

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6
โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI

4

ลิมิตของลำดับอนันต์

สุวิชา บุญรังสีมันต์

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ
โรงเรียนบางปะกง “บวรวิทยายน” จังหวัดฉะเชิงเทรา
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 6

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์ จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค33202 สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โดยใช้ควบคู่กับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่ผสมผสานระหว่างการเรียนแบบร่วมมือและการสอนรายบุคคลเข้าด้วยกันทำให้สนองต่อความแตกต่างระหว่างบุคคล มีการกำหนดให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันมาทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็ก โดยให้นักเรียนแต่ละคนลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเองตามความสามารถจากแบบฝึกทักษะ และส่งเสริมความร่วมมือภายในกลุ่ม นักเรียนที่เรียนเก่งจะพยายามช่วยเหลือเพื่อนที่เรียนอ่อน ทำให้มีการแลกเปลี่ยนประสบการณ์การเรียนรู้ และการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคม

แบบฝึกทักษะนี้จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ให้นักเรียนได้ฝึกฝนทักษะเพิ่มเติม เพื่อให้เกิดความรู้ความเข้าใจในบทเรียน เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และส่งเสริมให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ภายในเล่มประกอบด้วยแบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ ใบความรู้ แบบฝึกหัด(ก) แบบฝึกหัด(ข) แบบฝึกหัดคู่ขนาน แบบทดสอบหลังการใช้ แบบฝึกทักษะ และเฉลยในภาคผนวกท้ายแบบฝึกทักษะ

การจัดทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการโรงเรียนบางปะกง “บวรวิทยายน” และคณะครูโรงเรียนบางปะกง “บวรวิทยายน” ทุกท่าน ผู้จัดทำขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้นำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ไปทดลองใช้พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะ และคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ทั้ง 9 เล่มเสร็จสมบูรณ์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ต่อไป

สุวิชา บุญรังสิมันต์

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	๗
คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ	1
ข้อตกลงในการทำแบบฝึกทักษะ	1
คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะ	1
ผลการเรียนรู้ประจำหน่วยการเรียนรู้ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์	2
สาระสำคัญ	3
จุดประสงค์การเรียนรู้	3
สาระการเรียนรู้	3
ตารางสรุปคะแนนแบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์	4
แบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์	5
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ลิมิตของลำดับอนันต์	11
แบบฝึกหัดที่ 1 (ก)	16
แบบฝึกหัดที่ 1 (ข)	20
แบบฝึกหัดที่ 2 (ก)	24
แบบฝึกหัดที่ 2 (ข)	26
แบบฝึกหัดที่ 3 (ก)	28
แบบฝึกหัดที่ 3 (ข)	33
แบบทดสอบหลังการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์	38
บรรณานุกรม	44
ภาคผนวก	45
เฉลยแบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์	46
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1 (ก)	47
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1 (ข)	48
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2 (ก)	49
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2 (ข)	50
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3 (ก)	51
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3 (ข)	56
เฉลยแบบทดสอบหลังการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์	61

คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ

ข้อตกลงในการใช้แบบฝึกทักษะ

1. การทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์ จะทำแบบฝึกทักษะควบคู่ไปกับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI
2. นักเรียนทำงานเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 คน ภายในกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน
3. นักเรียนภายในกลุ่มต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน
4. นักเรียนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองไม่เปิดดูเฉลยก่อน เพราะถ้านักเรียนเปิดดูเฉลยก่อนเท่ากับว่านักเรียนลอกคำตอบ ซึ่งทำให้นักเรียนไม่ได้ทดสอบความรู้ความเข้าใจและไม่ได้รับความรู้จากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะ

1. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ แล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายแบบฝึกทักษะ
2. นักเรียนในกลุ่มช่วยกันศึกษาเอกสารจากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ควบคู่ไปกับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค TAI โดยมีครูคอยชี้แนะ
3. นักเรียนในกลุ่มจับคู่กันทำแบบฝึกทักษะ ก เมื่อทำเสร็จ สมาชิกในกลุ่มต้องช่วยกันตรวจจากเฉลยในภาคผนวกท้ายแบบฝึกทักษะ และช่วยกันแก้ไขเมื่อมีคำตอบผิด ซึ่งถ้าทำได้ต่ำกว่าร้อยละ 80 ให้ไปทำแบบฝึกทักษะซ่อม (แบบฝึกทักษะ ข)
4. เมื่อทำแบบฝึกทักษะเสร็จ นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบหลังการใช้แบบฝึกทักษะ แล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายแบบฝึกทักษะ
5. นักเรียนแต่ละกลุ่มรวมคะแนนของสมาชิกในกลุ่ม และคำนวณคะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม

ผลการเรียนรู้ประจำหน่วยการเรียนรู้
ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์

1. หาลิมิตของลำดับอนันต์โดยอาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
2. หาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้
3. นำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมไปใช้แก้ปัญหาได้

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
เรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์
เล่มที่ 4 ลิมิตของลำดับอนันต์

สาระสำคัญ

สำหรับลำดับอนันต์ a_n ใดๆ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น แล้วเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ซึ่งการพิจารณาว่าลำดับอนันต์ใดมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับเมื่อ n มากขึ้น โดยไม่มีที่สิ้นสุด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถเขียนกราฟของลำดับที่กำหนดได้
2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าลำดับอนันต์ที่กำหนดพจน์ที่ n ให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก โดยพิจารณาจากกราฟของลำดับ

สาระการเรียนรู้

1. ลิมิตของลำดับอนันต์
2. ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

แบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4
ลิมิตของลำดับอนันต์

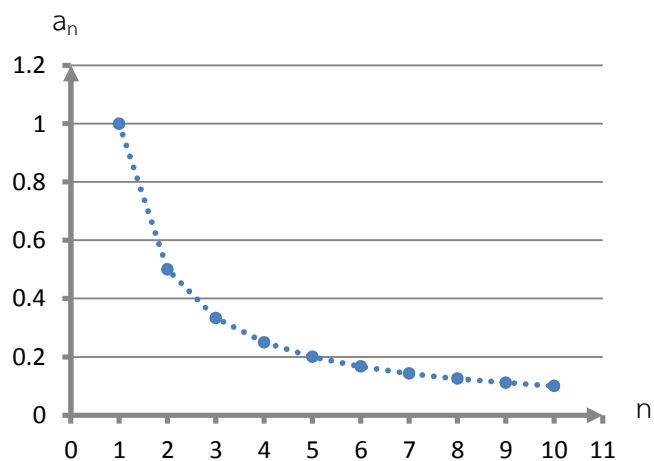
- คำชี้แจง
1. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก มีทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน รวม 10 คะแนน
 2. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วเขียน ○ ล้อมรอบตัวอักษรที่เป็นคำตอบ ใช้เวลา 10 นาที



คะแนนที่ได้

.....

1. กำหนดให้



กราฟที่กำหนดให้ตรงกับลำดับในข้อใด เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

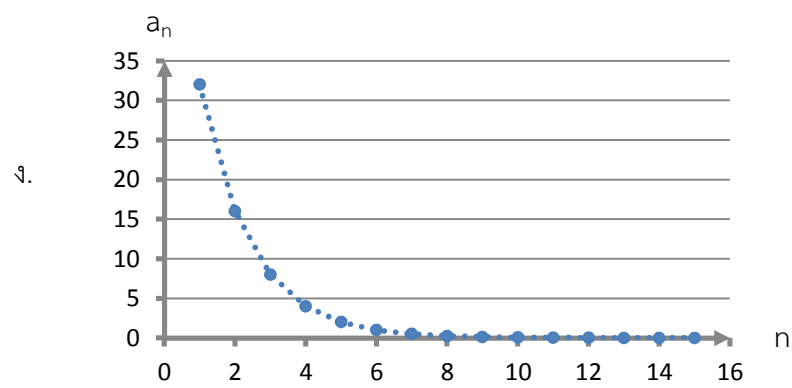
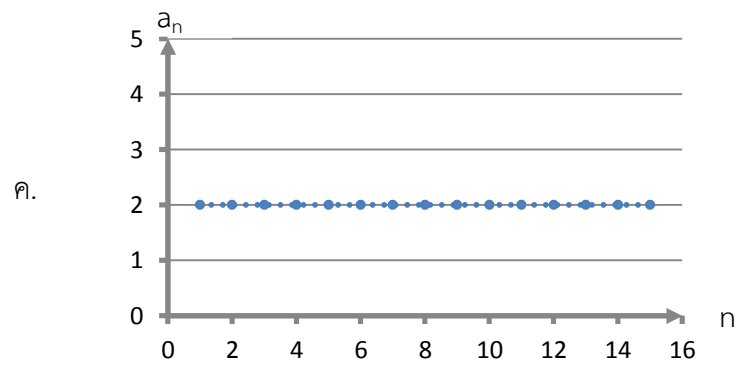
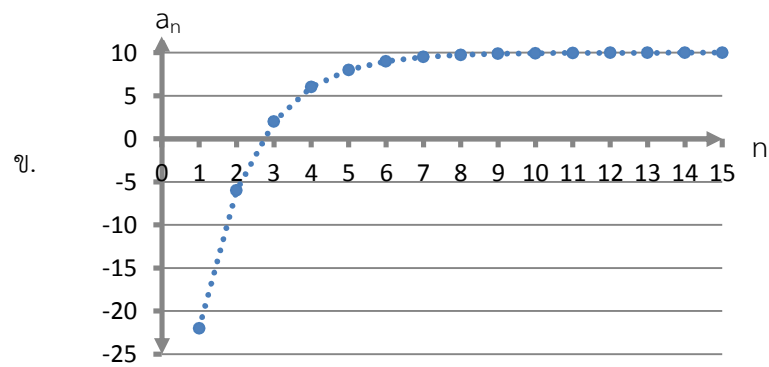
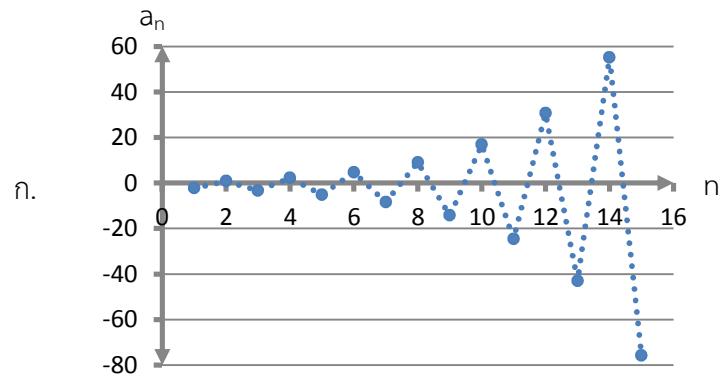
ก. $a_n = -\frac{1}{n}$

