

อนุกรมอนันต์ (2)

ชุดความรู้



ชุดการเรียนรู้การสอน

ศิริลักษณ์ ล่องคลอง

++MATHEMATICS++

ชุดการเรียนรู้การสอน ชุดที่ 7 อนุกรมอนันต์ (2)

ผลการเรียนรู้

หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้การสอน ชุดที่ 7 แล้วนักเรียนสามารถหาผลบวก n พจน์แรกและหาผลบวก ของอนุกรมอื่น ๆ ได้

เวลาที่ใช้ 2 ชั่วโมง



คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

คำชี้แจง

1. ชุดการเรียนรู้การสอนต้องการให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ โดยศึกษาชุดการเรียนรู้ นักเรียนต้องปฏิบัติตามกิจกรรมตามลำดับทุกขั้นตอนที่กำหนด
2. ให้นักเรียนศึกษาผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ด้วยความตั้งใจ
3. ให้นักเรียนทุกคนศึกษาใบความรู้ และทำแบบฝึกหัดลงในสมุดของตนเอง ด้วยความตั้งใจ
4. นักเรียนที่มีปัญหาหรือมีข้อสงสัย ไม่เข้าใจ ให้สอบถามกับเพื่อนหรือครูผู้สอน
5. นักเรียนสามารถตรวจคำตอบของแบบฝึกหัดได้จากเฉลยซึ่งอยู่ด้านหลัง
6. นักเรียนทุกคนจะต้องทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ เพื่อประเมินผลการเรียนรู้ลงในกระดาษที่ครูแจกให้
7. ให้รับผิดชอบปฏิบัติตามที่ได้รับมอบหมายให้บรรลุผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ หากมีขั้นตอนใดไม่เข้าใจให้สอบถามครูผู้สอน

การประเมินผลการเรียน

เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมตามที่ได้รับมอบหมายเสร็จแล้วครูผู้สอนจะเป็นผู้ประเมินจากผลการปฏิบัติตามกิจกรรม จากการตรวจผลงาน และตรวจแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้

ใบความรู้ 7.1

ผลบวกของอนุกรมอื่นที่ควรทราบ

อนุกรมอื่นที่ควรทราบ

$$\text{อนุกรม } \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} + \dots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$$\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} + \dots$$

วิธีทำ

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

$$\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$$

⋮

$$\frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{1}{k+n-1} - \frac{1}{k+n}$$

$$\therefore \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$$

$$\text{นั่นคือ } S_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n} \right)$$

$$= \frac{1}{k}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ 1

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ \therefore 2S_n &= \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots$

$$\text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ 1

แบบฝึกหัด 7.1
ผลบวกของอนุกรมอื่นที่ควรทราบ

คำชี้แจง จงแสดงวิธีหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$$1. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$2. \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} + \dots$$

$$3. \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots$$

$$4. \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)} + \dots$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.1

ผลบวกของอนุกรมอื่นที่ควรทราบ

$$1. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

$$2. \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \\ \therefore 4S_n &= \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \frac{4}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{4}{(4n+1)(4n+5)} \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{20} - \frac{1}{16n+20}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{4n+20} \right) = \frac{1}{20}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{20}$

$$3. \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore S_n = 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ 2

$$4. \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)} + \dots$$

$$\text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n = \frac{3}{2 \cdot 5} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{3}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ใบความรู้ 7.2

อนุกรมผลระหว่างอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวกของอนุกรม $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{3}$

\therefore อนุกรมนี้หาผลบวกได้ $\because |r| < 1$

$$\text{ให้ } S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{3} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{2}{3}S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore S = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{9}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกของอนุกรม $1 - \frac{3}{5} + \frac{5}{25} - \frac{7}{125} + \frac{9}{625} - \dots$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} + \frac{1}{625} - \dots$ ซึ่ง $r = -\frac{1}{5}$

$$\text{ให้ } S = 1 - \frac{3}{5} + \frac{5}{25} - \frac{7}{125} + \frac{9}{625} - \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times -\frac{1}{5} \quad \text{ได้} \quad -\frac{1}{5}S = -\frac{1}{5} + \frac{3}{25} - \frac{5}{125} + \frac{7}{625} - \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{6}{5}S = 1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{25} - \frac{2}{125} + \dots$$

$$= 1 - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5} \right)} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{5} \left(\frac{5}{6} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$\therefore S = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของอนุกรม $1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{10}{125} + \frac{15}{625} + \dots$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย อนุกรม $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{5}$

$$\text{ให้ } S = 1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{10}{125} + \frac{15}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{5} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{6}{125} + \frac{10}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{4}{5}S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \frac{5}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$(3) \times \frac{1}{5} \quad \text{ได้} \quad \frac{4}{25}S = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \frac{4}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) - (4) \quad \text{ได้} \quad \frac{16}{25}S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$$

$$\frac{16}{25}S = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$\frac{16}{25}S = \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$\therefore S = \frac{5}{4} \times \frac{25}{16}$$

$$= \frac{125}{64}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{125}{64}$

