

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง ภาคตัดกรวย

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เล่มที่

1

วงกลม

จัดทำโดย

นายภาณุวัฒน์ เกียรติณฤมณ
ตำแหน่ง ครูชำนาญการ

โรงเรียนบรบือ

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 26

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่องวงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อการจัดการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน รหัสวิชา ค 30202 ซึ่งผู้เรียนสามารถนำมาฝึกทักษะในขณะที่เรียนคาบ ทบทวนซ้ำหรือฝึกเสริมทักษะนอกเวลา ทำให้ผู้เรียนมีความรู้ความเข้าใจมากยิ่งขึ้น และเพิ่มทักษะการคิดวิเคราะห์คำนวณ นอกจากนี้ยังส่งเสริมคุณลักษณะที่พึงประสงค์ให้กับผู้เรียนเป็นผู้ใฝ่รู้ใฝ่เรียน มีความรับผิดชอบและมีความซื่อสัตย์ แบบฝึกหัดจึงมีความเหมาะสมที่จะช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจเนื้อหาว่าง่ายเรียงลำดับไปหาเรื่องที่ยาก นักเรียนสามารถประเมินความก้าวหน้าด้านการเรียนของตนเองได้ทันที นับว่าเป็นการเสริมแรงให้กับผู้เรียนเป็นอย่างดี

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกหัดทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และผู้สนใจทั่วไป

ภานุวัฒน์ เกียรติณกุล

สารบัญ

ส่วนเนื้อหา

- คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะ	1
- คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู	2
- คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน	3
- ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 วงกลม	4
- มาตรฐานการเรียนรู้, ตัวชี้วัด	5
- สาระสำคัญ, ผลการเรียนรู้, จุดประสงค์การเรียนรู้	6
- แบบทดสอบก่อนเรียน เรื่องวงกลม	7
- ใบความรู้ ความเป็นมาของภาคตัดกรวย	12
- กิจกรรมที่ 1 กำเนิดภาคตัดกรวย	15
- ใบความรู้ เรื่องวงกลม	16
- กิจกรรมที่ 2 บทนิยามของวงกลม	16
- แบบฝึกทักษะที่ 1	20
- กิจกรรมที่ 3 รูปแบบทั่วไปของวงกลม	22
- แบบฝึกทักษะที่ 2	25
- กิจกรรมที่ 4 การหาสมการวงกลม	27
- แบบฝึกทักษะที่ 3	34
- ใบความรู้ วงกลมและการแก้ปัญหาจากสถานการณ์จริง	35
- กิจกรรมที่ 5 ปริศนาอัจฉริยะครอปเซอร์เคิล (Crop circles)	36
- กิจกรรมที่ 6 วงโคจรของดวงดาว	38
- แบบทดสอบหลังเรียน เรื่องวงกลม	39
- เฉลยแบบฝึกทักษะ เรื่องวงกลม	43
- บรรณานุกรม	54

คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะ

1. เอกสารฉบับนี้เป็นแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาควัตถุ รวบรวมรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีทั้งหมด 4 เล่ม ดังนี้



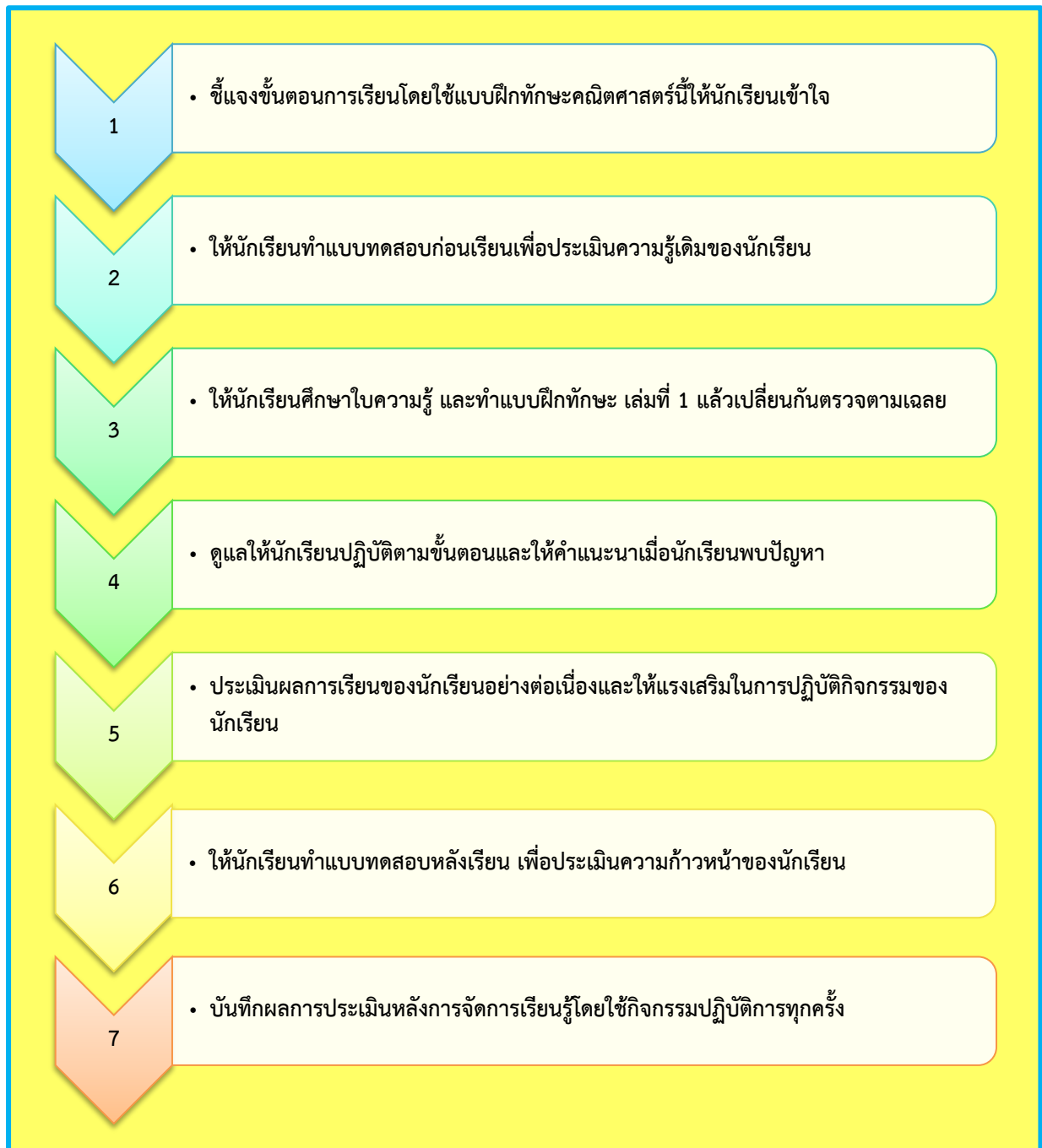
2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้การสอน ให้นักเรียนได้ศึกษาทำความเข้าใจ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ เป็นเล่มที่ 1 วงกลม ประกอบด้วย คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะ คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะ แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ ใบกิจกรรม แบบฝึกทักษะ โจทย์แก้ปัญหาจากสถานการณ์จริงเรื่องวงกลม และแบบทดสอบหลังเรียน

4. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ใช้เวลาเรียน 5 คาบ

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ครูผู้สอนควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะ ดังนี้



คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 นักเรียนควรปฏิบัติตามคำแนะนำ ดังนี้

1

- อ่านคำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะ และคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียนให้เข้าใจก่อนลงมือทำงานหรือทำการศึกษาทุกครั้ง

2

- ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อประเมินความรู้เดิมของนักเรียน

3

- ศึกษาใบความรู้ และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 วงกลม ถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ให้ศึกษาใบความรู้ใหม่อีก ศึกษาตัวอย่างหรือปรึกษาครูผู้สอน

4

- เปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกทักษะตามเฉลยและบันทึกคะแนนที่ได้ไว้ จากนั้นร่วมกันสรุปองค์ความรู้โดยครูคอยชี้แนะแนวทางและอธิบายเพิ่มเติม

5

- ทำแบบทดสอบหลังเรียนเพื่อประเมินความก้าวหน้าของตนเองหลังจากศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 จบแล้ว

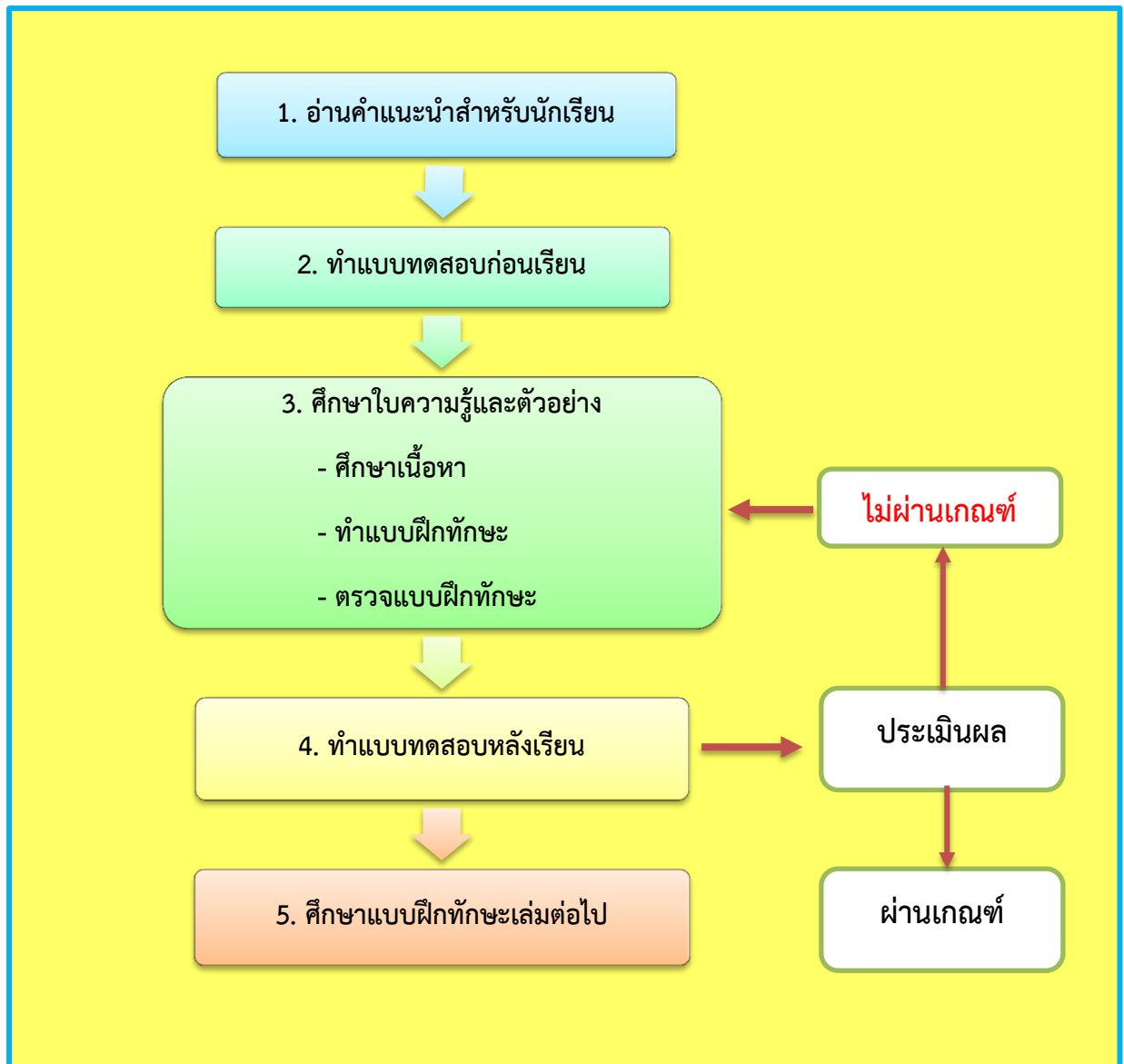
6

- ในการทำแบบฝึกทักษะ แบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน ให้นักเรียนพยายามทำด้วยความตั้งใจ และมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองให้มากที่สุด โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน

7

- ประเมินผลว่านักเรียนผ่านเกณฑ์หรือไม่
 - ☒ “ผ่านเกณฑ์การประเมิน” ให้นักเรียนศึกษาแบบฝึกทักษะ ชุดต่อไป
 - ☒ “ไม่ผ่านเกณฑ์การประเมิน” ให้นักเรียนย้อนกลับไปศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะด้วยตนเองใหม่

ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มที่ 1 วงกลม



มาตรฐานการเรียนรู้, ตัวชี้วัด

มาตรฐานการเรียนรู้

- สาระที่ 3 : เรขาคณิต
- มาตรฐานการเรียนรู้ ค 3.1
อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติ
และสามมิติ
- มาตรฐานการเรียนรู้ ค 3.2
ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผล
เกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และ
ใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric
model) ในการแก้ปัญหา

สาระสำคัญ, ผลการเรียนรู้, จุดประสงค์การเรียนรู้

สาระสำคัญ

- สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมียาว r หน่วย คือสมการ
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ผลการเรียนรู้

- มีความรู้พื้นฐานเรื่องวงกลม และนำสมบัติของวงกลมไปประยุกต์ใช้ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

- ด้านความรู้นักเรียนสามารถ
 1. นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหาได้
- ด้านทักษะนักเรียนมีความสามารถ
 1. ในการสร้างความเข้าใจ
 2. ในการคิดวิเคราะห์
 3. เชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์
 4. ในการให้เหตุผล
- ด้านคุณลักษณะปลูกฝังให้นักเรียน
 1. มีความรับผิดชอบ
 2. มีความรอบคอบ
 3. ทำงานอย่างเป็นระบบ
 4. การร่วมกิจกรรม
 5. การทำงานร่วมกับผู้อื่น

แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่อง วงกลม

คำชี้แจง

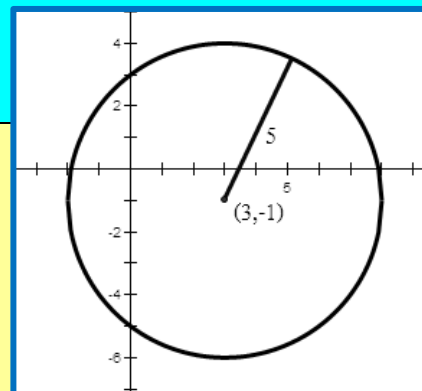
1. แบบทดสอบก่อนเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน เวลา 30 นาที
2. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับตัวอักษร ก ข ค หรือ ง ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนนคือ ตอบถูกต้อง 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ให้ $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$ จัดรูปเป็นสมการวงกลมมาตรฐานตามข้อใด

- ก. $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 64$
- ข. $(x+8)^2 + (y+8)^2 = 64$
- ค. $(x+16)^2 + (y+8)^2 = 64$
- ง. $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 64$

2. จากรูป วงกลมต่อไปนี้ตรงกับสมการใด

- ก. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$
- ข. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$
- ค. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$
- ง. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$



3. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4, 2)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y + 40 = 0$ คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$

4. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ เป็นวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางและรัศมีมีค่าเท่าใด

ก. ไม่เป็นวงกลม

ข. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 5 หน่วย

ค. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 3 หน่วย

ง. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, -1)$ รัศมี 15 หน่วย

5. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

ก. จุดศูนย์กลาง $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ รัศมี 3 หน่วย

ง. จุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ รัศมี 3 หน่วย



6. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 10y + 7 = 0$ เมื่อกำหนดจุดสัมผัสได้ที่จุด $(3, -2)$

ก. $x + y + 1 = 0$

ข. $x - y - 1 = 0$

ค. $x + y - 1 = 0$

ง. $x - y + 1 = 0$

7. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$

ก. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$

ข. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y + 135 = 0$

ค. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 135 = 0$

ง. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y - 135 = 0$

8. ให้ A เป็นวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ และ B เป็นวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ข้อใดถูกต้อง

ก. วงกลม A ตัดกับ วงกลม B

ข. วงกลม A สัมผัสกับ วงกลม B

ค. วงกลม A อยู่ภายใน วงกลม B

ง. วงกลม A ไม่ได้และไม่สัมผัสกับ วงกลม B



9. วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะห่างเท่าใด

- ก. 3 หน่วย
- ข. 4 หน่วย
- ค. 5 หน่วย
- ง. 6 หน่วย

10. ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางบนแกน x
- ข. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 63 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดตัดของเส้นตรง $x - y = 12$ กับ $x - 2y - 19 = 0$
- ค. วงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 10y = 15$ สัมผัสกับเส้นตรง $x = -4$
- ง. เส้นตรง $x + y + 13 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

ได้.....คะแนน



ใบความรู้

ใบความรู้ ความเป็นมาของภาคตัดกรวย

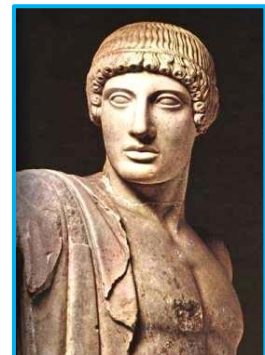
ใบความรู้ที่ 1

ความเป็นมาของภาคตัดกรวย

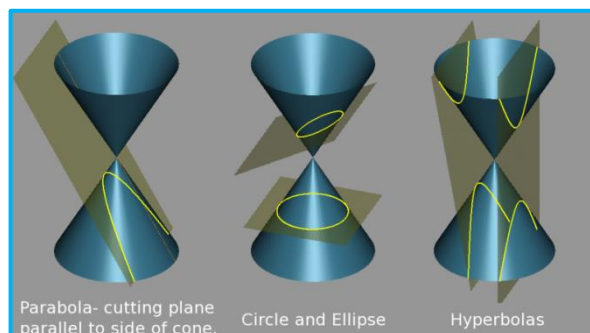
ภาคตัดกรวย (Conic Sections)

นักคณิตศาสตร์มุ่งเน้นในการแก้ปัญหาแนวคิดหนึ่งเพียงเพราะว่า เป็นเรื่องที่น่าสนใจ หรือ อยากรู้อยากเห็น ลองย้อนไปดูนักคิดชาวกรีกโบราณจะพบว่า พวกเขาศึกษาแนวคิดต่าง ๆ อย่าง ซะมักเขม้นโดยไม่คิดถึงประโยชน์ของความคิดเห็นเหล่านั้น แต่เป็นเพียงเพราะว่าพวกเขากำลังตื่นเต้น ทำทาย หรือสนใจเท่านั้น แนวคิดเรื่อง**ภาคตัดกรวย** ก็เช่นกัน

การศึกษาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยเริ่มต้นมานานแล้ว โดย อะพอลโลเนียส แห่งเพอร์ก้า (Apollonius of perga) ซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วง 262 – 190 ปีก่อนคริสต์ศักราช เป็นผู้หนึ่งที่ศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติ บางประการที่น่าสนใจของภาคตัดกรวย เขาได้เขียนตำราเกี่ยวกับภาคตัดกรวยไว้ถึง 8 เล่ม เป็นรากฐานให้นักคณิตศาสตร์ในคริสต์ศตวรรษที่ 17 นำสมบัติต่าง ๆ ของภาคตัดกรวยไปใช้ประโยชน์มากมาย



ภาคตัดกรวย (Conic section หรือ conic) ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ส่วนโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลม ด้วยระนาบแบน ส่วนโค้งที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่แตกต่างกันตามมุมที่ระนาบ ทำกับแกนของกรวย ซึ่งสามารถแบ่งออกได้ 4 ลักษณะ ดังรูป



ภาคตัดกรวย ที่เราจะศึกษากันเกิดจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวย ประกอบด้วย

1. วงกลม (circle)
2. วงรี (ellipse)
3. พาราโบลา (parabola)
4. ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

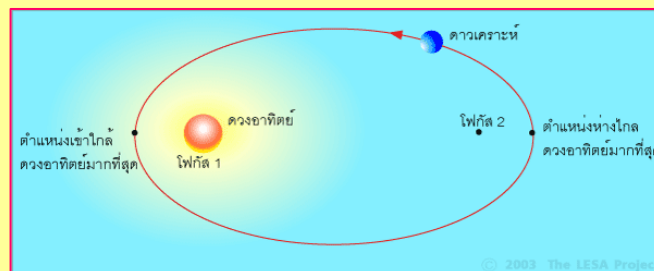
1. วงกลม

ในทางคณิตศาสตร์ ถือว่าวงกลมเป็นเส้นโค้งที่สมบูรณ์ เครื่องใช้ต่างๆ ของเรามักมีลักษณะเป็นวงกลม เช่น ขันตักน้ำ หน้าปัดนาฬิกา จานข้าว ถาด กระโถน เงินเหรียญ แก้วน้ำ ท่านลองตรวจดูของใช้รอบ ๆ ภาย และทั่ว ๆ ไป จะเห็นว่าการใช้ของที่มีลักษณะเป็นวงกลมนั้นให้ความสะดวก มากที่สุด ลองนึกดูว่าถ้าล้อเกวียน ล้อจักรยานยนต์ ล้อรถยนต์ ไม่มีลักษณะ เป็นวงกลมแล้ว การเคลื่อนที่ จะลำบากสักเพียงใด



2. วงรี

ยามค่ำคืนถ้าได้มีโอกาสสังเกตบนฟากฟ้าจะพบเห็นดาวที่สุกสว่างมีแสงเจิดจ้า ซึ่งได้แก่ดาวเคราะห์ และหากสังเกตต่อเนื่องไปหลาย ๆ วัน และอาจถึงหลายเดือนจะพบเห็นการเคลื่อนที่ผ่านกลุ่มดาวฤกษ์ ในทางดาราศาสตร์ พบว่าทางเดินของโลกและดาวเคราะห์ต่าง ๆ ที่เดินรอบดวงอาทิตย์ ต่างก็ล้วนมีเส้นทางเป็นรูปวงรี โดยมีดวงอาทิตย์อยู่ที่จุดโฟกัสของวงรีแต่ละวง ดวงจันทร์ซึ่งเป็นดาวบริวารของดาวเคราะห์ก็เดิน ทางรอบดาวเคราะห์เป็นวงรี แม้ดาวเทียมที่มนุษย์ประดิษฐ์ขึ้นก็หมุนรอบโลก เป็นวงรี



