซึ่ง } (\sqrt{3},1) \text{ อยู่ในควอดรนต์ที่ 1} \\ \text{จะได้ } \theta &= \frac{\pi}{6} \\ \text{เนื่องจาก } z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \text{จะได้ } \sqrt{3}+i &= 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$



$$\text{รูปเชิงขั้วของ } \sqrt{3}+i \text{ คือ } 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$



ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-\sqrt{3}-i$ ในรูปเชิงขั้ว



วิธีทำ

ให้ $z = -\sqrt{3} - i$ จะได้ $x = -\sqrt{3}$ และ $y = -1$

จากสูตร $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

จะได้ $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{3+1}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

หา θ จาก $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$= \frac{-1}{-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ซึ่ง } (-\sqrt{3}, -1) \text{ อยู่ในควอดรนต์ที่ 3}$$

จะได้ $\theta = \frac{7\pi}{6}$

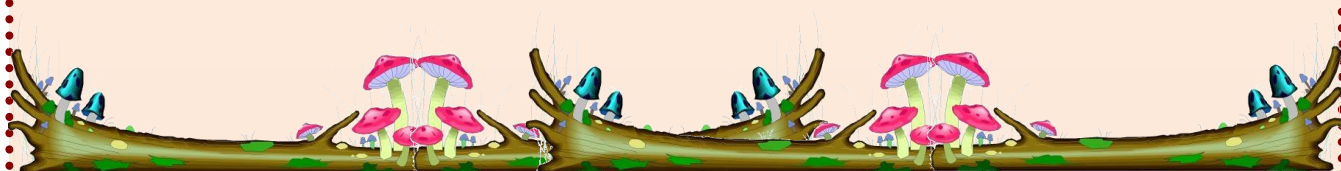
เนื่องจาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

จะได้ $-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$



ตอบ

รูปเชิงขั้วของ $-\sqrt{3} - i$ คือ $2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$



ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-1+i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$\text{ให้ } z = -1+i \quad \text{จะได้ } x = -1 \text{ และ } y = 1$$

$$\text{จากสูตร } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{1+1}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$\text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{1}{-1}$$

$$= -1 \quad \text{ซึ่ง } (-1,1) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2}$$

$$\text{จะได้ } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{เนื่องจาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{จะได้ } -1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$



ตอบ

$$\text{รูปเชิงขั้วของ } -1+i \text{ คือ } \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

ตัวอย่างที่ 4

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน -8 ในรูปเชิงขั้ว



วิธีทำ

ให้ $z = -8$ จะได้ $x = -8$ และ $y = 0$

$$\text{จากสูตร } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-8)^2 + 0^2}$$

$$= \sqrt{64}$$

$$= 8$$

$$\text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{0}{-8}$$

$$= 0 \quad \text{ซึ่ง } (-8, 0)$$

อยู่บนแกน X ทางด้านลบ

$$\text{จะได้ } \theta = \pi$$

$$\text{เนื่องจาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{จะได้ } -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$$



ตอบ

รูปเชิงขั้วของ -8 คือ $8(\cos \pi + i \sin \pi)$



ตัวอย่างที่ 5

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $5i$ ในรูปเชิงขั้ว



วิธีทำ

ให้ $z = 5i$ จะได้ $x = 0$ และ $y = 5$

จากสูตร $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

จะได้ $r = \sqrt{0^2 + 5^2}$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

หา θ จาก $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$= \frac{5}{0} \quad \text{ซึ่ง } (0, 5)$$

อยู่บนแกน Y ทางด้านบวก

จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$

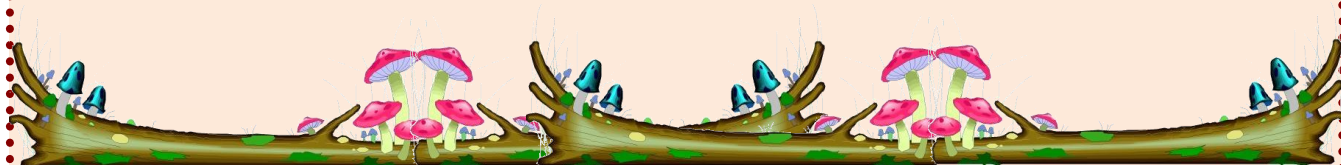
เนื่องจาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

จะได้ $5i = 5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$



ตอบ

รูปเชิงขั้วของ $5i$ คือ $5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$



แบบฝึกทักษะที่ 1

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
ในรูปเชิงขั้วได้

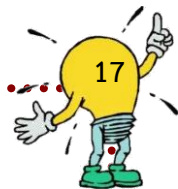
คำชี้แจง

จงเขียนรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
(10 คะแนน) (ข้อละ 2 คะแนน)

1.