แบบฝึกหัด 7.2

อนุกรมผลระหว่างอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

คำชี้แจง จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

$$1. \quad 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{16} + \frac{4}{64} + \dots$$

$$2. \quad 1 + \frac{3}{5} + \frac{5}{25} + \frac{7}{125} + \frac{9}{625} + \dots$$

$$3. \quad 1 - \frac{3}{3} + \frac{5}{9} - \frac{7}{27} + \dots$$

$$4. \quad 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{4} + \frac{10}{8} + \dots$$

$$5. \quad 1 - \frac{3}{4} + \frac{6}{16} - \frac{10}{64} + \frac{15}{256} - \dots$$

เฉลยแบบฝึกหัด 7.2

อนุกรมผลสมระหว่างอนุกรมเลขคณิตและอนุกรมเรขาคณิต

$$1. \ 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{16} + \frac{4}{64} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{4}$

\therefore อนุกรมนี้หาผลบวกได้ $\because |r| < 1$

$$\text{ให้} \quad S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{16} + \frac{4}{64} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{4} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{4}S = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{64} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{3}{4}S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\therefore S = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{16}{9}$

$$2. \quad 1 + \frac{3}{5} + \frac{5}{25} + \frac{7}{125} + \frac{9}{625} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 3 + 5 + 7 + 9 \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{5}$

$$\text{ให้} \quad S = 1 + \frac{3}{5} + \frac{5}{25} + \frac{7}{125} + \frac{9}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{5} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{5}{125} + \frac{7}{625} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{4}{5}S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots$$

$$\frac{4}{5}S = 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} \right)$$

$$= 1 + \frac{2}{5} \left(\frac{5}{4} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\therefore S = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{15}{8}$

$$3. \quad 1 - \frac{3}{3} + \frac{5}{9} - \frac{7}{27} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$ ซึ่ง $r = -\frac{1}{3}$

$$\text{ให้} \quad S = 1 - \frac{3}{3} + \frac{5}{9} - \frac{7}{27} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times -\frac{1}{3} \quad \text{ได้} \quad -\frac{1}{3}S = -\frac{1}{3} + \frac{3}{9} - \frac{5}{27} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{4}{3}S = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \dots$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} \right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{3}{8}$

$$4. \quad 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{4} + \frac{10}{8} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 4 + 7 + 10 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{2}$

\therefore อนุกรมนี้หาผลบวกได้ $\because |r| < 1$

$$\text{ให้} \quad S = 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{4} + \frac{10}{8} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{2} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{7}{8} + \frac{10}{16} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{2}S = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{1} \right)$$

$$= 1 + 3$$

$$= 4$$

$$\therefore S = 4 \times \frac{2}{1} = 8$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ 8

$$5. \quad 1 - \frac{3}{4} + \frac{6}{16} - \frac{10}{64} + \frac{15}{256} - \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย อนุกรม $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \dots$ ซึ่ง $r = -\frac{1}{4}$

$$\text{ให้} \quad S = 1 - \frac{3}{4} + \frac{6}{16} - \frac{10}{64} + \frac{15}{256} - \dots \quad \text{.....(1)}$$

$$(1) \times -\frac{1}{4} \quad \text{ได้} \quad -\frac{1}{4}S = -\frac{1}{4} + \frac{3}{16} - \frac{6}{64} + \frac{10}{256} - \dots \quad \text{.....(2)}$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{5}{4}S = 1 - \frac{2}{4} + \frac{3}{16} - \frac{4}{64} + \frac{5}{256} - \dots \quad \text{.....(3)}$$

$$(3) \times -\frac{1}{4} \quad \text{ได้} \quad -\frac{5}{16}S = -\frac{1}{4} + \frac{2}{16} - \frac{3}{64} + \frac{4}{256} - \dots \quad \text{.....(4)}$$

$$(3) - (4) \quad \text{ได้} \quad \frac{25}{16}S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \dots$$

$$\frac{25}{16}S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{25}{16}S = \frac{1}{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore S = \frac{4}{5} \times \frac{16}{25}$$

$$= \frac{64}{125}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{64}{125}$

แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้การสอน
ชุดที่ 7 อนุกรมอนันต์ (2)

คำชี้แจง จงแสดงวิธีหาผลบวกของอนุกรมในข้อต่อไปนี้

$$1. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$2. \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} + \dots$$

$$3. 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \dots$$

$$4. 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \dots$$

$$5. 1 - \frac{3}{7} + \frac{6}{49} - \frac{10}{343} + \frac{15}{2401} - \dots$$

เฉลยแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้การสอน
ชุดที่ 7 อนุกรมอนันต์ (2)

$$1. \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}$

$$2. \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \therefore S_n &= \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{3}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{1}{3}$

$$3. \quad 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

อนุกรมเลขคณิต $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$ ซึ่ง $r = \frac{1}{5}$

\therefore อนุกรมนี้หาผลบวกได้ $\because |r| < 1$

$$\text{ให้} \quad S = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{5} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{5}S = \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{4}{5}S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$\therefore S = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{25}{16}$

$$4. \quad 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย

$$\text{อนุกรมเลขคณิต } 1 + 4 + 7 + 10 + \dots$$

$$\text{และอนุกรมเรขาคณิต } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \quad \text{ซึ่ง } r = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{ อนุกรมนี้หาผลบวกได้ } \because |r| < 1$$

$$\text{ให้} \quad S = 1 + \frac{4}{3} + \frac{7}{9} + \frac{10}{27} + \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times \frac{1}{3} \quad \text{ได้} \quad \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{27} + \frac{10}{81} + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \quad \text{ได้} \quad \frac{2}{3}S = 1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{9} + \frac{3}{27} + \dots$$

$$= 1 + 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots \right)$$

$$= 1 + 3 \left(\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= 1 + 3 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\therefore S = \left(\frac{5}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{15}{4}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{15}{4}$

$$5. \quad 1 - \frac{3}{7} + \frac{6}{49} - \frac{10}{343} + \frac{15}{2401} - \dots$$

วิธีทำ อนุกรมนี้ประกอบด้วย อนุกรม $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots$

และอนุกรมเรขาคณิต $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343} + \frac{1}{2401} - \dots$ ซึ่ง $r = -\frac{1}{7}$

$$\text{ให้} \quad S = 1 - \frac{3}{7} + \frac{6}{49} - \frac{10}{343} + \frac{15}{2401} - \dots \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(1) \times -\frac{1}{7} \text{ ได้} \quad -\frac{1}{7}S = -\frac{1}{7} + \frac{3}{49} - \frac{6}{343} + \frac{10}{2401} - \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \text{ ได้} \quad \frac{6}{7}S = 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{49} - \frac{4}{343} + \frac{5}{2401} - \dots \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$(3) \times -\frac{1}{7} \text{ ได้} \quad -\frac{6}{49}S = -\frac{1}{7} + \frac{2}{49} - \frac{3}{343} + \frac{4}{2401} - \dots \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$(3) - (4) \text{ ได้} \quad \frac{48}{49}S = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{49} - \frac{1}{343} + \frac{1}{2401} - \dots$$

$$\frac{48}{49}S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)}$$

$$\frac{48}{49}S = \frac{1}{\frac{8}{7}}$$

$$\therefore S = \frac{7}{8} \times \frac{49}{48} = \frac{343}{384}$$

ดังนั้น ผลบวกของอนุกรมนี้เท่ากับ $\frac{343}{384}$

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (ม.ป.ป.). แบบฝึกหัดและประเมินผลคณิตศาสตร์ ม. 6 ค 015. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- _____. (2548). แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- _____. (2554). แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 6. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์.
- ชนกกาญจน์ ภัทรากาญจน์. (2553). คณิตสาระ ม. ปลาย : ลำดับ อนุกรม อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชพันธ์ เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม เล่มที่ 6 ช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6). กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี,สถาบัน. (2550). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ตามหลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2553). คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- _____. (2554). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- _____. (2554). คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- อเนก หิรัญ. (2539). คณิตศาสตร์ 015. กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.