3. พาราโบลา

เทคโนโลยีการสื่อสารดาวเทียมประกอบด้วยจานรับสัญญาณ ตัวจานรับสัญญาณมีผิวโค้ง เพื่อรับสัญญาณที่ส่งตรงมาจากดาวเทียม และสะท้อนรวมกันที่จุดรับสัญญาณ เพื่อให้มีสัญญาณที่แรงขึ้น น้ำพุที่มนุษย์ประดิษฐ์ขึ้น เป็นเส้นโค้งพาราโบลา หรือเมื่อเราใช้ไฟฉายส่องเดินทาง สังเกตว่ามีกระจกสะท้อนแสงเพื่อรวมลำแสงให้พุ่งเป็นลำตรง โดยหลักการตามกฎการสะท้อนของแสง มุมตกกระทบย่อมเท่ากับมุมสะท้อน จุดที่รวมกันบนผิวระนาบโค้งนี้เรียกว่าจุดโฟกัส ผิวโค้งที่ทำให้มุมตกกระทบและสะท้อนมารวมกันที่จุดโฟกัส เรียกว่า ผิวโค้งพาราโบลา



4. ไฮเพอร์โบลา

เส้นโค้งและผิวโค้งทางคณิตศาสตร์ยังมีอีกมาก และเป็นศาสตร์ที่สามารถนำมาใช้ในการออกแบบผลิตภัณฑ์ต่าง ๆ ได้มากมาย ลองค้นหาจากเอกสารต่าง ๆ ดูว่า เส้นโค้งทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจเหล่านี้มีลักษณะอย่างไร cycloid, cardioid Epicycloid Hypocycloid spiral ฯลฯ



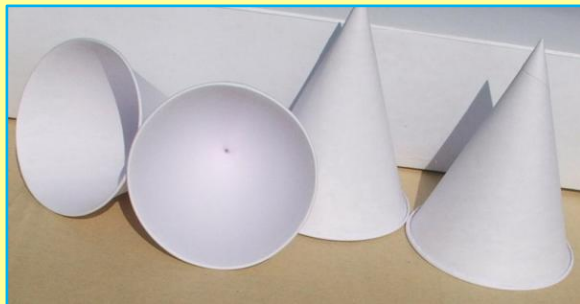
กิจกรรมที่ 1

กำเนิดภาคตัดกรวย

จุดประสงค์ เพื่อให้นักเรียนได้รู้ถึงลักษณะของเส้นโค้งซึ่งเกิดจากการตัดกรวยตรงด้วยระนาบในลักษณะต่างๆ

อุปกรณ์

1. กรวย 5 อัน
2. กรรไกร
3. ไม้เสียบลูกชิ้น
4. กระดาษวาดเขียน



คำชี้แจง ให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

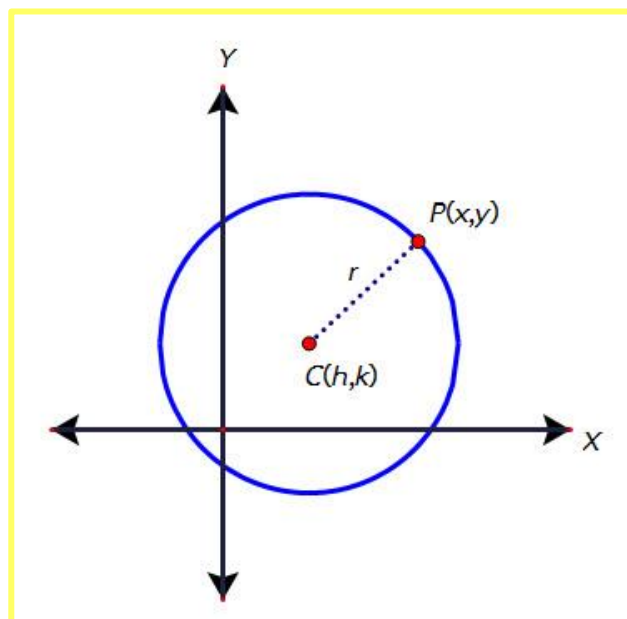
1. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 1 ในแนวขนานกับฐานของกรวย หรือ แนวตั้งฉากกับแกนของกรวย จากนั้นสังเกตรูปที่เกิดขึ้นจากการตัดว่าเป็นรูปอะไร แล้ววาดรูปที่ได้ในกระดาษที่แจกให้
2. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 2 ในแนวที่ไม่ขนานกับกับฐานของกรวย ในลักษณะเอียงๆ จากนั้นจงอธิบายลักษณะของรูปที่เกิดขึ้น แล้ววาดรูปที่ได้ในกระดาษที่แจกให้
3. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 3 ในแนวขนานกับแกนของกรวย จากนั้นจงอธิบายลักษณะของรูปที่เกิดขึ้น แล้ววาดรูปที่ได้ในกระดาษที่แจกให้
4. ให้นักเรียนนำกรวย 2 อันที่เหลือ มาต่อกันโดยใช้ไม้เสียบลูกชิ้นเป็นแกน ในลักษณะที่เหมือนกับนาฬิกาทราย จากนั้นตัดกรวยทั้งสองอันในแนวตั้งฉากกับฐาน และขนานกับแกนของกรวย แล้วจงอธิบายลักษณะของรูปที่เกิดขึ้น และวาดรูปที่ได้ในกระดาษที่แจกให้

ใบความรู้ เรื่องวงกลม

กิจกรรมที่ 2 บทนิยามของวงกลม

บทนิยามของวงกลม

วงกลม (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดจุดหนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม



จุด $C(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม จุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม และระยะทางระหว่างจุด $C(h, k)$ กับจุด $P(x, y)$ เท่ากับ r

รูปแบบมาตรฐานของวงกลม

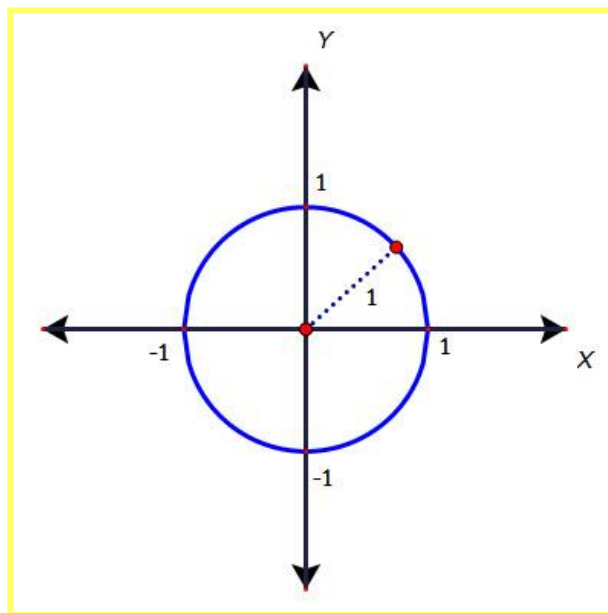
1. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

2. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

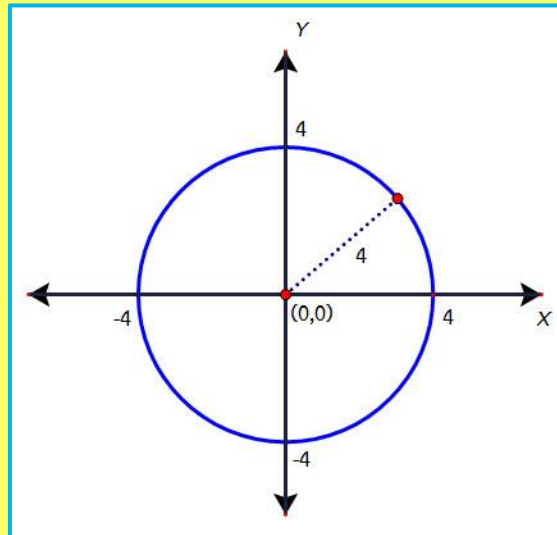
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและมีรัศมี $r=1$ เรียกว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย** และมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ ดังรูป



ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และรัศมีเท่ากับ 4 หน่วยพร้อมทั้งเขียนกราฟวงกลมด้วย

วิธีทำ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และ $r=4$ คือ $x^2 + y^2 = 16$



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของสมการวงกลม $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ พร้อมทั้งบอกจุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลม

วิธีทำ การเขียนกราฟของสมการวงกลมต้องทราบจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมจากรูปแบบมาตรฐานของวงกลม สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

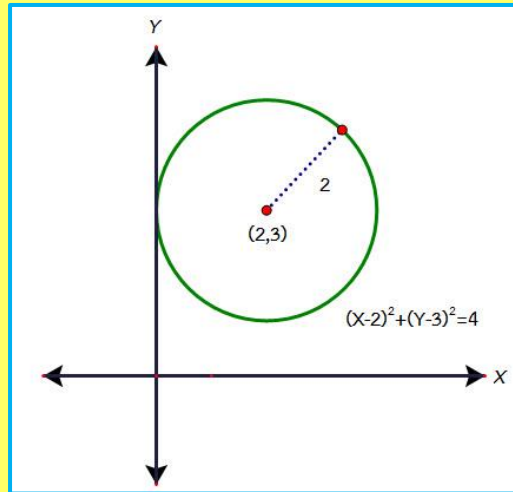
เปรียบเทียบกับสมการ

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

จะได้ $h=2$, $k=3$ และ $r=2$ นั่นคือวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2,3)$

รัศมียาว 2 หน่วย โดยมีรูปดังนี้

สมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2,3)$ รัศมียาว 2 หน่วย



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของสมการวงกลม $x^2 + (y-1)^2 = 16$ พร้อมทั้งบอก

จุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลม

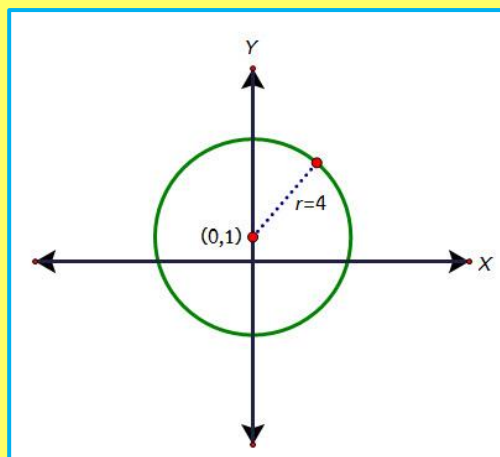
วิธีทำ รูปแบบมาตรฐานของวงกลม สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

เปรียบเทียบกับสมการ $x^2 + (y-1)^2 = 16$

จะได้ $h=0$, $k=1$ และ $r=4$ นั่นคือวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,1)$

รัศมียาว 4 หน่วย โดยมีรูปดังนี้



แบบฝึกทักษะที่ 1



คำชี้แจง : จงหาสมการวงกลมซึ่งกำหนดให้

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมียาว 4 หน่วย	4. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1,-2)$ และรัศมียาว 2 หน่วย
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย	5. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4,0)$ และรัศมียาว $\frac{2}{3}$ หน่วย
3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,3)$ และรัศมียาว 4 หน่วย	6. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,3)$ และรัศมียาว 5 หน่วย



คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟจากสมการต่อไปนี้

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

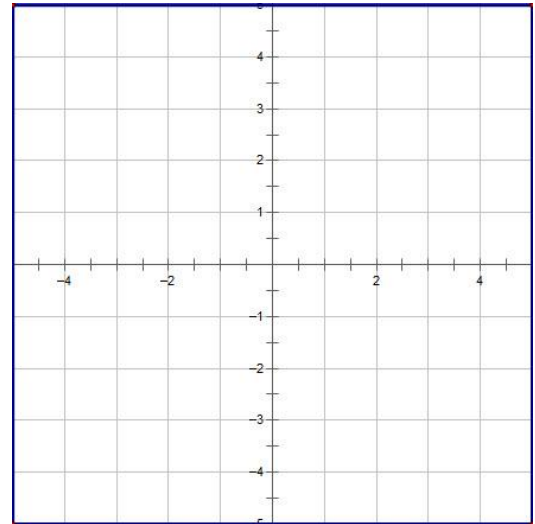
.....