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $12i$ ในรูปเชิงขั้ว

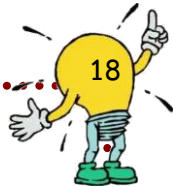
[illegible]



3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $1 - \sqrt{3}i$ ในรูปเชิงขั้ว

Handwriting practice area with 15 horizontal lines.





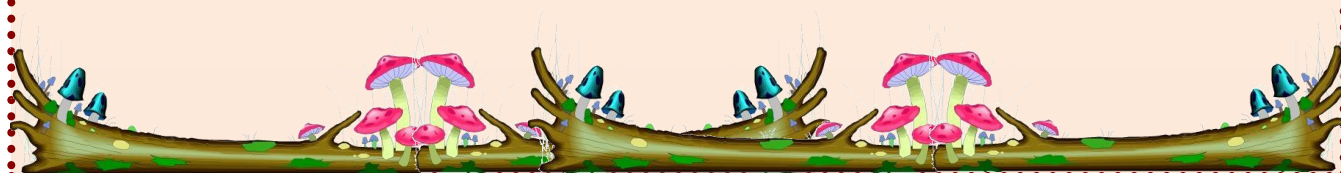
4. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-\sqrt{7} + \sqrt{21}i$ ในรูปเชิงขั้ว

[illegible]

เกณฑ์การให้คะแนนการทำแบบฝึกทักษะ(อัตรัย)
พิจารณาจากการแสดงวิธีการหาคำตอบและความถูกต้องของคำตอบ
แบบฝึกทักษะที่ 1

แบบฝึกทักษะที่ 1 จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน (ข้อละ 2 คะแนน)

คะแนน	ความหมาย	ผลที่ปรากฏให้เห็น
2	ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1.5	ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1	พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือการแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0.5	ควรแก้ไข	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำ และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0	ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์



ใบความรู้ที่ 2

การคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



นักเรียนสามารถหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

ทฤษฎีบท

ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\text{จะได้ } z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

ตัวอย่างที่ 6

$$\text{กำหนด } z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \text{ และ } z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left[2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \right] \left[3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 6 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= 6 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 6(0 + i) \\ &= 6i \end{aligned}$$

ตอบ

6i





ตัวอย่างที่ 7

กำหนด $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

จงหา $z_1 z_2$



วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left[2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \right] \left[4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \right] \\ &= 8 \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) \right] \\ &= 8 \left(\cos \frac{4\pi}{12} + i \sin \frac{4\pi}{12} \right) \\ &= 8 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\ &= 4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$



ตอบ

$$4 + 4\sqrt{3}i$$



ตัวอย่างที่ 8

กำหนด $z_1 = 10(\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ)$ และ $z_2 = 8(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)$

จงหา $z_1 z_2$



วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [10(\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ)] [8(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)] \\ &= 80 [\cos(27^\circ + 63^\circ) + i \sin(27^\circ + 63^\circ)] \\ &= 80(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) \\ &= 80(0 + i) \\ &= 80i \end{aligned}$$



ตอบ

$$80i$$





ตัวอย่างที่ 9

กำหนด $z_1 = 5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ และ $z_2 = 8(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

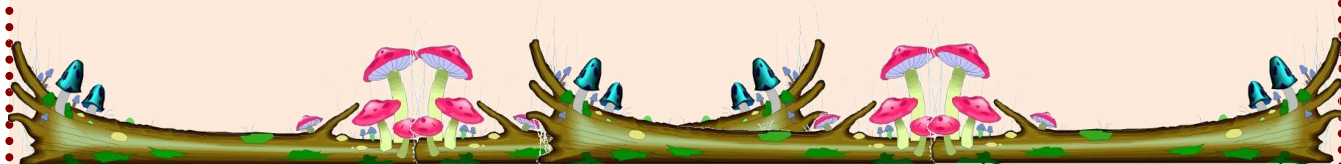
จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [5(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)][8(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)] \\ &= 40[\cos(120^\circ + 30^\circ) + i \sin(120^\circ + 30^\circ)] \\ &= 40(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \\ &= 40\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -20\sqrt{3} + 20i \end{aligned}$$