ข. $a_n = \frac{1}{n}$

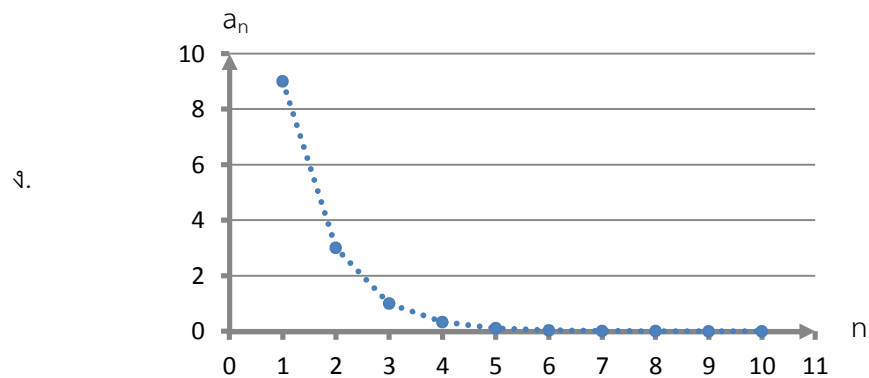
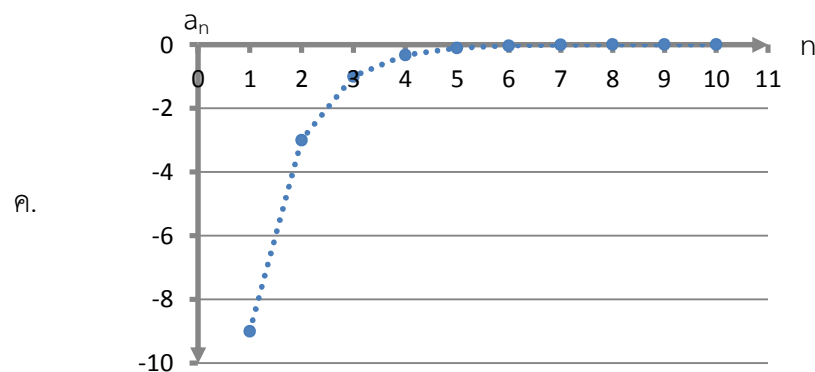
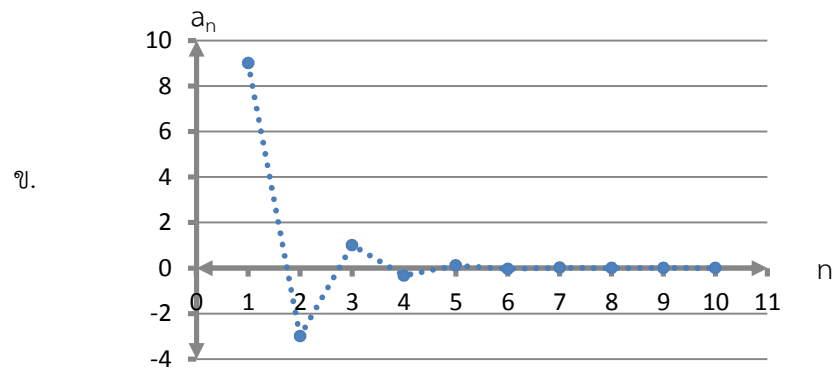
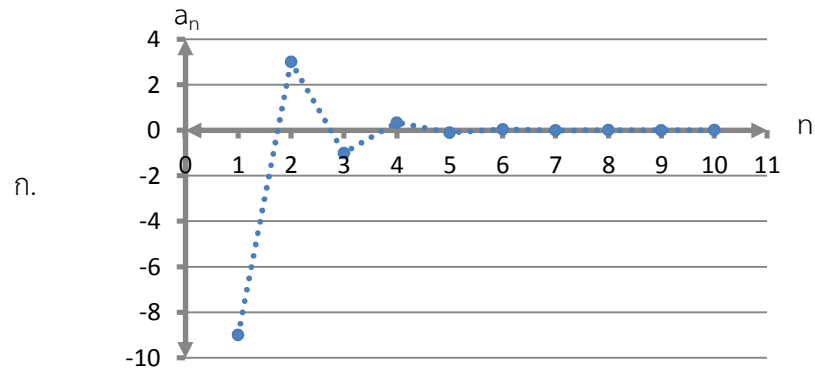
ค. $a_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

ง. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

2. พิจารณากราฟของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก

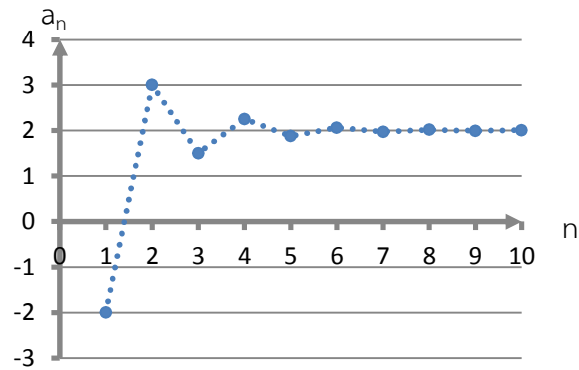


3. พิจารณาลำดับ $a_n = 27\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ตรงกับกราฟในข้อใด

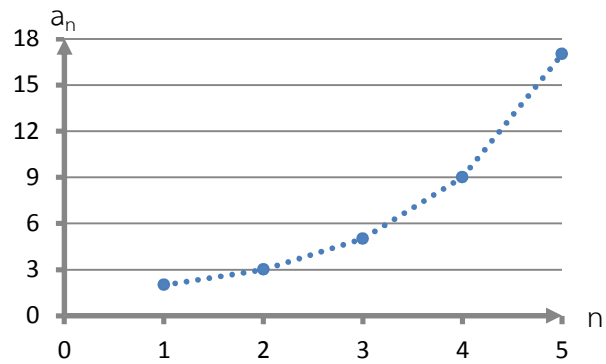


4. ลำดับอนันต์ในข้อใดมีลิมิตเท่ากับ 2

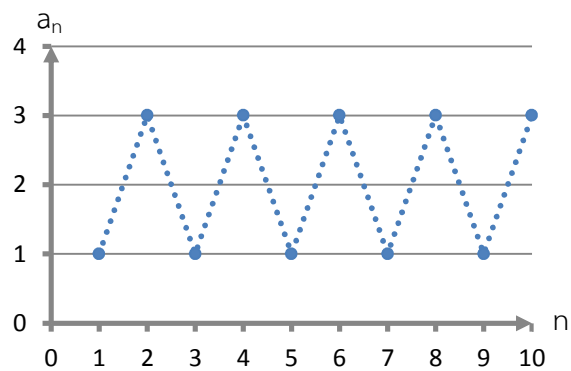
ก.



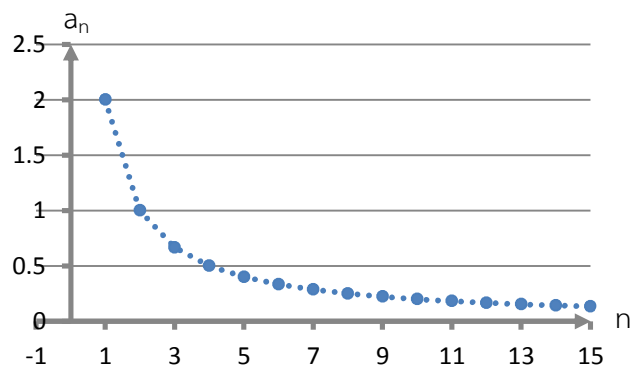
ข.



ค.



ง.



5. ลำดับอนันต์ในข้อใดเป็นลำดับลู่อเข้า เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

ก. $a_n = \frac{n}{4}$

ข. $a_n = \frac{n+1}{n^3}$

ค. $a_n = 5 - 2n + n^2$

ง. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ $a_1 = 1$ และ $a_2 = 2$

6. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับแกว่งกวัด เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

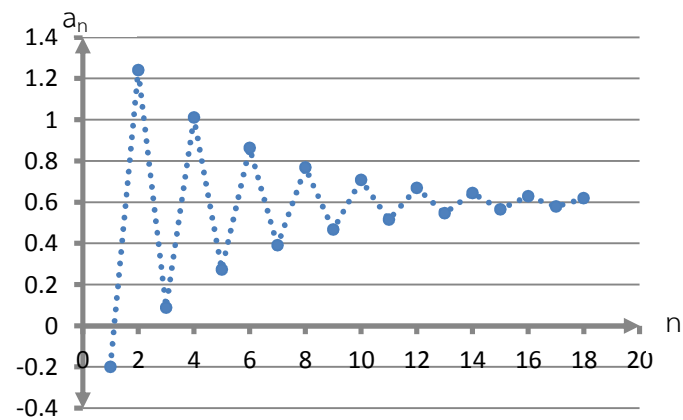
ก. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

ข. $a_n = (-1)^{n+1}$

ค. $a_n = -(3)^n$

ง. $a_n = (-2)^{n-1}$

7. ลิมิตของลำดับอนันต์ที่กำหนดให้เท่ากับเท่าไร เมื่อพิจารณาจากกราฟต่อไปนี้



ก. -0.2

ข. 0

ค. 0.6

ง. หาค่าไม่ได้

8. ลิมิตลำดับใดต่อไปนี้ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

ก. $a_n = \frac{2}{n^3}$

ข. $a_n = (-1)^{2n}$

ค. $a_n = \frac{1}{n+2}$

ง. $a_n = 5 - 4n$

9. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. ลำดับแกว่งกวัดบางลำดับเป็นลำดับลู่เข้า