.....

.....

.....

.....



2. $(x-2)^2 + y^2 = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

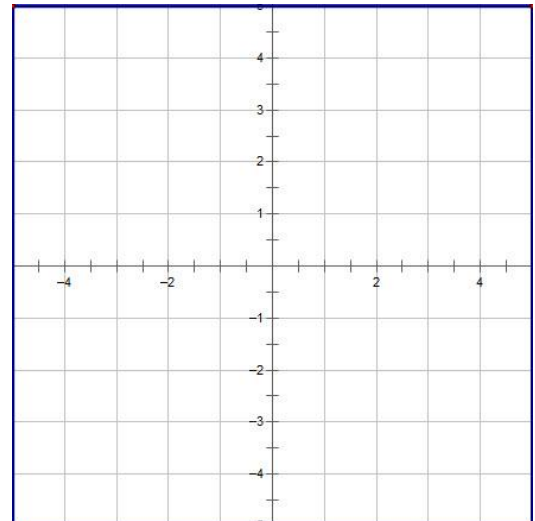
.....

.....

.....

.....

.....



กิจกรรมที่ 3

รูปแบบทั่วไปของวงกลม

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

รูปทั่วไปของความสัมพัทธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\}$$

เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้าสมการของวงกลมอยู่ในรูปแบบทั่วไป เราสามารถเขียนสมการใหม่ให้อยู่ใน

รูปแบบมาตรฐานได้ โดยใช้การทำให้เป็น “กำลังสองสมบูรณ์”

หรือสามารถหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมได้จากสูตร

$$\text{จุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

$$\text{รัศมีของวงกลม } r = \sqrt{h^2 + k^2 - C} \text{ เมื่อ } (h, k) \text{ เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 1)$

ความยาวรัศมี 2 หน่วย

วิธีทำ สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

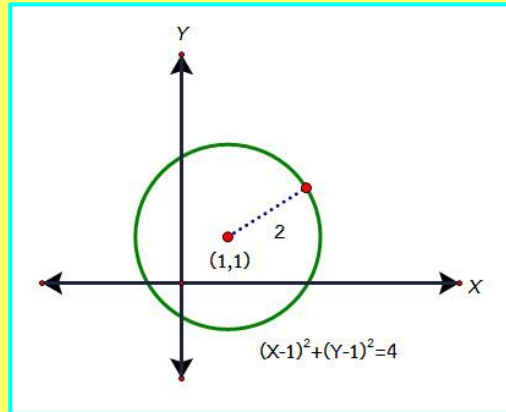
แทนค่า $h=1, k=1$ และ $r=2$ ในสมการจะได้

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

เมื่อกระจายสมการจะได้ $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4$

$$x^2 + y^2 - 2x + 1 - 2y - 2 = 0$$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1,1)$ ความยาวรัศมี 2 หน่วย



ตัวอย่างที่ 5 จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของสมการ

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$$

วิธีทำ จัดรูปสมการใหม่ให้อยู่ใน **รูปแบบมาตรฐาน** ได้ โดยใช้การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$$

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 8y) = -16$$

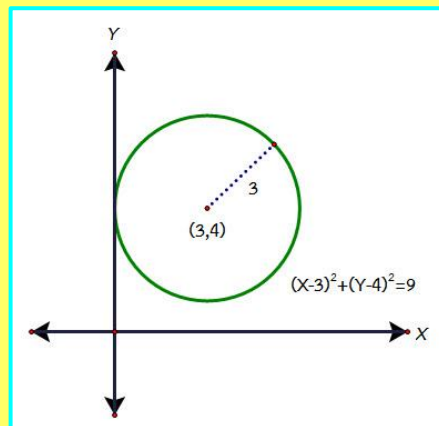
$$(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 - 8y + 4^2) = -16 + 3^2 + 4^2$$

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$

เทียบกับรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 3$, $k = 4$ และ $r = 3$

ดังนั้นกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(3, 4)$ รัศมียาว 3 หน่วย



ตัวอย่างที่ 6 จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของสมการ

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

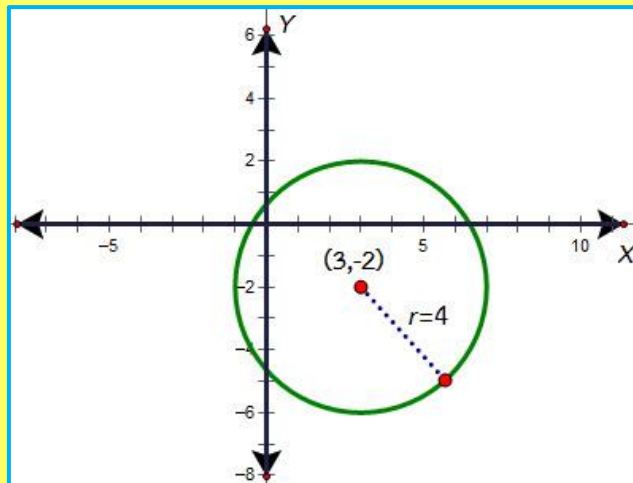
วิธีทำ จากรูปทั่วไปของวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ จะได้

$A = -6$, $B = 4$ และ $C = -3$ แทนค่าในสูตร

$$\begin{aligned} \text{จุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right) \\ &= \left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{4}{2} \right) \\ &= (3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{รัศมีของวงกลม } r &= \sqrt{h^2 + k^2 - C} \\ &= \sqrt{3^2 + (-2)^2 - (-3)} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม $(3, -2)$ และรัศมีของวงกลมยาว 4 หน่วย



แบบฝึกทักษะที่ 2



คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมต่อไปนี้

สมการ	เขียนในรูป $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	จุดศูนย์กลาง (h, k)	รัศมี r
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$			
$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$			
$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$			
$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 42 = 0$			
$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$			

คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลมพร้อมทั้งเขียนกราฟจากสมการ

1. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 12 = 0$

.....

.....

.....

.....

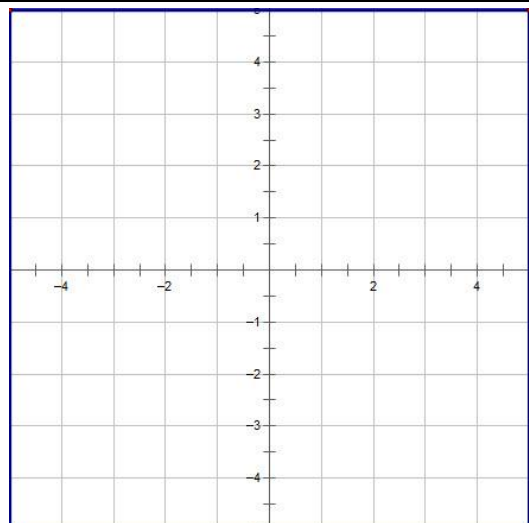
.....

.....

.....

.....

.....



2. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 14y + 15 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

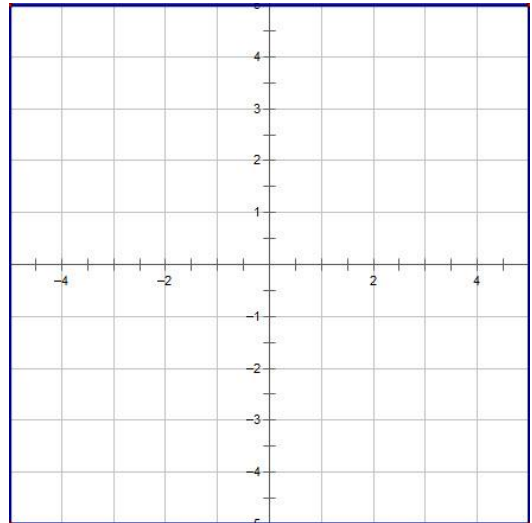
.....

.....

.....

.....

.....



3. $3x^2 + 3y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

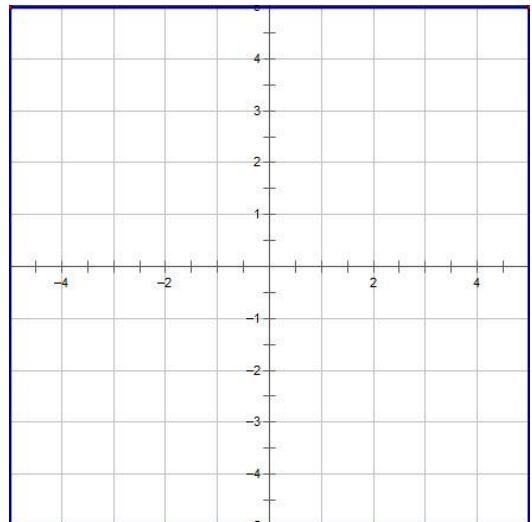
.....

.....

.....

.....

.....