ตอบ

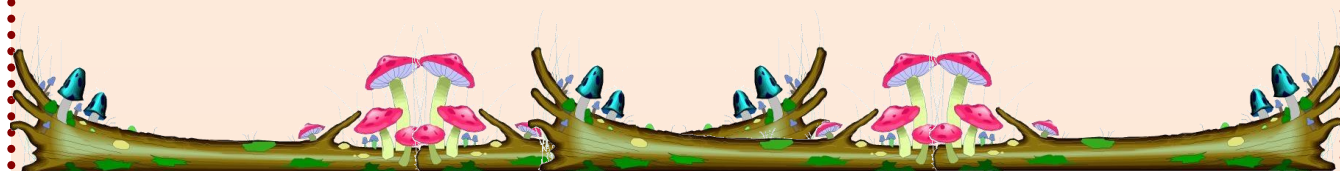
$$-20\sqrt{3} + 20i$$



เกณฑ์การให้คะแนนการทำแบบฝึกทักษะ(อัตนัย)
พิจารณาจากการแสดงวิธีการหาคำตอบและความถูกต้องของคำตอบ
แบบฝึกทักษะที่ 2

แบบฝึกทักษะที่ 2 จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน (ข้อละ 2 คะแนน)

คะแนน	ความหมาย	ผลที่ปรากฏให้เห็น
2	ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1.5	ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1	พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือการแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0.5	ควรแก้ไข	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำ และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0	ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์



ใบความรู้ที่ 3

การหารของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



นักเรียนสามารถหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วได้

ทฤษฎีบท

ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\text{จะได้ } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

ตัวอย่างที่ 11

$$\text{กำหนด } z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \text{ และ } z_2 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{จงหา } \frac{z_1}{z_2}$$



วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i \end{aligned}$$



ตอบ

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$



ตัวอย่างที่ 12

กำหนด $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ และ $z_2 = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)}{4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)} \\
 &= \frac{2}{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i
 \end{aligned}$$

ตอบ

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

ตัวอย่างที่ 13

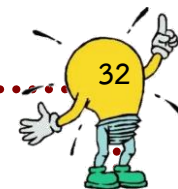
กำหนด $z_1 = 8\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{8\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)}{2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{8}{2} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 &= 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= 4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= -2 + 2\sqrt{3}i
 \end{aligned}$$

ตอบ

$$-2 + 2\sqrt{3}i$$



ตัวอย่างที่ 14

กำหนด $z_1 = 5(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ)$ และ $z_2 = 4(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ)$

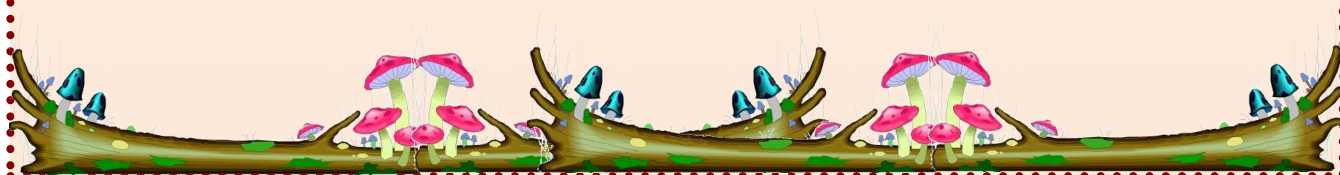
จงหา $\frac{z_1}{z_2}$



$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ)}{4(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ)} \\ &= \frac{5}{4} [\cos(230^\circ - 170^\circ) + i \sin(230^\circ - 170^\circ)] \\ &= \frac{5}{4} (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8} i\end{aligned}$$



$$\frac{5}{8} + \frac{5\sqrt{3}}{8} i$$





2. กำหนด $z_1 = 6\left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}\right)$ และ $z_2 = 3\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

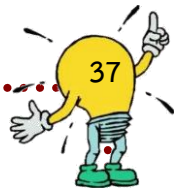
[illegible]