ข. ลำดับลู่เข้าบางลำดับสามารถมีค่าลิมิตได้หลายค่า

ค. ลำดับลู่ออกทุกลำดับ เป็นลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต

ง. ลำดับจำกัดทุกลำดับเป็นลำดับลู่เข้า

10. ข้อใดถูกต้อง

ก. ถ้า $a_n = -4$ แล้ว a_n หาค่าลิมิตไม่ได้

ข. ถ้า $a_n = n + 2$ แล้ว ลิมิตของ a_n คือ 2

ค. ถ้า $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ แล้ว a_n เป็นลำดับลู่เข้า

ง. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -4$ แล้ว a_n เป็นลำดับลู่ออก

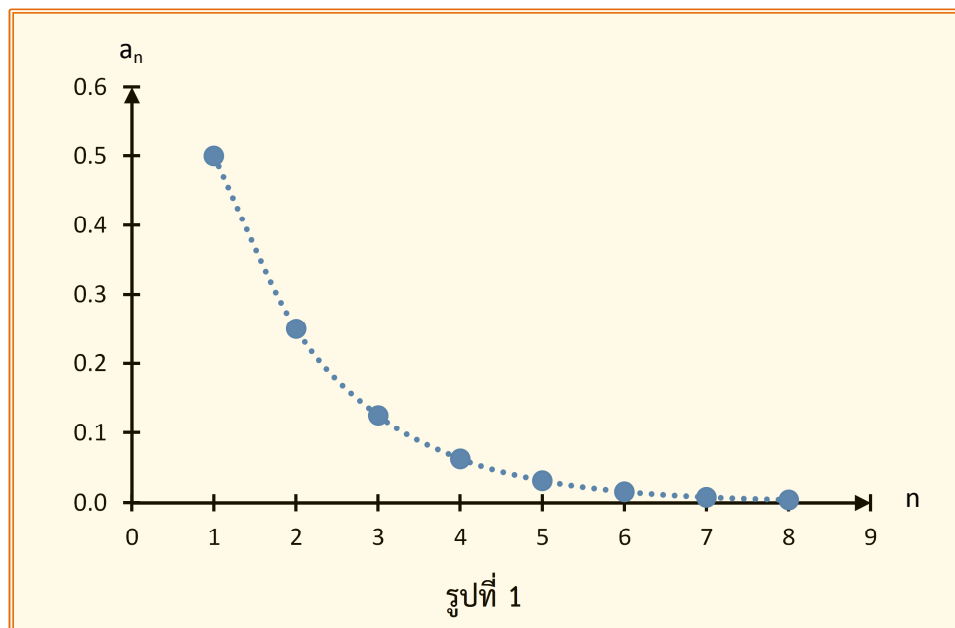
ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง ลิมิตของลำดับอนันต์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของลำดับ โดยจะพิจารณาพจน์ที่ n ของลำดับ เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

(1) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	...

เขียนลำดับได้เป็น $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \dots$



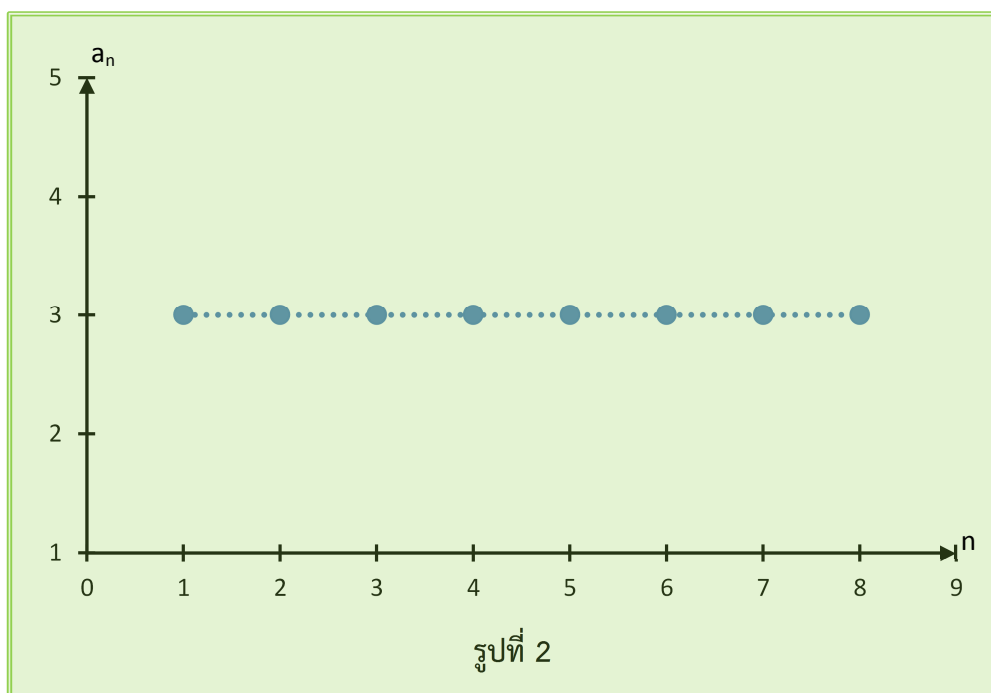
จากรูปที่ 1 จะเห็นว่า ถ้า n มีค่ามากขึ้นไม่มีที่สิ้นสุด แล้ว a_n มีค่าลดลงเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0

หมายเหตุ กราฟของลำดับ จะใช้เส้นประเพื่อแสดงให้เห็นแนวของจุดเท่านั้น แต่เส้นประไม่ใช่ส่วนหนึ่งของกราฟ

(2) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 3$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	3	3	3	3	3	3	3	3	...

เขียนลำดับได้เป็น 3, 3, 3, 3, ...



จากรูปที่ 2 จะเห็นว่า a_n เป็น 3 เสมอสำหรับทุกค่าของ n

เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด และพจน์ที่ n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น แล้วเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนั้นมีลิมิตเท่ากับ L และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

(อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L)

ดังนั้นในข้อ (1) ลำดับ $a_n = \frac{1}{2^n}$ มีลิมิตเท่ากับ 0 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

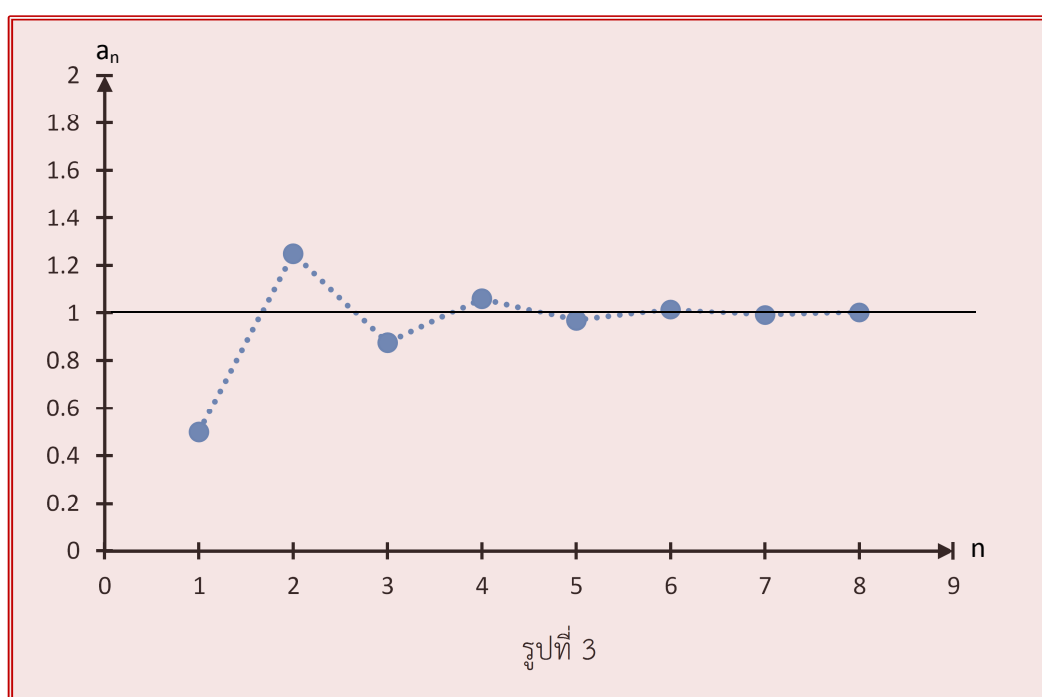
และในข้อ (2) ลำดับ $a_n = 3$ มีลิมิตเท่ากับ 3 เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$

เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)**

(3) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{65}{64}$	$\frac{127}{128}$	$\frac{257}{256}$	...

เขียนลำดับได้เป็น $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \frac{31}{32}, \frac{65}{64}, \frac{127}{128}, \frac{257}{256}, \dots$

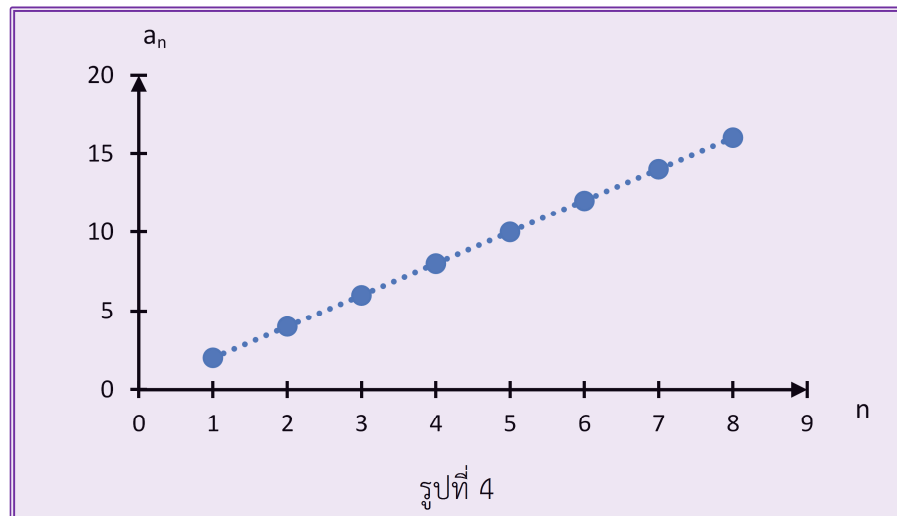


จากรูปที่ 3 จะเห็นว่า แนวของจุดในกราฟจะเข้าใกล้เส้นทึบที่ปรากฏ ซึ่งหมายความว่า เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n จะเข้าใกล้ 1 แต่จะไม่เท่ากับ 1