กิจกรรมที่ 4

การหาสมการวงกลม

การหาสมการวงกลม

จากสมการวงกลมในรูปแบบมาตรฐาน

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

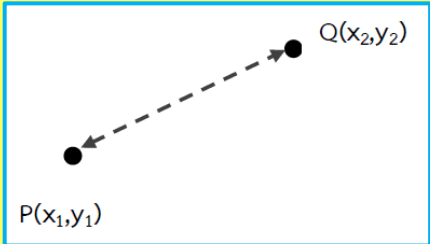
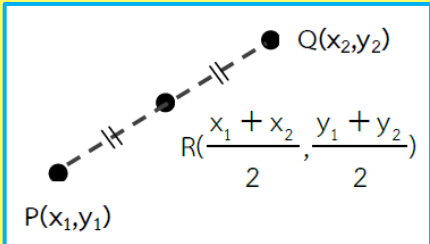
เมื่อ (h, k) คือจุดศูนย์กลาง และ r คือรัศมี

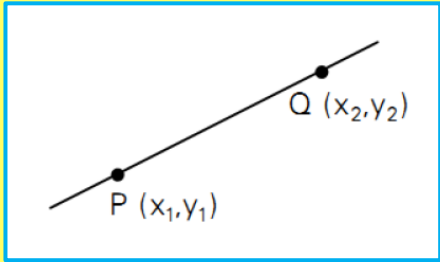
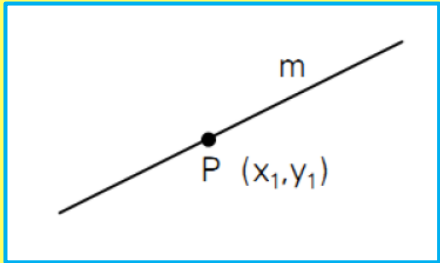
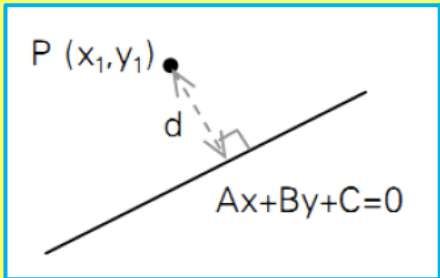
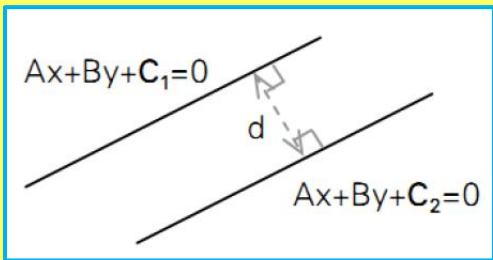
และสามารถเขียนในรูปทั่วไปของกราฟเป็นวงกลม

$$\left\{ (x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \right\}$$

เมื่อ A, B, C เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ความรู้พื้นฐานในการหาสมการวงกลม

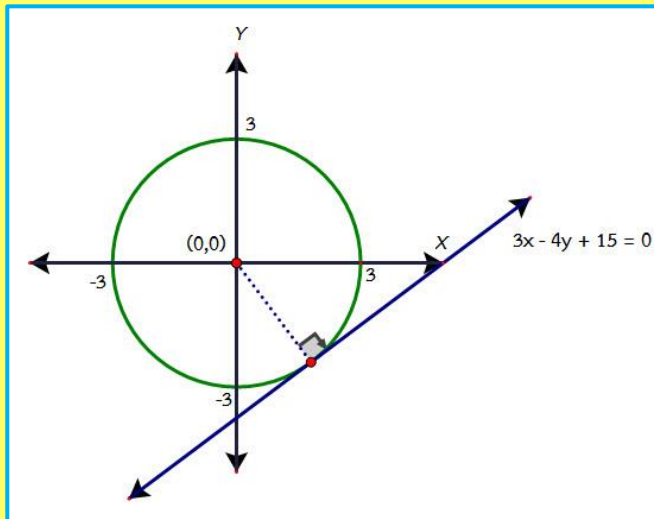
การหาสมการวงกลมต้องใช้ความรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้	
ระยะทางระหว่างจุดสองจุด $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ 	$ PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด 	$\text{จุดกึ่งกลาง} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

การหาสมการวงกลมต้องใช้ความรู้เรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้	
ความชันของเส้นตรง (m) 	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
สมการของเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) 	$(y - y_1) = m(x - x_1)$
ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง 	$d = \frac{ Ax_1 + By_1 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}$
ระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่ขนานทั้งสองเส้น 	$d = \frac{ C_2 - C_1 }{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ และสัมผัสกับเส้นตรง

$$3x - 4y + 15 = 0$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้กราฟวงกลมดังนี้



จากระยะห่างระหว่างจุด (x_1, y_1) กับเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จะได้รัศมีวงกลม

$$r = \frac{|3(0) - 4(0) + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{15}{5}$$

$$\therefore r = 3$$

ดังนั้นสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 = 9$



ตัวอย่างที่ 8 จงหาสมการของวงกลมซึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางที่จุด

$$P_1(4, 2) \text{ และ } P_2(8, 6)$$

วิธีทำ ให้จุด $C(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังนั้นจุด $C(h, k)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของ $\overline{P_1P_2}$

$$h = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$k = \frac{2+6}{2} = 4$$

ดังนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $C(6, 4)$

ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม r คือระยะทางจากจุด $P_1(4, 2)$ ถึงจุด $C(6, 4)$

$$r = \sqrt{(6-4)^2 + (4-2)^2}$$

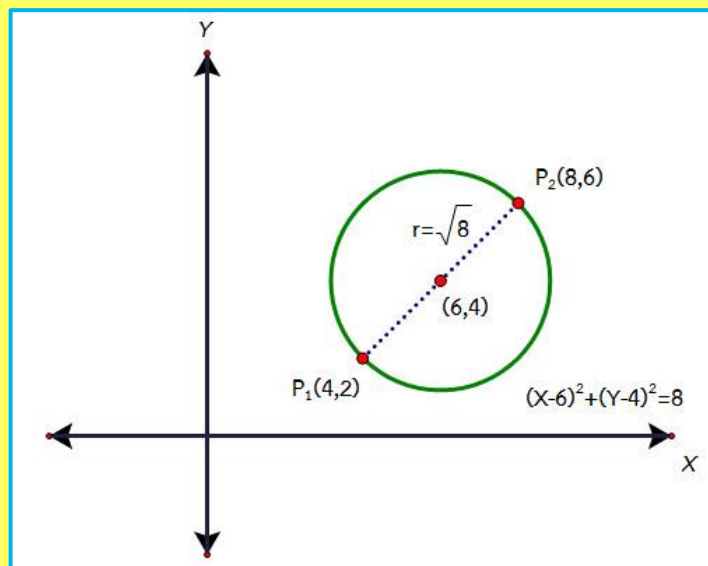
$$r = \sqrt{8}$$

สมการของวงกลมคือ $(x-6)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{8})^2$

หรือ $x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = 8$

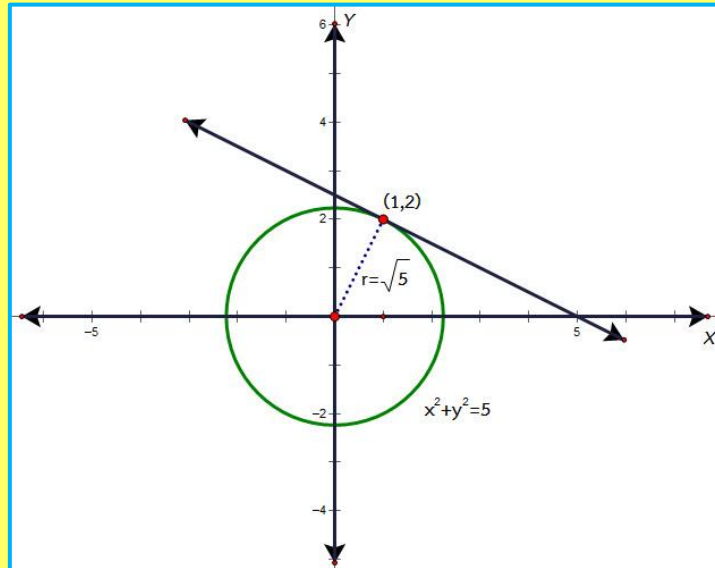
$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 = 0$$

ดังนั้นสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปคือ $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 = 0$



ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการของเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ที่จุด $(1, 2)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้กราฟวงกลมดังนี้



ความชันของรัศมีที่ผ่านจุด $(1, 2)$ คือ $m = \frac{2-0}{1-0} = 2$

เส้นสัมผัสของวงกลมที่ผ่านจุด $(1, 2)$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสคือ $-\frac{1}{2}$

สมการของเส้นสัมผัสของวงกลมที่ผ่านจุด $(1, 2)$ คือ

$$(y - 2) = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$2y = -x + 5$$

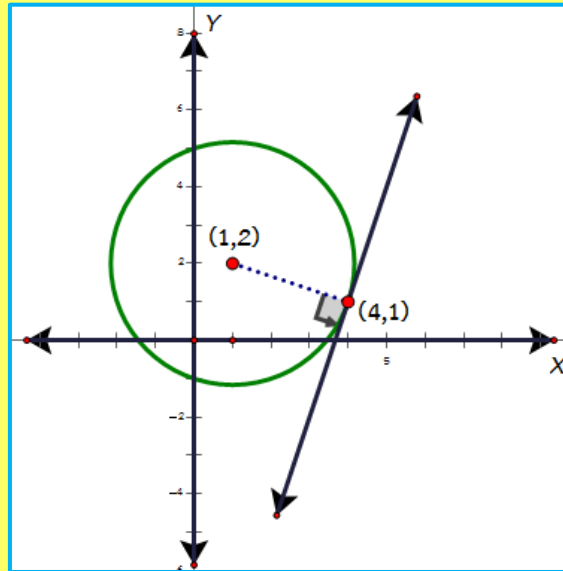
$$x + 2y - 5 = 0$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสของวงกลม $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ที่จุด $(1, 2)$ คือ $x + 2y - 5 = 0$



ตัวอย่างที่ 10 จงหาสมการของเส้นสัมผัสของวงกลม $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ ที่จุด $(4,1)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้กราฟวงกลมดังนี้



$$\begin{aligned} \text{หาความชันของรัศมีวงกลม จากสูตร } m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2 - 1}{1 - 4} \\ \therefore m &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

เนื่องจากรัศมีวงกลมตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม จะได้ว่าความชันเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ 3 จากสูตร สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน m

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

แทนค่า $(x_1, y_1) = (4, 1)$ และ $m = 3$ จะได้

$$y - 1 = 3(x - 4)$$

$$y - 1 = 3x - 12$$

$$3x - y + 11 = 0$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสของวงกลมคือ $3x - y + 11 = 0$



ตัวอย่างที่ 11 จงหาค่า k จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$

ซึ่งมีรัศมียาว 7 หน่วย

วิธีทำ จากสูตรความยาวของรัศมี $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

แทนค่า $r = 7, A = -8, B = 10$ และ $C = k$ จะได้

$$7 = \frac{\sqrt{(-8)^2 + 10^2 - 4k}}{2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$49 = \frac{64 + 100 - 4k}{2}$$

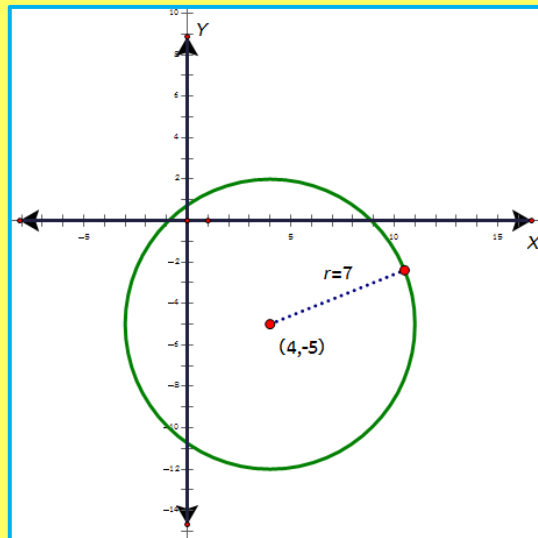
$$196 = 164 - 4k$$

$$4k = 32$$

$$\therefore k = 8$$

ดังนั้น $k = 8$

นำมาวาดกราฟวงกลมได้ดังนี้



แบบฝึกทักษะที่ 3



คำชี้แจง : จงหาสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ $(-1, 3)$ และ $(7, -5)$

.....