3. กำหนด $z_1 = \cos 430^\circ + i \sin 430^\circ$ และ $z_2 = 5(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$



4. กำหนด $z_1 = 9(\cos 415^\circ + i \sin 415^\circ)$ และ $z_2 = 6(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$



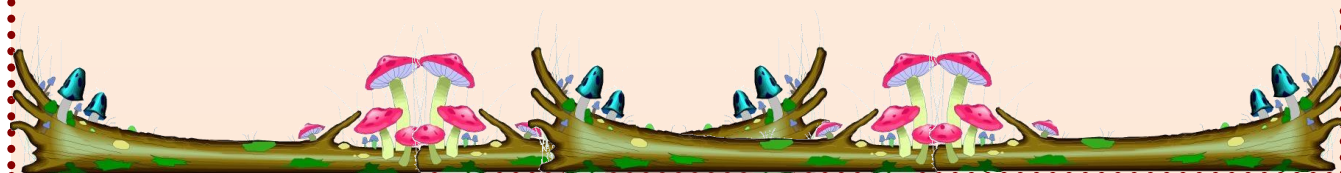
5. กำหนด $z_1 = 5\left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

[illegible]

เกณฑ์การให้คะแนนการทำแบบฝึกทักษะ(อัตนัย)
พิจารณาจากการแสดงวิธีการหาคำตอบและความถูกต้องของคำตอบ
แบบฝึกทักษะที่ 3

แบบฝึกทักษะที่ 3 จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน (ข้อละ 2 คะแนน)

คะแนน	ความหมาย	ผลที่ปรากฏให้เห็น
2	ดีมาก	การแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1.5	ดี	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบและวาดกราฟถูกต้องครบถ้วน
1	พอใช้	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ คำตอบถูกต้องครบถ้วน หรือการแสดงวิธีทำชัดเจน สมบูรณ์ แต่คำตอบไม่ถูกต้อง ขาดการตรวจสอบ วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0.5	ควรแก้ไข	การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจนดีนัก แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง คำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่แสดงวิธีทำ และคำตอบที่ได้ไม่ถูกต้อง แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง วาดกราฟไม่ถูกต้อง
0	ต้องปรับปรุง	ทำได้ไม่ถึงเกณฑ์



แบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



คำสั่ง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X คำตอบที่ถูกที่สุดในกระดาษคำตอบ (10 คะแนน)



1.

$z = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

ก. $-2 + 2\sqrt{3}i$

ข. $-2 - 2\sqrt{3}i$

ค. $2 + 2\sqrt{3}i$

ง. $2 - 2\sqrt{3}i$



2.

$z = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

ก. -3

ข. 3

ค. $-3i$

ง. $3i$



3.

รูปเชิงขั้วของ $z = 2 + 2i$ ตรงกับข้อใด

ก. $4\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

ข. $4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

ค. $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

ง. $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$



4.

เมื่อกำหนด $z_1 = \cos \pi + i \sin \pi$ และ $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ แล้ว $z_1 z_2$

ตรงกับข้อใด

ก. $\cos 2\pi + i \sin 2\pi$

ข. $\cos \pi + i \sin \pi$

ค. $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

ง. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$



5.

เมื่อกำหนด $z_1 = 8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$ แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$

ตรงกับข้อใด

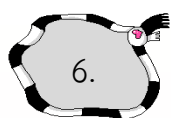
ก. $-2 - 2\sqrt{3}i$

ข. $-2 + 2\sqrt{3}i$

ค. $2 - 2\sqrt{3}i$

ง. $2 + 2\sqrt{3}i$





6. $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ เป็นรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในข้อใด

ก. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ข. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ค. $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

ง. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$



7. เมื่อกำหนด $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ และ $z_2 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

แล้ว $\frac{z_1}{z_2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

ข. $\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

ค. $\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

ง. $\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$



8. รูปเชิงขั้วของ $z = -4 - 4i$ ตรงกับข้อใด

ก. $4 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$

ข. $4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$

ค. $4 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

ง. $4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$



9. เมื่อกำหนด $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ และ $z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

แล้ว $z_1 z_2$ ตรงกับข้อใด

ก. $-12i$

ข. $12i$

ค. $-12\sqrt{3}i$

ง. $12\sqrt{3}i$



10. $[4(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)][3(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)][2(\cos 65^\circ + i \sin 65^\circ)]$

มีค่าตรงกับข้อใด

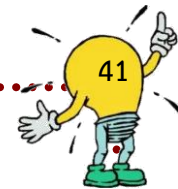
ก. $12 - 12\sqrt{3}i$

ข. $-12 - 12\sqrt{3}i$

ค. $-12\sqrt{3} + 12i$

ง. $12\sqrt{3} - 12i$





บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล และคณะ.(2555). คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 – 6 เล่ม 4.