ดังนั้น ลำดับ $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ เป็นลำดับลู่เข้า และมีลิมิตเท่ากับ 1

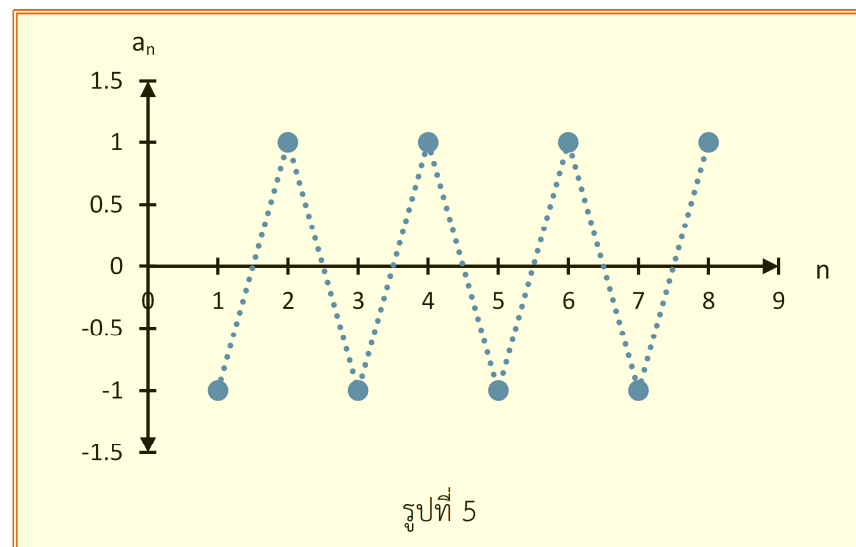
เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1$

(4) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = 2n$ (ลำดับคือ 2, 4, 6, 8, 10, ...)



จากรูปที่ 4 จะเห็นว่า เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะมากขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $a_n = 2n$ ไม่มีลิมิต ลำดับนี้จึงไม่ใช่ลำดับลู่เข้า เรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

(5) พิจารณากราฟของลำดับ $a_n = (-1)^n$ (ลำดับคือ -1, 1, -1, 1, -1, ...)



จากรูปที่ 5 จะเห็นว่า เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ พจน์ที่ n เป็น -1 และ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ พจน์ที่ n เป็น 1 เมื่อ n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับนี้จะไม่เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง ลำดับ $a_n = (-1)^n$ จึงไม่มีลิมิต ดังนั้นลำดับนี้จึงเป็นลำดับลู่ออก

และเรียกลำดับที่มีลักษณะของกราฟขึ้นและลงสลับกันโดยไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่งเช่นนี้ว่า **ลำดับแกว่งกวัด (oscillating sequence)**

จากที่กล่าวมาข้างต้น จึงอาจกล่าวถึงลำดับได้ดังนี้

1. ลำดับที่จะนำมาพิจารณาลิมิตนั้นต้องเป็นลำดับอนันต์
2. ถ้ากล่าวว่า L เป็นลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น a_n หมายถึง เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด พจน์ที่ n ของลำดับจะเข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$
3. ลำดับอนันต์ที่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่เข้า ส่วนลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต เรียกว่า ลำดับลู่ออก
4. การพิจารณาว่าลำดับใดจะมีลิมิตหรือไม่นั้น อาจทำได้โดยการพิจารณาจากกราฟของลำดับ เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด



คะแนนที่ได้

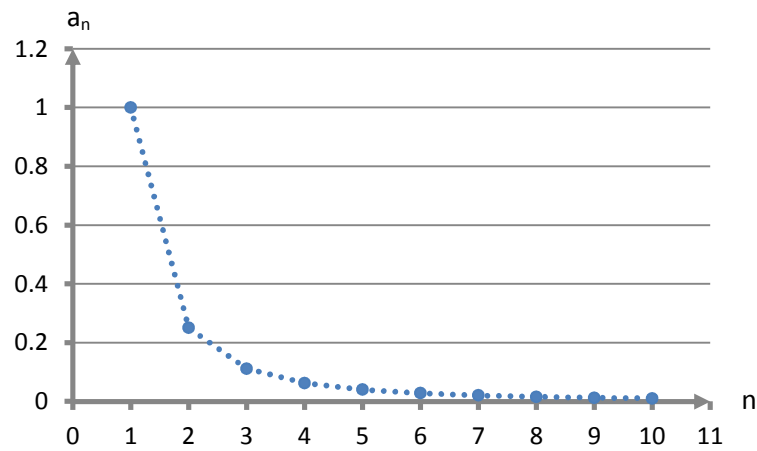
.....

ผ่านเกณฑ์
8 ข้อ

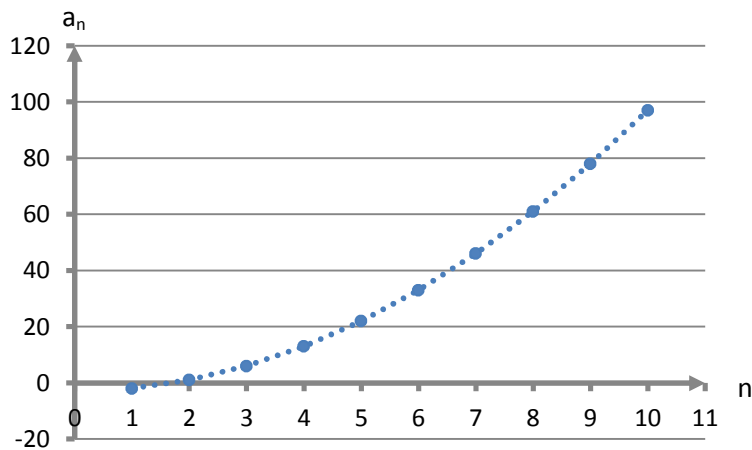
แบบฝึกหัดที่ 1 (ก)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่ “ลู่เข้า” ลงใน หน้าหมายเลขข้อในแต่ละข้อ
เมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับลู่เข้า และใส่ “ลู่ออก” เมื่อเป็นลำดับลู่ออก

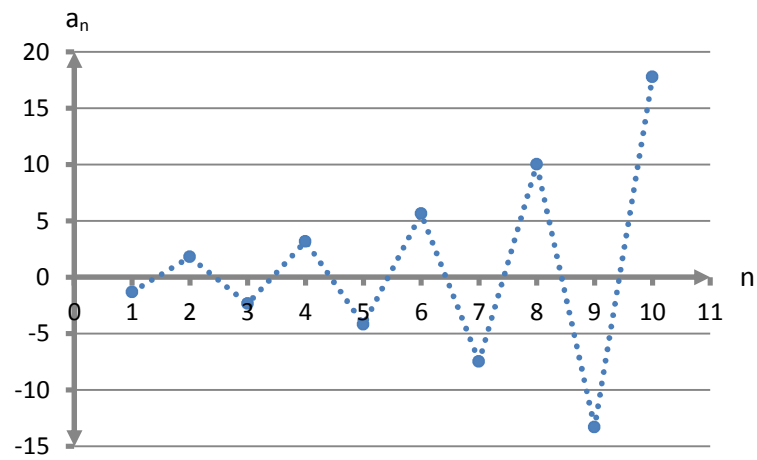
..... (1)



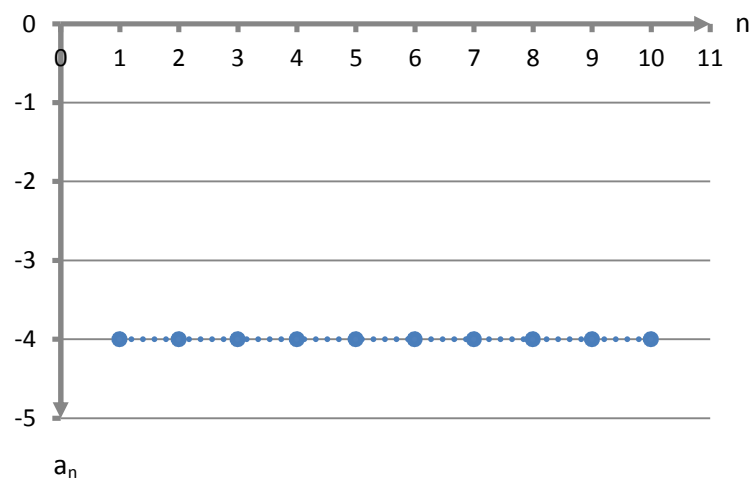
..... (2)



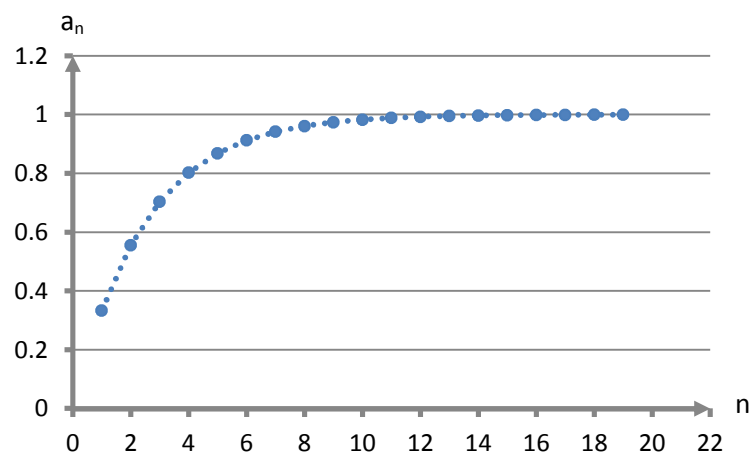
..... (3)