.....

.....

.....

.....

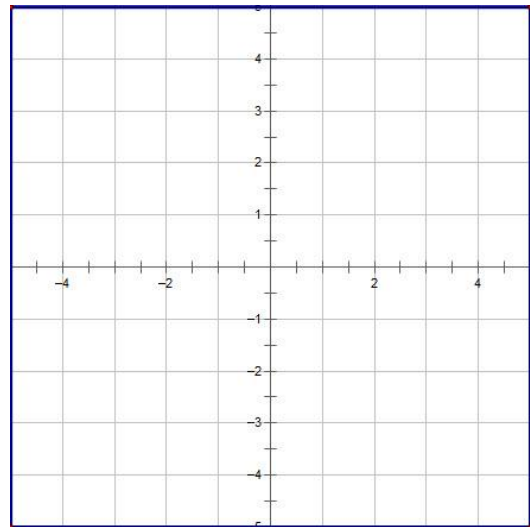
.....

.....

.....

.....

.....



2. จุดศูนย์กลางคือ $(7, -3)$ และสัมผัสกับแกน x

.....

.....

.....

.....

.....

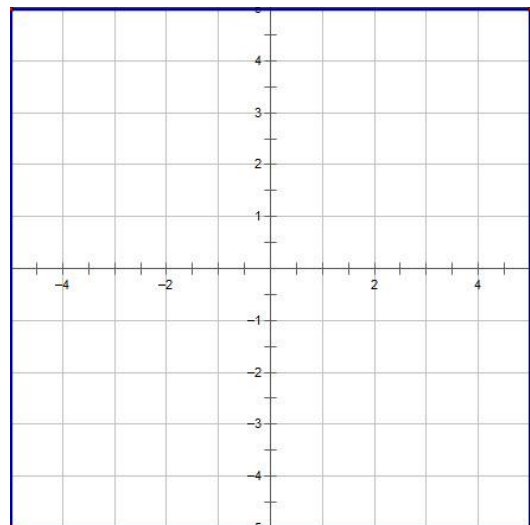
.....

.....

.....

.....

.....



3. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 2)$ และสัมผัสเส้นตรง $3x + 4y + 4 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

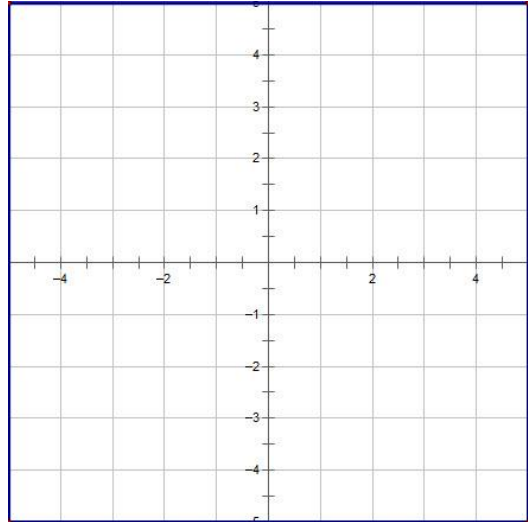
.....

.....

.....

.....

.....



4. จงหาสมการวงกลมจากสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $3x + y = 7$ และสัมผัสเส้นตรง $x - y + 1 = 0$ ที่จุด $(2, 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

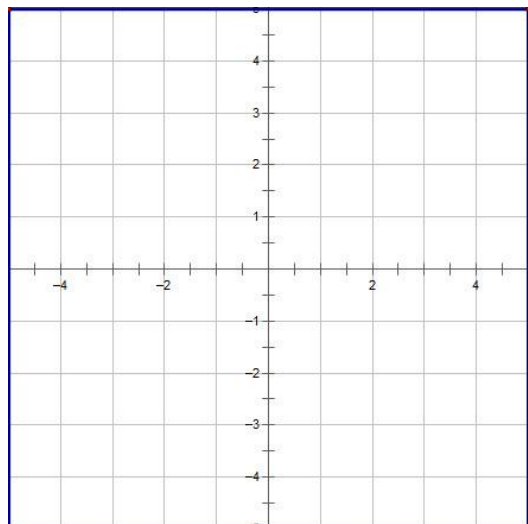
.....

.....

.....

.....

.....



ใบความรู้ วงกลมและการแก้ปัญหาจากสถานการณ์จริง

กิจกรรมที่ 5

ปริศนาอัศจรรย์รูปเซอร์เคิล (Crop circles)



ปรากฏการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้นจริงในหลายๆประเทศทางแถบยุโรป และที่ต่างๆทั่วโลก ปัจจุบันนี้ มีการรายงานการเกิด Crop circles ใน 29 ประเทศ เป็นปรากฏการณ์ที่ถือว่าไม่ธรรมดาจริงๆ ไม่ว่าจะเป็นด้านรูปแบบ วิธีการ ขนาด ระยะเวลาการเกิด และผู้สร้าง ล้วนเป็นความลับ ให้บรรดานักวิทยาศาสตร์ และนักคาดเดาต่างต้องทำงานกันอย่างหนัก แต่ก็ดูเหมือนจะยังไม่ใกล้ความเป็นจริงที่จะเฉลยปริศนานี้ได้

Crop circles (ครอปเซอร์เคิล) เกิดเป็นรูปร่างโดยธัญพืชที่มีแปลงเพาะปลูกขนาดใหญ่ นั้นได้ล้มลงเป็นจำนวนมาก เกิดลวดลายขึ้น ตัดกับส่วนที่ยังตั้งอยู่ จึงเห็นเป็นลวดลายชัดเจน โดยมีรูปทรงเรขาคณิตที่ซับซ้อน สวยงาม เป็นระเบียบ ส่วนใหญ่มีวงกลมเป็นหลัก และประกอบด้วยรูปทรงเรขาคณิตอีกหลากหลาย และมีขนาดใหญ่มาก ไม่สามารถมองดูได้จากพื้นดินธรรมดา แต่เมื่อมองจากมุมสูงจึงจะเห็นเป็นลวดลายชัดเจน เป็นลักษณะของสัญลักษณ์ที่ไม่น่าจะเกิดขึ้นได้จากปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ โดยเฉพาะมันเกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว ภายในระยะเวลาสั้นๆ เท่านั้น การสร้างจึงต้องใช้เทคนิคและเทคโนโลยีขั้นสูงมากๆ จึงจะสามารถทำได้ ดังนั้นจึงมีคำถามว่า คือ ใครเป็นคนทำ ทำได้อย่างไร ใช้อะไรในการทำ และทำเพื่ออะไร

คำชี้แจง ให้นักเรียนจำลองรูปแบบของ Crop Circles ให้สวยงาม โดยใช้เครื่องมือ หรือวิธีการตามความถนัด เช่น ใช้คอมพิวเตอร์กราฟฟิก, การวาดภาพ เป็นต้น พร้อมทั้งอธิบายวิธีการสร้างด้วยสมการของวงกลม

เกณฑ์การให้คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนนเต็ม	หมายเหตุ
1	ความสวยงาม	5	
2	ความคิดสร้างสรรค์	10	
3	การบูรณาความรู้ด้านต่าง ๆ มาใช้	5	
4	การอธิบายวิธีการสร้างด้วยสมการของวงกลม	10	
	รวมคะแนน	30	

แหล่งข้อมูลเพิ่มเติม

<http://www.husonu.com/board/index.php?topic=628.0>

<http://darasart.netfirms.com/story/cropcircle/main.html>

กิจกรรมที่ 6

วงโคจรของดวงดาว

คำชี้แจง ให้นักเรียนเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา แสดงวิธีทำ และหาคำตอบจากสถานการณ์ที่กำหนดให้

เด็กเลี้ยงไก่ 2 คนว่างงานมากจึงพากันมองบนท้องฟ้าเห็นดาว “ลูกไก่ตัวเดียว” โคจรรอบดาว “แม่ไก่” เป็นวงกลมมีสมการเคลื่อนที่คือ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ เสมอตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงไก่ คนแรก อยู่มาวันหนึ่งเด็กเลี้ยงไก่อีกคนก็เห็นมีดาว “ลูกเปิดหลงทาง” เคลื่อนที่ล้อมรอบดาว “พ่อไก่ต่างเล่า” เป็นวงกลมเช่นกันและมีสมการการเคลื่อนที่ของดาวลูกเปิดหลงทาง คือ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ เสมอ ถ้าหากทั้งสองวงโคจรอยู่บนระนาบเดียวกันตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงไก่ ทั้งสองและดาวแม่ไ้กับดาวพ่อไก่ต่างเล่าไม่เคลื่อนที่เลย เด็กเลี้ยงไก่ ทั้งสองกำลังเถียงกันเกี่ยวกับวงโคจรของดาวลูกไก่ตัวเดียว และดาวลูกเปิดหลงทางโดยคนแรกบอกว่า “วงโคจรของดาวตัดกัน แสดงว่า อาจเกิดการชนกันของดาวทั้งสองนี้ได้” คนที่สองบอกว่า “ไม่มีทางที่จะชนกัน เพราะวงโคจรของดาวทั้งสองไม่ตัดกันเลย” ให้นักเรียนวิเคราะห์ว่าคำพูดของใครถูกต้อง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง วงกลม

คำชี้แจง

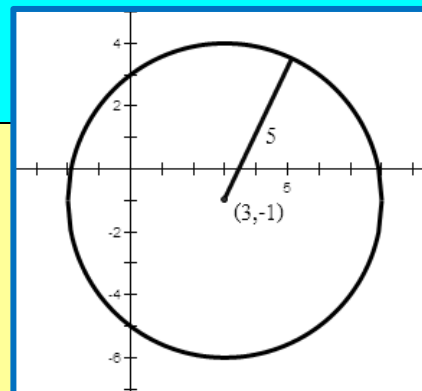
1. แบบทดสอบหลังเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบ มี 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน เวลา 30 นาที
2. จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (X) ทับตัวอักษร ก ข ค หรือ ง ลงในกระดาษคำตอบ
3. เกณฑ์การให้คะแนนคือ ตอบถูกต้อง 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ให้ $x^2 + y^2 - 16x - 16y + 64 = 0$ จัดรูปเป็นสมการวงกลมมาตรฐานตามข้อใด

- ก. $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 64$
- ข. $(x+8)^2 + (y+8)^2 = 64$
- ค. $(x+16)^2 + (y+8)^2 = 64$
- ง. $(x-16)^2 + (y-8)^2 = 64$