กรุงเทพมหานคร : อักษรเจริญทัศน์.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). หนังสือเรียนเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 ภาคเรียนที่ 2.

กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

เลิศ สิทธิโกศล. (2555). Math Review คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 (เพิ่มเติม).

กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพมหานคร: สกสค.

สมัย เหล่าวานิชย์. (2554). Hi-ED's Mathematics คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 เล่ม 4

(รายวิชาพื้นฐานและเพิ่มเติม). กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง.





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



ข้อที่	คำตอบ
1.	ข
2.	ค
3.	ก
4.	ง
5.	ง
6.	ค
7.	ข
8.	ข
9.	ก
10.	ค



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของจำนวนเชิงซ้อน
ในรูปเชิงขั้วได้

คำชี้แจง

จงเขียนรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
(10 คะแนน) (ข้อละ 2 คะแนน)



1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $12i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$\text{ให้ } z = 12i \quad \text{จะได้ } x = 0 \text{ และ } y = 12$$

$$\text{จากสูตร } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{0^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{144}$$

$$= 12$$

$$\text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{12}{0} \quad \text{ซึ่ง } (0, 12)$$

อยู่บนแกน Y ทางด้านบน

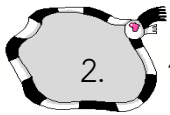
$$\text{จะได้ } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{เนื่องจาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{จะได้ } 12i = 12 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{ตอบ } \text{รูปเชิงขั้วของ } 12i \text{ คือ } 12 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$





2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$\text{ให้ } z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{จะได้ } x = -\sqrt{2} \text{ และ } y = -\sqrt{2}$$

$$\text{จากสูตร } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{2+2}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

$$\text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$$

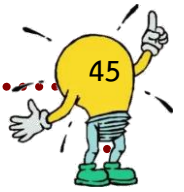
$$= 1 \quad \text{ซึ่ง } (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3}$$

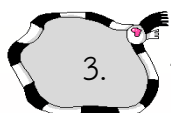
$$\text{จะได้ } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{เนื่องจาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{จะได้ } -\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\text{ตอบ } \text{รูปเชิงขั้วของ } -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \text{ คือ } 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$$





3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $1 - \sqrt{3}i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ให้ $z = 1 - \sqrt{3}i$ จะได้ $x = 1$ และ $y = -\sqrt{3}$

จากสูตร $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

จะได้ $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$

$$= \sqrt{1+3}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

หา θ จาก $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{1}$$

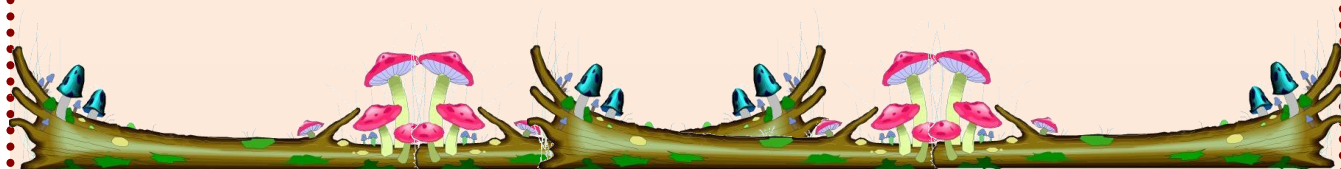
$$= -\sqrt{3} \text{ ซึ่ง } (1, -\sqrt{3}) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 4}$$