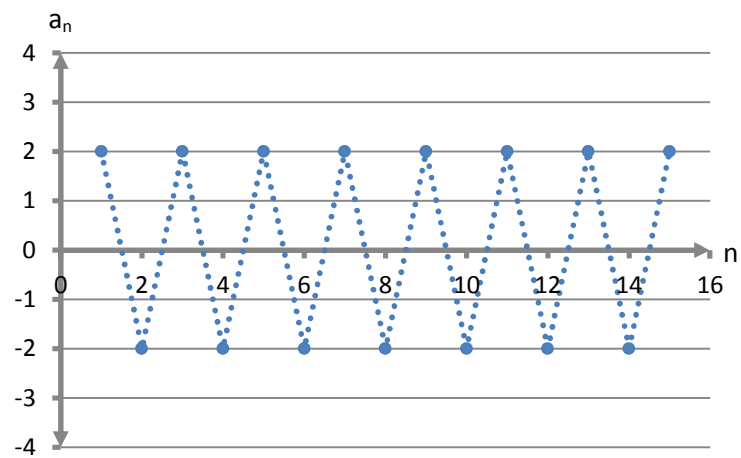
..... (4)



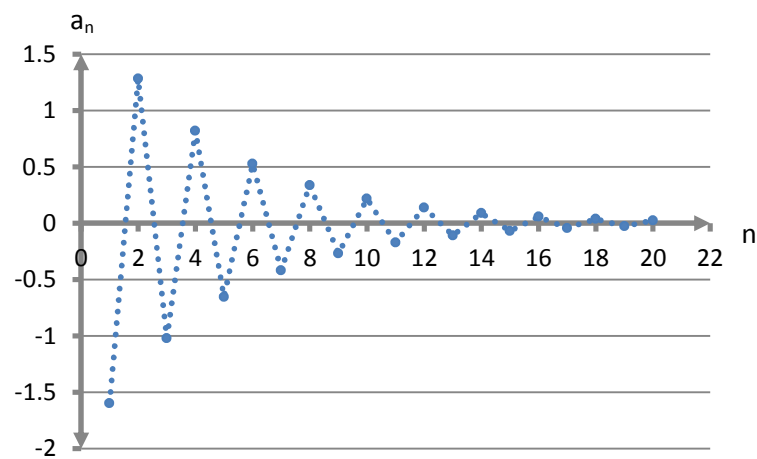
..... (5)



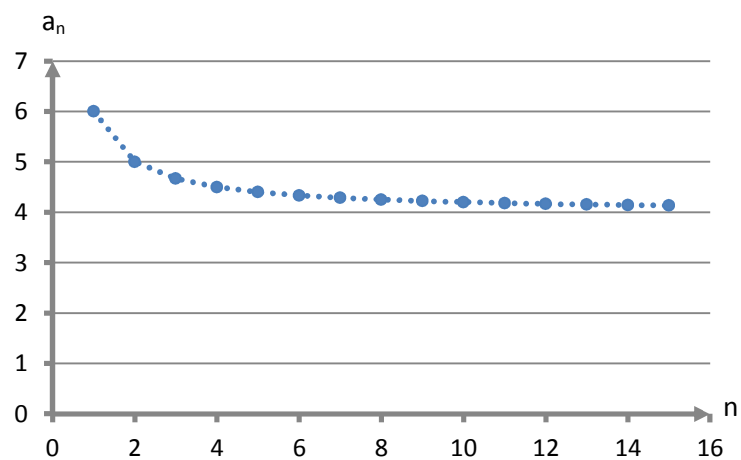
..... (6)



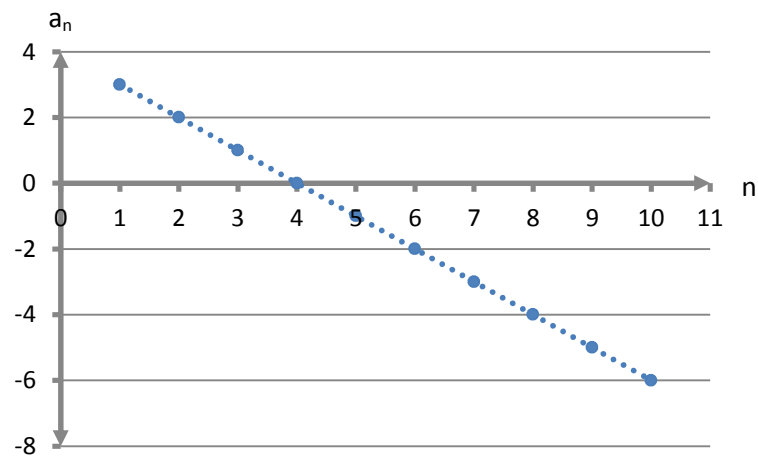
..... (7)



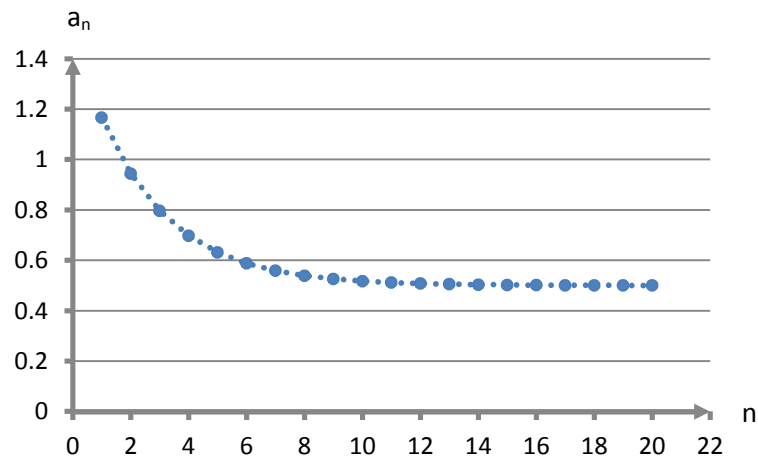
..... (8)



..... (9)



..... (10)





คะแนนที่ได้

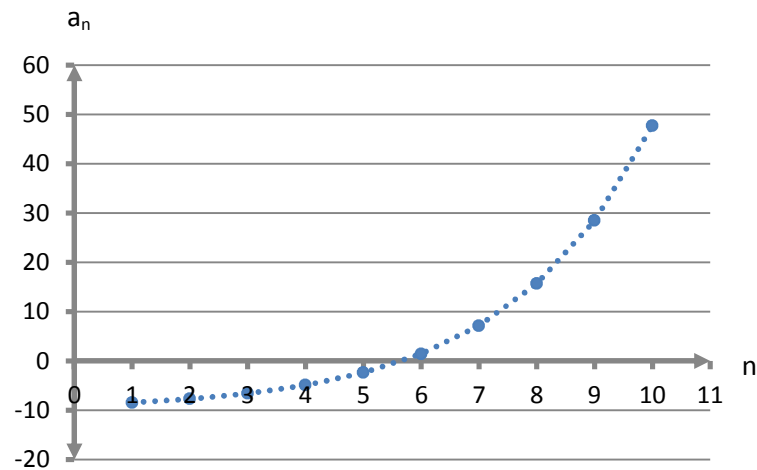
.....

 ผ่านเกณฑ์
8 ข้อ

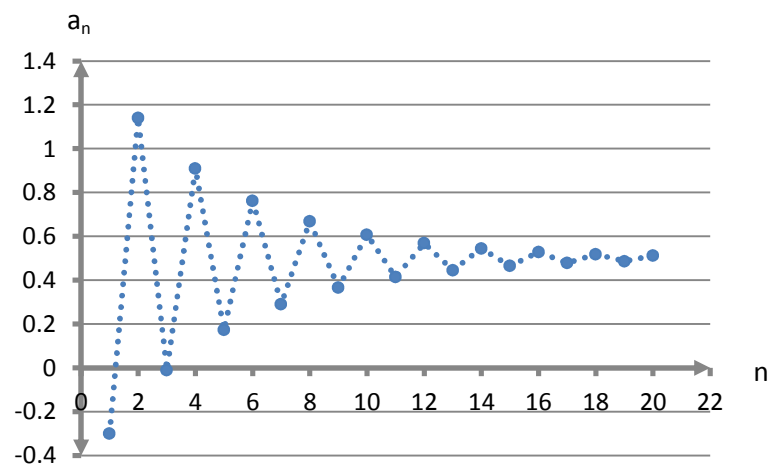
แบบฝึกหัดที่ 1 (ข)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่ “ลู่เข้า” ลงใน หน้าหมายเลขข้อในแต่ละข้อ
เมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับลู่เข้า และใส่ “ลู่ออก” เมื่อเป็นลำดับลู่ออก

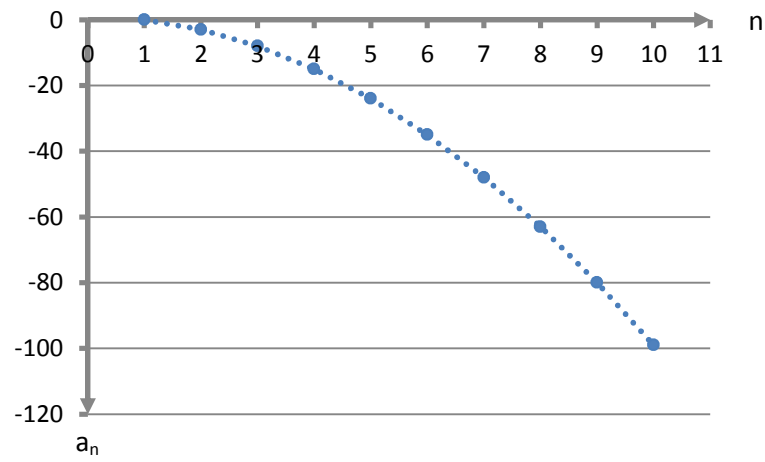
..... (1)