2. จากรูป วงกลมต่อไปนี้ตรงกับสมการใด

- ก. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$
- ข. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$
- ค. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$
- ง. $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$



3. สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4, 2)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y + 40 = 0$ คือสมการในข้อใด

ก. $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$

ข. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

ง. $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 4 = 0$

4. กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ เป็นวงกลมหรือไม่ ถ้าเป็นจุดศูนย์กลางและ รัศมีมีค่าเท่าใด

ก. ไม่เป็นวงกลม

ข. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$ รัศมี 5 หน่วย

ค. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, 1)$ รัศมี 3 หน่วย

ง. เป็นวงกลม จุดศูนย์กลาง $(-3, -1)$ รัศมี 15 หน่วย

5. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$

ก. จุดศูนย์กลาง $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ รัศมี $\frac{1}{4}$ หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ รัศมี 3 หน่วย

ง. จุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ รัศมี 3 หน่วย



6. จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 10y + 7 = 0$ เมื่อกำหนดจุดสัมผัสได้ที่จุด $(3, -2)$

ก. $x + y + 1 = 0$

ข. $x - y - 1 = 0$

ค. $x + y - 1 = 0$

ง. $x - y + 1 = 0$

7. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$

ก. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 0$

ข. $4x^2 + 4y^2 + 24x - 40y + 135 = 0$

ค. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 135 = 0$

ง. $4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y - 135 = 0$

8. ให้ A เป็นวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ และ B เป็นวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ข้อใดถูกต้อง

ก. วงกลม A ตัดกับ วงกลม B

ข. วงกลม A สัมผัสกับ วงกลม B

ค. วงกลม A อยู่ภายใน วงกลม B

ง. วงกลม A ไม่ได้และไม่สัมผัสกับ วงกลม B



9. วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะห่างเท่าใด

- ก. 3 หน่วย
- ข. 4 หน่วย
- ค. 5 หน่วย
- ง. 6 หน่วย

10. ข้อใดไม่ถูกต้อง

- ก. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางบนแกน x
- ข. วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 14y + 63 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่จุดตัดของเส้นตรง $x - y = 12$ กับ $x - 2y - 19 = 0$
- ค. วงกลม $x^2 + y^2 - 6x - 10y = 15$ สัมผัสกับเส้นตรง $x = -4$
- ง. เส้นตรง $x + y + 13 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ และ $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

ได้.....คะแนน





เฉลย

เฉลยแบบฝึกทักษะ เรื่องวงกลม

เฉลยกิจกรรมที่ 1 กำเนิดภาคตัดกรวย

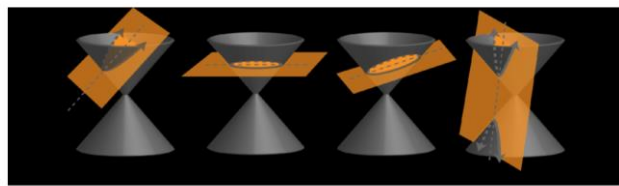


จุดประสงค์ เพื่อให้นักเรียนได้รู้ถึงลักษณะของเส้นโค้งซึ่งเกิดจากการตัดกรวยตรงด้วยระนาบในลักษณะต่างๆ

อุปกรณ์

1. กรวย 5 อัน
2. กรรไกร
3. ไม้เสียบลูกชิ้น
4. กระดาษวาดเขียน

ภาคตัดกรวย (Conic Section)



ชื่อเล่น คำขวัญ **พาราโบลา วงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา**

คำชี้แจง ให้นักเรียนจับกลุ่ม กลุ่มละ 5 คน แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 1 ในแนวขนานกับฐานของกรวย หรือ แนวตั้งฉากกับแกนของกรวย จะได้รูปวงกลม
2. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 2 ในแนวที่ไม่ขนานกับกับฐานของกรวย ในลักษณะเอียงๆ จะได้รูปวงรี
3. ให้นักเรียนตัดกรวยที่ 3 ในแนวขนานกับแกนของกรวย จะได้รูปพาราโบลา
5. ให้นักเรียนนำกรวย 2 อันที่เหลือ มาต่อกันโดยใช้ไม้เสียบลูกชิ้นเป็นแกน ในลักษณะที่เหมือนกับนาฬิกาทราย จะได้รูปไฮเพอร์โบลา

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1



คำชี้แจง : จงหาสมการวงกลมซึ่งกำหนดให้

1. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และรัศมียาว 4 หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (0, 0)$ และ $r = 4$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$ $\therefore x^2 + y^2 = 16$	4. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-1,-2) และรัศมียาว 2 หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (-1, -2)$ และ $r = 2$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = 2^2$ $\therefore (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$
2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (0, 0)$ และ $r = \sqrt{5}$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{5}^2$ $\therefore x^2 + y^2 = 5$	5. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-4,0) และรัศมียาว $\frac{2}{3}$ หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (-4, 0)$ และ $r = \frac{2}{3}$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-(-4))^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\therefore (x+4)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$
3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,3) และรัศมียาว 4 หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (0, 3)$ และ $r = 4$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ $\therefore x^2 + (y-3)^2 = 16$	6. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2,3) และรัศมียาว 5 หน่วย วิธีทำ โจทย์กำหนด $(h, k) = (2, 3)$ และ $r = 5$ จะได้สมการวงกลมคือ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ $\therefore (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟจากสมการต่อไปนี้

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

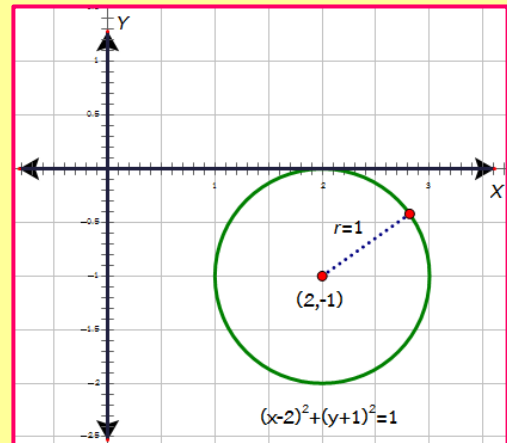
วิธีทำ รูปแบบมาตรฐานของวงกลม สมการของวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

จะได้ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1^2$

จะได้ $h = 2, k = -1$ และ $r = 1$ นั่นคือวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2, -1)$

รัศมียาว 1 หน่วย โดยมีรูปดังนี้



2. $(x-2)^2 + y^2 = 4$

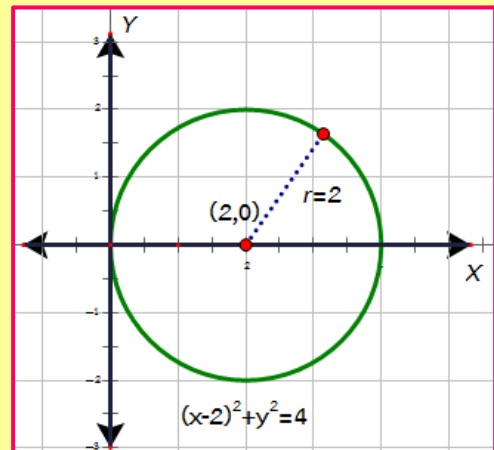
วิธีทำ รูปแบบมาตรฐานของวงกลม สมการของวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ความยาวรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

จะได้ $(x-2)^2 + y^2 = 2^2$

จะได้ $h = 2, k = 0$ และ $r = 2$ นั่นคือวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(2, 0)$

รัศมียาว 2 หน่วย โดยมีรูปดังนี้



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2



คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมต่อไปนี้

สมการ	เขียนในรูป $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	จุดศูนย์กลาง (h,k)	รัศมี r
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$	$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2^2$	$(2,-3)$	2 หน่วย
$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$	$(x-4)^2 + (y+5)^2 = 6^2$	$(4,-5)$	6 หน่วย
$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$	$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$	$(-1, 2)$	0 หน่วย
$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$	$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 5^2$	$(-5, 1)$	5 หน่วย
$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$	$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$	$(1,-1)$	0 หน่วย

คำชี้แจง : จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟจากสมการ

1. $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 12 = 0$

วิธีทำ จัดรูปสมการโดยใช้การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 12 = 0$$

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) = 12$$

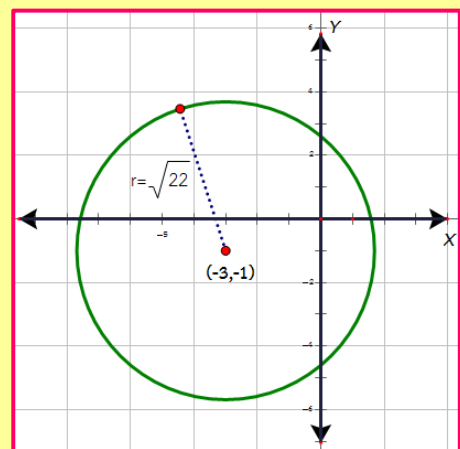
$$(x^2 + 6x + 3^2) + (y^2 + 2y + 1^2) = 12 + 3^2 + 1^2$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{22})^2$$

จะได้ $h = -3$, $k = -1$ และ $r = \sqrt{22}$

ดังนั้นกราฟเป็นวงกลม

มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-3, -1)$ รัศมียาว $\sqrt{22}$ หน่วย



$$2. \quad 2x^2 + 2y^2 - 6x + 14y + 15 = 0$$

วิธีทำ จัดรูปสมการโดยใช้การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

นำ 2 หารตลอดสมการ จะได้

$$x^2 + y^2 - 3x + 7y + \frac{15}{2} = 0$$

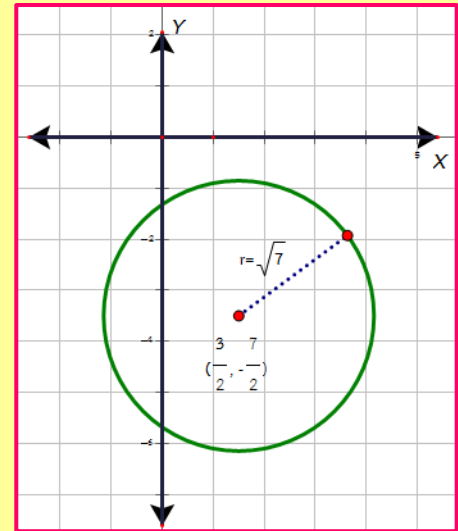
$$(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 7y + \frac{49}{4}) = -\frac{15}{2} + \frac{9}{4} + \frac{49}{4}$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{7}{2})^2 = (\sqrt{7})^2$$