จะได้ $\theta = \frac{5\pi}{3}$

เนื่องจาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

จะได้ $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

ตอบ รูปเชิงขั้วของ $1 - \sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$





4. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $-\sqrt{7} + \sqrt{21}i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

$$\text{ให้ } z = -\sqrt{7} + \sqrt{21}i \quad \text{จะได้ } x = -\sqrt{7} \quad \text{และ } y = \sqrt{21}$$

$$\text{จากสูตร } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{จะได้ } r = \sqrt{(-\sqrt{7})^2 + (\sqrt{21})^2}$$

$$= \sqrt{7 + 21}$$

$$= \sqrt{28}$$

$$= 2\sqrt{7}$$

$$\text{หา } \theta \text{ จาก } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{-\sqrt{7}}$$

$$= -\sqrt{3} \quad \text{ซึ่ง } (-\sqrt{7}, \sqrt{21}) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 2}$$

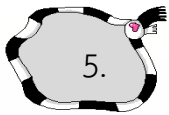
$$\text{จะได้ } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{เนื่องจาก } z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{จะได้ } -\sqrt{7} + \sqrt{21}i = 2\sqrt{7} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{ตอบ } \text{รูปเชิงขั้วของ } -\sqrt{7} + \sqrt{21}i \quad \text{คือ } 2\sqrt{7} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$





5. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ

ให้ $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

จากสูตร $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

จะได้ $r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

หา θ จาก $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

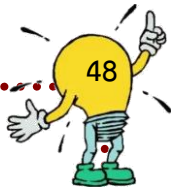
$$= 1 \quad \text{ซึ่ง } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ อยู่ในควอดรันต์ที่ 1}$$

จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$

เนื่องจาก $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

จะได้ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

ตอบ รูปเชิงขั้วของ $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ คือ $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อนใน
รูปเชิงขั้วได้

คำชี้แจง

จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ (10 คะแนน) (ข้อละ 2 คะแนน)



1. กำหนด $z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$ และ $z_2 = 5\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$ จงหา $z_1 z_2$

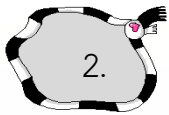
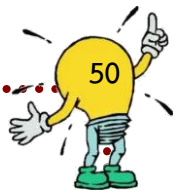
วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= \left[4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \right] \left[5\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right) \right] \\
 &= 20 \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) \right] \\
 &= 20 \left(\cos \frac{6\pi}{12} + i \sin \frac{6\pi}{12} \right) \\
 &= 20 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 20(0 + i) \\
 &= 0 + 20i \\
 &= 20i
 \end{aligned}$$

ตอบ

20i





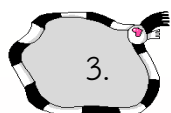
2. กำหนด $z_1 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{36} + i \sin \frac{5\pi}{36}\right)$ และ $z_2 = 3\left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18}\right)$ จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left[2\left(\cos \frac{5\pi}{36} + i \sin \frac{5\pi}{36}\right) \right] \left[3\left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18}\right) \right] \\ &= 6 \left[\cos \left(\frac{5\pi}{36} + \frac{29\pi}{18} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{36} + \frac{29\pi}{18} \right) \right] \\ &= 6 \left(\cos \frac{63\pi}{36} + i \sin \frac{63\pi}{36} \right) \\ &= 6 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

ตอบ $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$





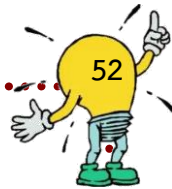
3. กำหนด $z_1 = 3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)$ และ $z_2 = 5(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)$ จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= [3(\cos 72^\circ + i \sin 72^\circ)][5(\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ)] \\
 &= 15[\cos(72^\circ + 63^\circ) + i \sin(72^\circ + 63^\circ)] \\
 &= 15(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \\
 &= 15\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
 &= -\frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}i
 \end{aligned}$$

ตอบ $-\frac{15\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}i$





4. กำหนด $z_1 = 12\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$ และ $z_2 = 6\left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}\right)$ จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \left[12\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right) \right] \left[6\left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}\right) \right] \\ &= 72 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) \right] \\ &= 72 \left(\cos \frac{10\pi}{5} + i \sin \frac{10\pi}{5} \right) \\ &= 72 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ &= 72 (1 + 0i) \\ &= 72 + 0i \\ &= 72 \end{aligned}$$