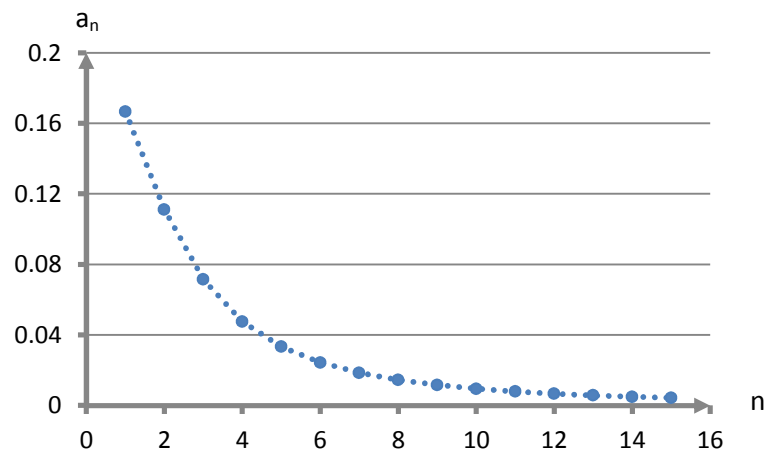
..... (2)



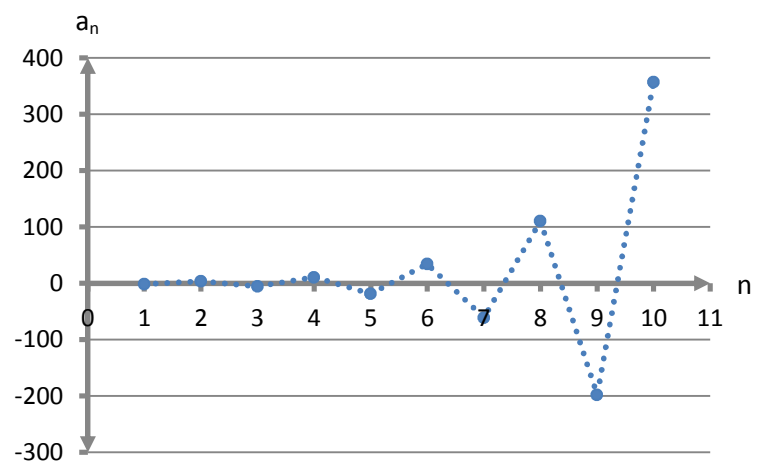
..... (3)



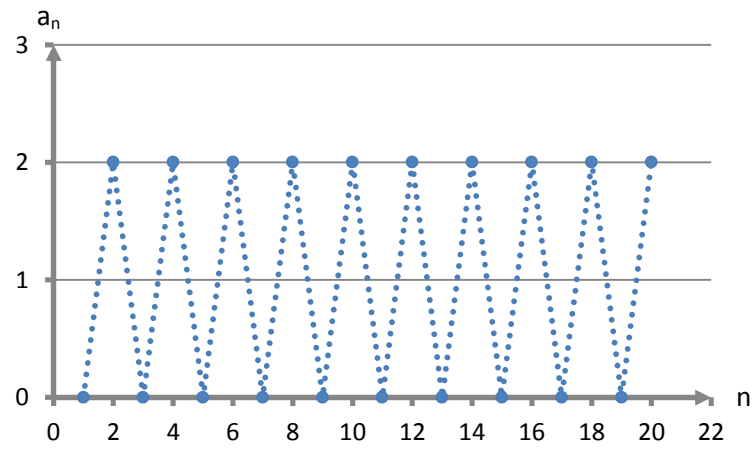
..... (4)



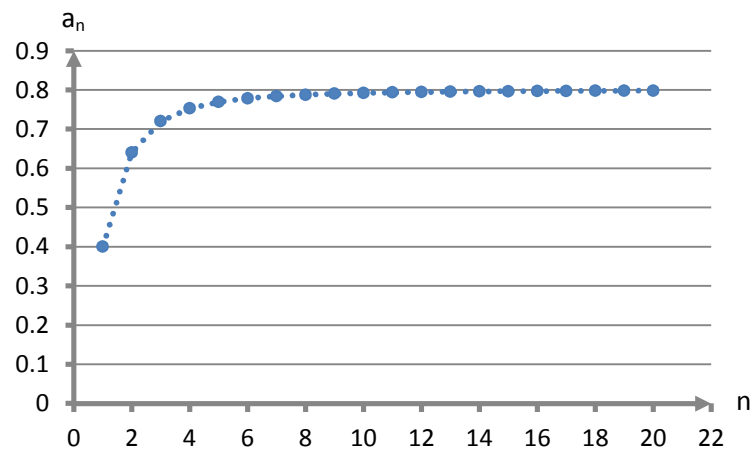
..... (5)



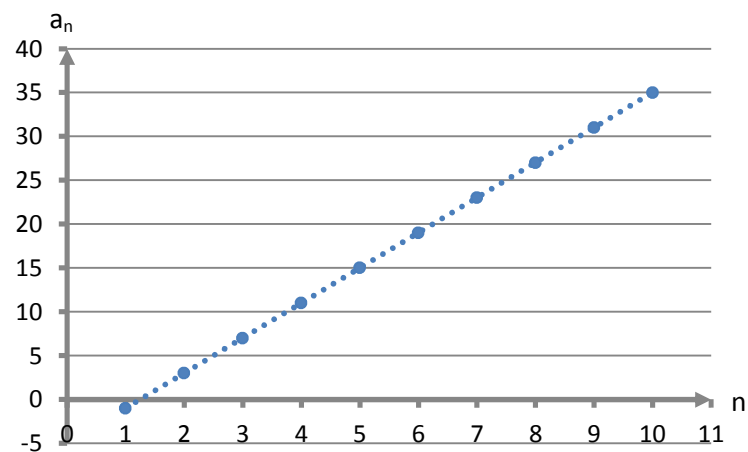
..... (6)



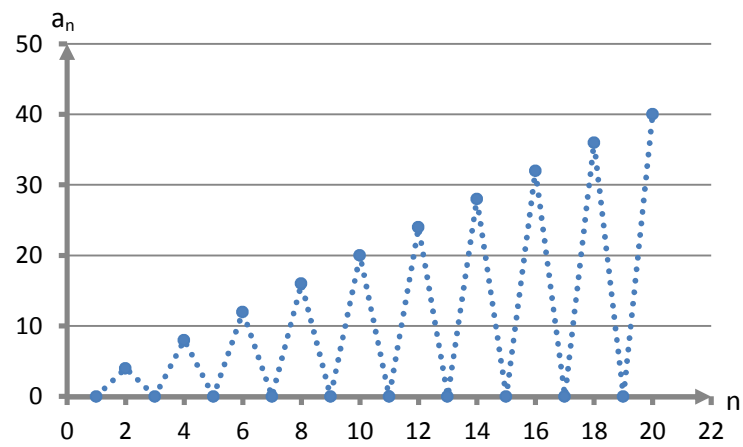
..... (7)



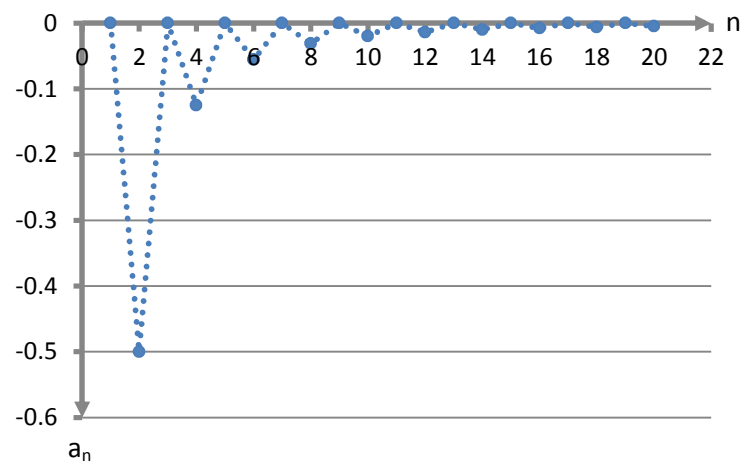
..... (8)



..... (9)



..... (10)





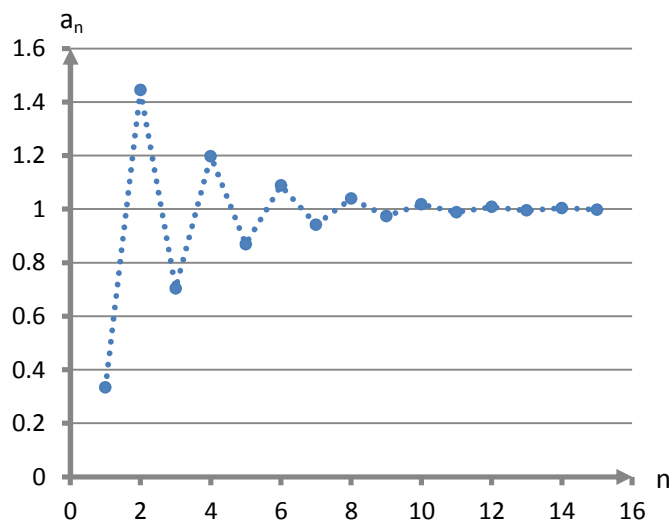
คะแนนที่ได้

.....