จะได้ $h = \frac{3}{2}$, $k = -\frac{7}{2}$ และ $r = \sqrt{7}$

ดังนั้นกราฟเป็นวงกลม

มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$ รัศมียาว $\sqrt{7}$ หน่วย



$$3. \quad 3x^2 + 3y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$$

วิธีทำ นำ 3 หารตลอดสมการ จะได้

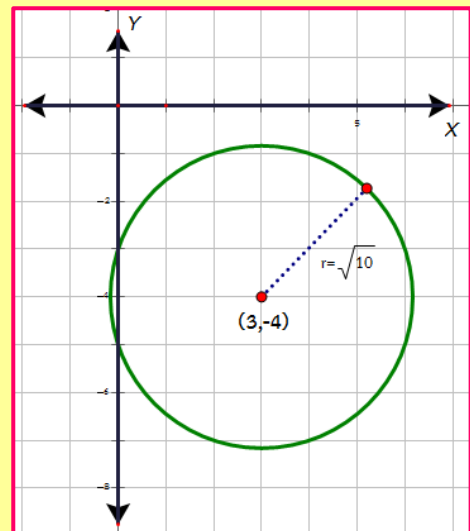
$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$$

จะได้ $A = -6$, $B = 8$ และ $C = 15$ แทนค่าในสูตร

$$\begin{aligned} \text{จุดศูนย์กลางของวงกลม } (h, k) &= \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{8}{2}\right) \\ &= (3, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{รัศมีของวงกลม } r &= \sqrt{h^2 + k^2 - C} \\ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 - 15} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม $(3, -4)$ และรัศมีของวงกลมายาว $\sqrt{10}$ หน่วย



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3



คำชี้แจง : จงหาสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ $(-1, 3)$ และ $(7, -5)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้จุดศูนย์กลาง คือ

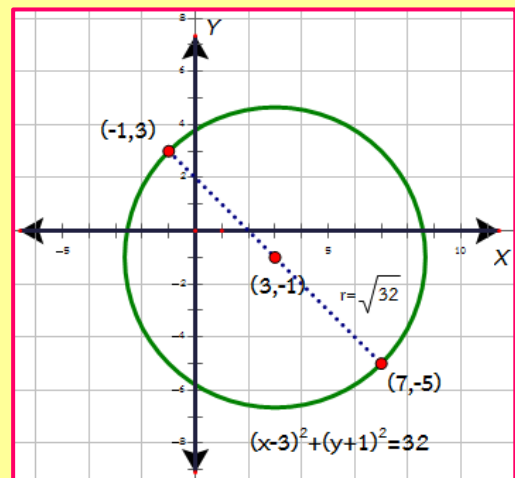
$$(h, k) = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{3+(-5)}{2} \right) = (3, -1)$$

ดังนั้นจะได้สมการ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2$

แทนค่า $(x, y) = (-1, 3)$

$$\text{จะได้ } r^2 = (-1-3)^2 + (3+1)^2 = 32$$

ดังนั้นสมการวงกลมคือ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 32$



2. จุดศูนย์กลางคือ $(7, -3)$ และสัมผัสกับแกน x

วิธีทำ เนื่องจากรัศมีของวงกลม คือ ระยะห่างระหว่างเส้นสัมผัส $y = 0$ กับ

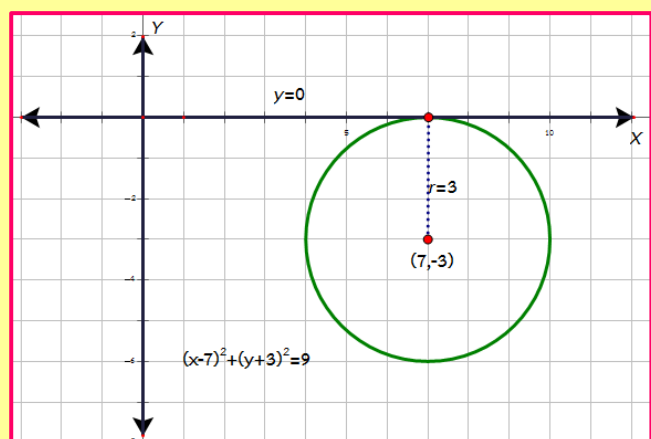
จุดศูนย์กลางของวงกลม

$$\text{ดังนั้น } r = \frac{|0(7) + 1(-3) + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$$

(ใช้สูตร ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง)

จะได้สมการวงกลมที่ต้องการ คือ

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = 9$$



3. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 2)$ และสัมผัสเส้นตรง $3x + 4y + 4 = 0$

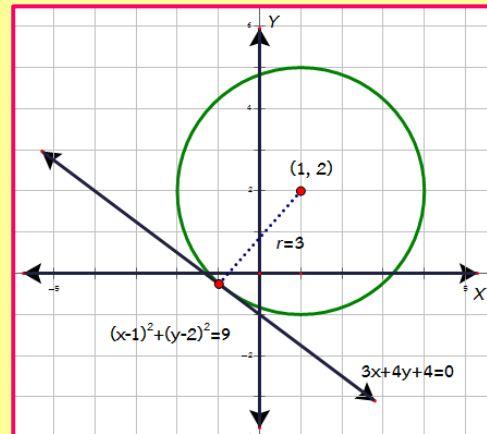
วิธีทำ เนื่องจากรัศมีของวงกลม คือ ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $3x + 4y + 4 = 0$ กับจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$\text{หาความยาวรัศมี } r = \frac{|3(1) + 4(2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

(ใช้สูตร ระยะห่างระหว่างจุดกับเส้นตรง)

จะได้สมการวงกลมที่ต้องการ คือ

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$



4. จงหาสมการวงกลมจากสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $3x + y = 7$ และสัมผัสเส้นตรง $x - y + 1 = 0$ ที่จุด $(2, 3)$

วิธีทำ ให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) ซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $3x + y = 7$

$$\text{จะได้ } 3h + k = 7 \text{ ----- (1)}$$

หาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง (h, k)

และตั้งฉากกับเส้นตรง $x - y + 1 = 0$ ที่จุด $(2, 3)$

$$\text{จากสูตร } y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{จะได้ } k - 3 = -1(h - 2)$$

($m = -1$ เพราะว่า $x - y + 1 = 0$ มีความชัน 1)

$$\text{จะได้ } h + k = 5 \text{ ----- (2)}$$

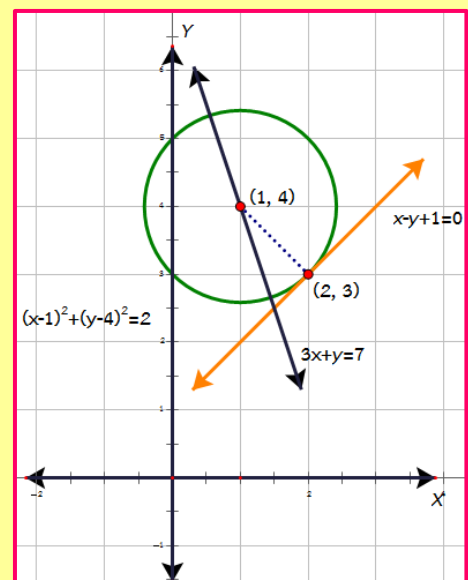
$$(1) - (2) \quad 2h = 2$$

$$h = 1$$

แทนค่า h ในสมการที่ 1 ดังนั้น $k = 4$

$$\text{หาความยาวรัศมี } r = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

จะสมการวงกลม คือ $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2$



เฉลยกิจกรรมที่ 6

วงโคจรของดวงดาว



คำชี้แจง ให้นักเรียนเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา แสดงวิธีทำ และหาคำตอบจากสถานการณ์ที่กำหนดให้

เด็กเลี้ยงไก่ 2 คนว่างงานมากจึงพากันมองบนท้องฟ้าเห็นดาว “ลูกไก่ตัวเดียว” โคจรรอบดาว “แม่ไก่” เป็นวงกลมมีสมการเคลื่อนที่คือ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ เสมอตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงไก่ คนแรก อยู่มาวันหนึ่งเด็กเลี้ยงไก่อีกคนก็เห็นมีดาว “ลูกเปิดหลงทาง” เคลื่อนที่ล้อมรอบดาว “พ่อไก่ต่างเล่า” เป็นวงกลมเช่นกันและมีสมการการเคลื่อนที่ของดาวลูกเปิดหลงทาง คือ $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ เสมอ ถ้าหากทั้งสองวงโคจรอยู่บนระนาบเดียวกันตามการคำนวณของเด็กเลี้ยงไก่ ทั้งสองและดาวแม่ไก่กับดาวพ่อไก่ต่างเล่าไม่เคลื่อนที่เลย เด็กเลี้ยงไก่ ทั้งสองกำลังเถียงกันเกี่ยวกับวงโคจรของดาวลูกไก่ตัวเดียว และดาวลูกเปิดหลงทางโดยคนแรกบอกว่า “วงโคจรของดาวตัดกัน แสดงว่า อาจเกิดการชนกันของดาวทั้งสองนี้ได้” คนที่สองบอกว่า “ไม่มีทางที่จะชนกัน เพราะ วงโคจรของดาวทั้งสองไม่ตัดกันเลย” ให้นักเรียนวิเคราะห์ว่าคำพูดของใครถูกต้อง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

วิธีทำ จากสมการของดาวแม่ไก่

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$$

จะได้ว่า $(h, k) = (2, -3)$ และ $r = 2$

สมการของดาวพ่อไก่ต่างเล่า

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 - 4y + 2^2 - 2^2 + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 = 0$$

แล้วเขียนให้อยู่ในรูปของสมการวงกลม

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

จะได้ว่า $(h, k) = (1, 2)$ และ $r = 2$

นำมาสร้างรูปจากโปรแกรม GSP จะดังนี้



พบว่า ถ้าให้ ดาวพ่อไก่ต่างเล่า แทน A ดาวลูกเปิดหลงทาง แทน a
ดาวแม่ไก่ แทน B ดาวลูกไก่ แทน b

จากรูปพบว่าคนที่สองพูดถูกต้อง คือไม่มีทางที่ดาวทั้งสองจะชนกัน เพราะวงโคจรของดาวลูกเปิดหลงทางเคลื่อนที่ไม่ติดกับดาวลูกไก่ จึงทำให้ดาวทั้งสองไม่สามารถชนกันได้

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน – หลังเรียน

1. ก
2. ค
3. ค
4. ข
5. ก
6. ค
7. ค
8. ง
9. ก
10. ง



บรรณานุกรม

กนกวรรณ อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2. กรุงเทพมหานคร :
เดอะบุ๊กส์ จำกัด, 2554.

กมล เอกไทยเจริญ. Advanced Series คณิตศาสตร์ ม.4-5-6 เล่ม 3 ตรรกศาสตร์และ
เรขาคณิตวิเคราะห์. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิง, 2555.

กวิยา เนาวประทีป. หนังสือชุดเทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย.
กรุงเทพมหานคร : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2556.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่ 2. กรุงเทพมหานคร :
พ.ศ. พัฒนา, 2554.

เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. คู่มือและเทคนิคลัด โจทย์คณิตศาสตร์ ม.4
เล่ม 2 ค01, ค042. กรุงเทพมหานคร : SCIENCE CENTER, 2555.

ณรงค์ ปั่นนิ่มและคณะ. คู่มือ-เตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 เล่ม 2.
กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิต, 2547.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. หนังสือเรียนเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่ 2.
พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2555.

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 2.
กรุงเทพมหานคร : เดอะบุ๊กส์ จำกัด, 2555.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. คู่มือครูสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม
คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพมหานคร : สกสศ.
ลาดพร้าว, 2553.