ตอบ

72





5. กำหนด $z_1 = 7(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$ และ $z_2 = 5(\cos 205^\circ + i \sin 205^\circ)$ จงหา $z_1 z_2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= [7(\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)][5(\cos 205^\circ + i \sin 205^\circ)] \\
 &= 35[\cos(200^\circ + 205^\circ) + i \sin(200^\circ + 205^\circ)] \\
 &= 35(\cos 405^\circ + i \sin 405^\circ) \\
 &= 35(\cos(360^\circ + 45^\circ) + i \sin(360^\circ + 45^\circ)) \\
 &= 35(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\
 &= 35\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
 &= \frac{35\sqrt{2}}{2} + \frac{35\sqrt{2}}{2}i
 \end{aligned}$$

ตอบ $\frac{35\sqrt{2}}{2} + \frac{35\sqrt{2}}{2}i$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาคำตอบของจำนวนเชิงซ้อน
ในรูปเชิงขั้วได้

คำชี้แจง

จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ (10 คะแนน) (ข้อละ 2 คะแนน)



1. กำหนด $z_1 = 8(\cos 5\pi + i \sin 5\pi)$ และ $z_2 = 4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{8(\cos 5\pi + i \sin 5\pi)}{4(\cos 3\pi + i \sin 3\pi)} \\ &= 2[\cos(5\pi - 3\pi) + i \sin(5\pi - 3\pi)] \\ &= 2(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \\ &= 2(1 + 0i) \\ &= 2 + 0i \\ &= 2 \end{aligned}$$

ตอบ

2



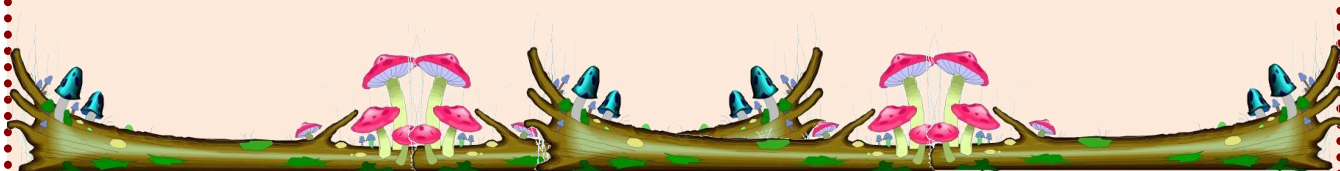


2. กำหนด $z_1 = 6\left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}\right)$ และ $z_2 = 3\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{6\left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5}\right)}{3\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}\right)} \\
 &= \frac{6}{3} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} \right) \right] \\
 &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{5} + i \sin \frac{5\pi}{5} \right) \\
 &= 2(\cos \pi + i \sin \pi) \\
 &= 2(-1 + 0i) \\
 &= -2 + 0i \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

ตอบ -2





3. กำหนด $z_1 = \cos 430^\circ + i \sin 430^\circ$ และ $z_2 = 5(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\cos 430^\circ + i \sin 430^\circ}{5(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)} \\&= \frac{1}{5} [\cos(430^\circ - 160^\circ) + i \sin(430^\circ - 160^\circ)] \\&= \frac{1}{5} (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \\&= \frac{1}{5} (0 - i) \\&= 0 - \frac{1}{5}i \\&= -\frac{1}{5}i\end{aligned}$$

ตอบ $-\frac{1}{5}i$





4. กำหนด $z_1 = 9(\cos 415^\circ + i \sin 415^\circ)$ และ $z_2 = 6(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{9(\cos 415^\circ + i \sin 415^\circ)}{6(\cos 115^\circ + i \sin 115^\circ)} \\ &= \frac{9}{6} [\cos(415^\circ - 115^\circ) + i \sin(415^\circ - 115^\circ)] \\ &= \frac{3}{2} (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} i \end{aligned}$$

ตอบ $\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} i$





5. กำหนด $z_1 = 5\left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}\right)$ และ $z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ จงหา $\frac{z_1}{z_2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5\left(\cos \frac{10\pi}{3} + i \sin \frac{10\pi}{3}\right)}{2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)} \\
 &= \frac{5}{2} \left[\cos \left(\frac{10\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{10\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \frac{5}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\
 &= \frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} i
 \end{aligned}$$

ตอบ $\frac{5}{4} - \frac{5\sqrt{3}}{4} i$



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เล่มที่ 5 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว



ข้อที่	คำตอบ
1.	ก
2.	ก
3.	ค
4.	ค
5.	ง
6.	ง
7.	ข
8.	ข
9.	ข
10.	ค