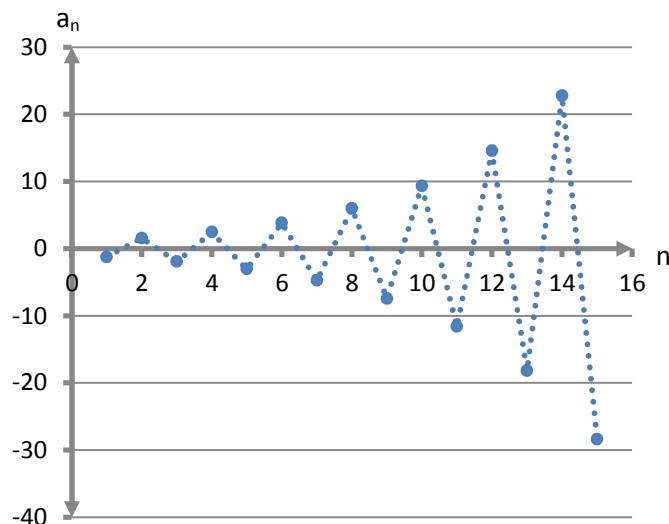
 ผ่านเกณฑ์
4 ข้อ

แบบฝึกหัดที่ 2 (ก)

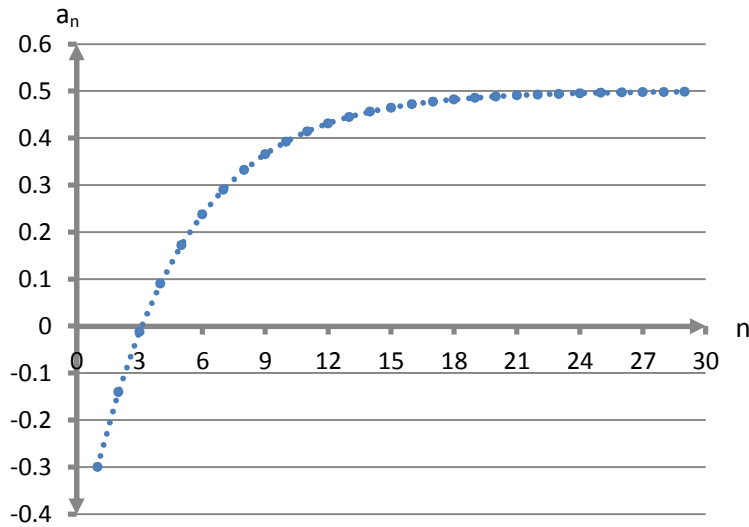
คำชี้แจง ให้นักเรียนนำคำตอบที่กำหนดให้ ใส่ในช่องว่างของแต่ละข้อให้ถูกต้อง

 คำตอบ $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$, หาค่าไม่ได้


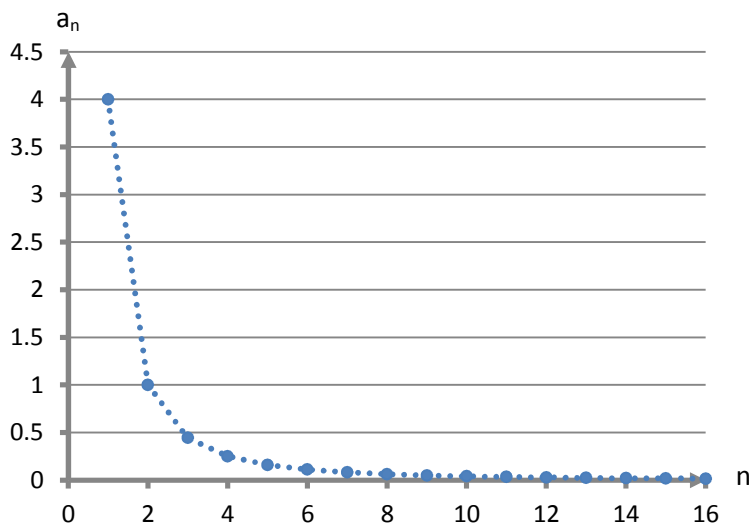
$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



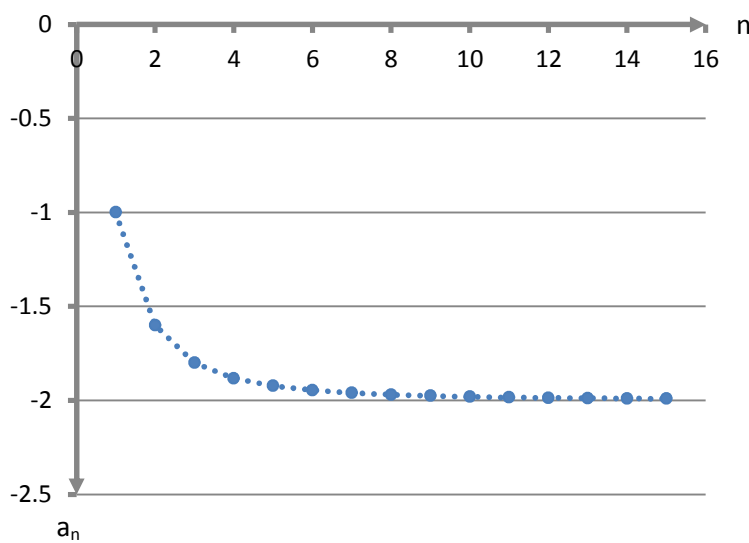
$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



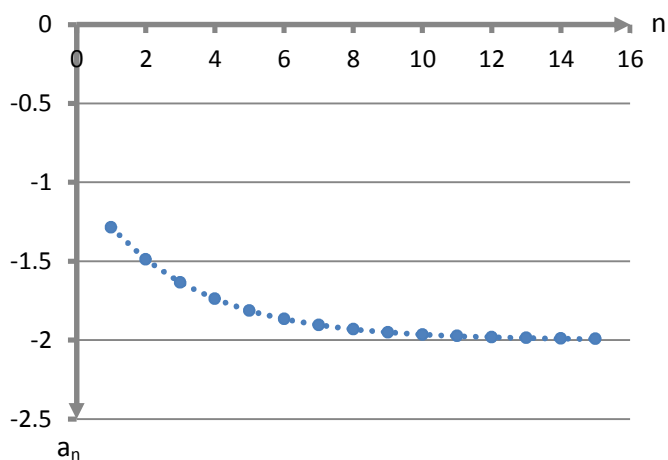
$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



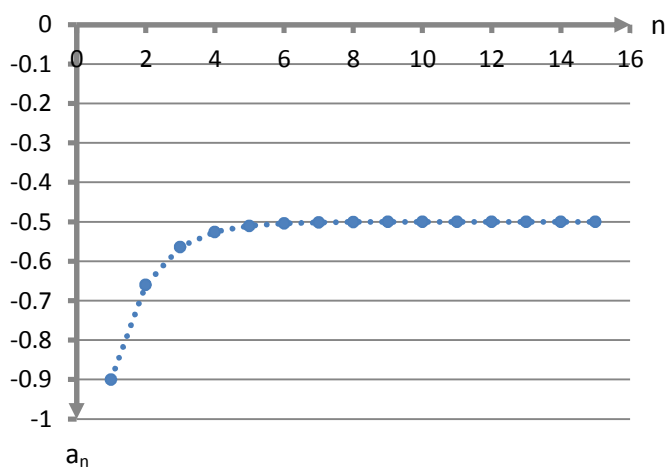
$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



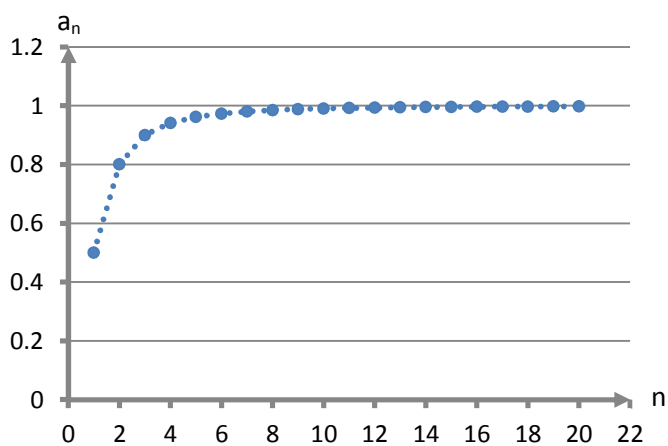
$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$$



คะแนนที่ได้

.....

ผ่านเกณฑ์

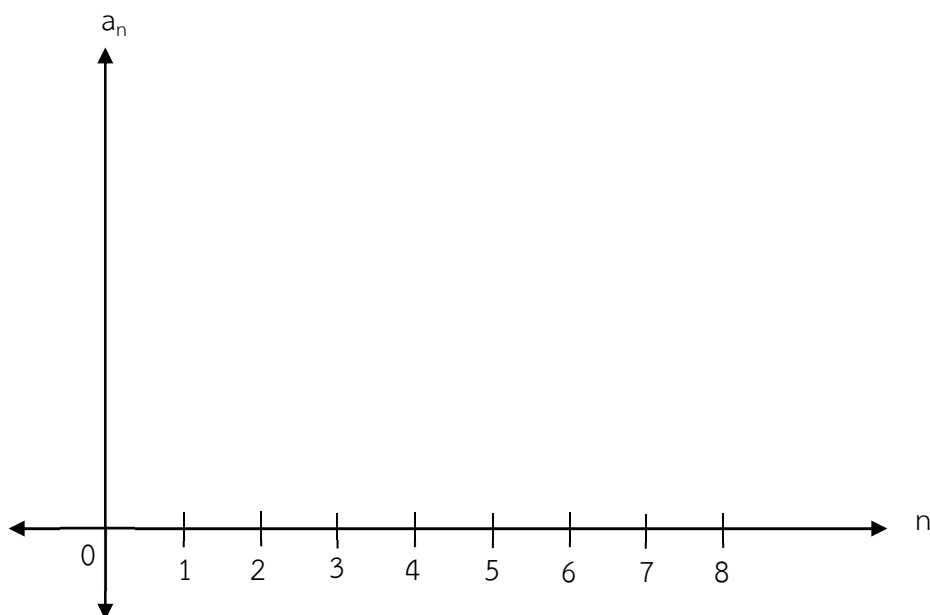
4 ข้อ

แบบฝึกหัดที่ 3 (ก)

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟ เพื่อตรวจสอบดูว่าลำดับอนันต์ใดเป็นลำดับลู่เข้า
ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้หาลิมิตของลำดับนั้น

1. $a_n = \frac{1}{n}$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	$\frac{1}{2}$							...

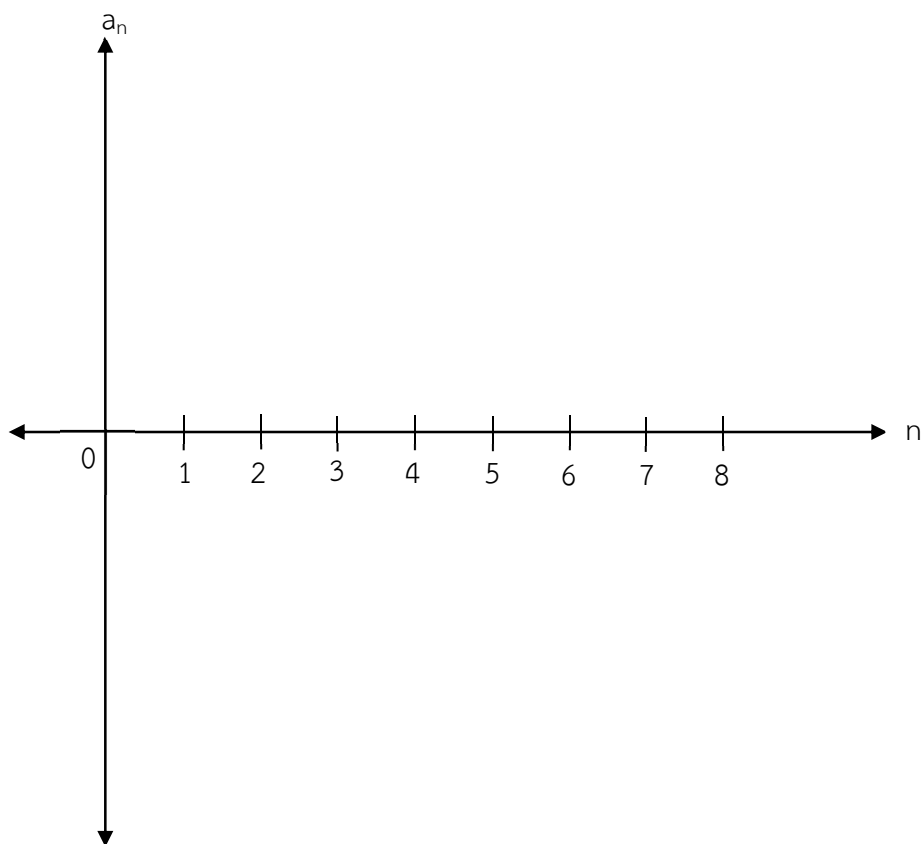


ดังนั้น $a_n = \frac{1}{n}$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

2. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1			$-\frac{1}{4}$					...

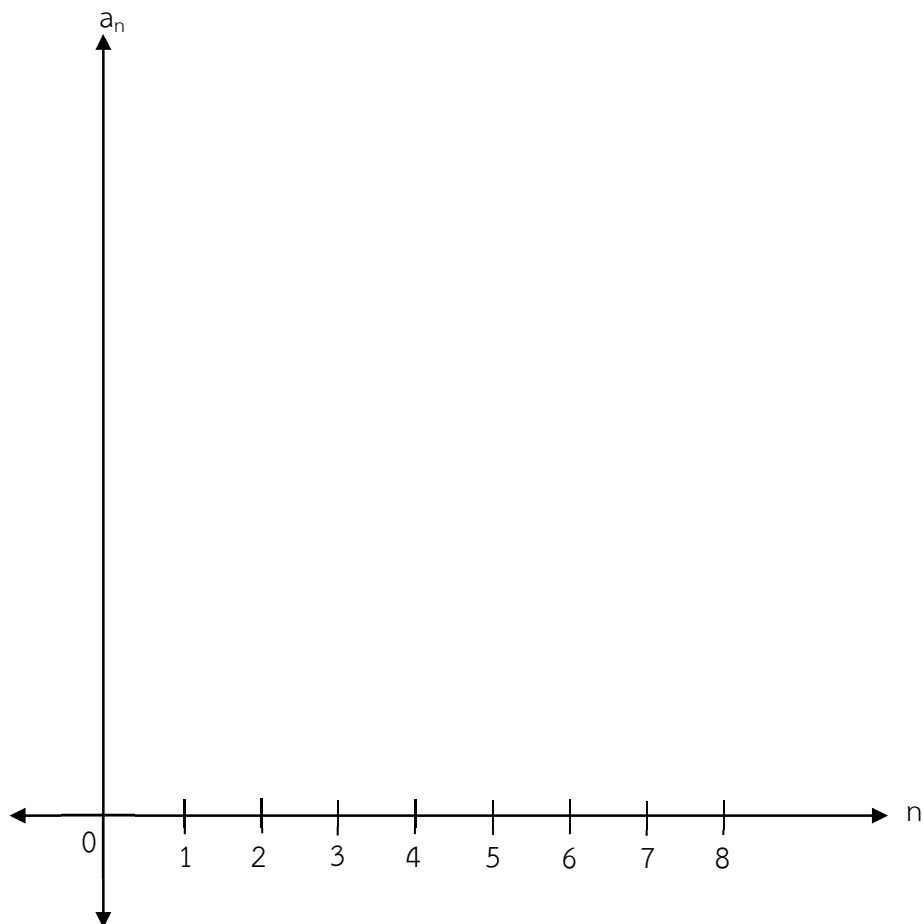


ดังนั้น $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

3. $a_n = 4n - 1$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...

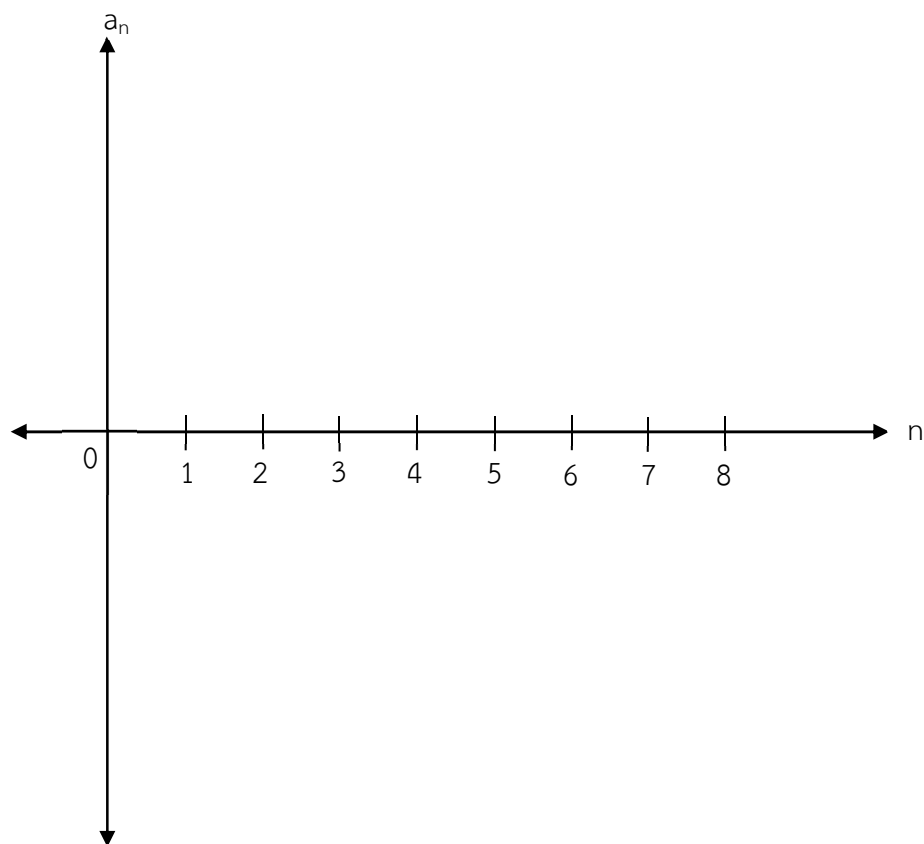


ดังนั้น $a_n = 4n - 1$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

4. $a_n = \frac{1}{n^2} \cos(n\pi)$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...

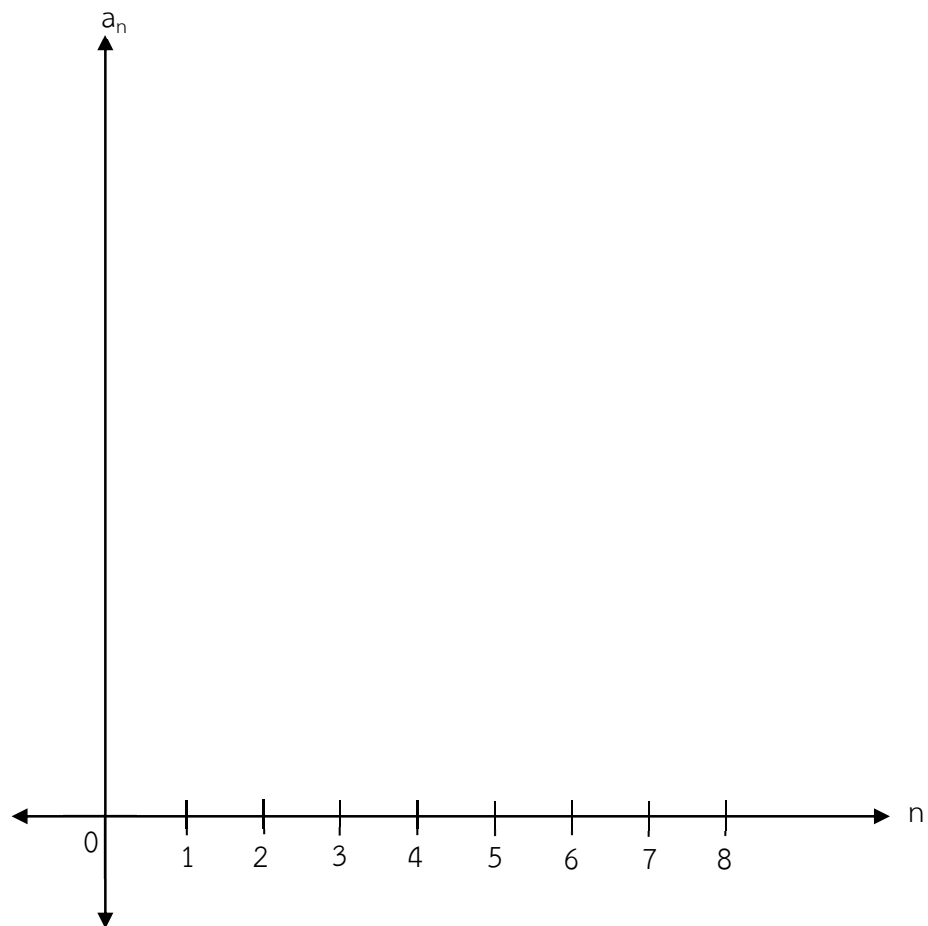


ดังนั้น $a_n = \frac{1}{n^2} \cos(n\pi)$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

5. $a_n = \frac{n+1}{n}$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...



ดังนั้น $a_n = \frac{n+1}{n}$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$



คะแนนที่ได้

.....

ผ่านเกณฑ์

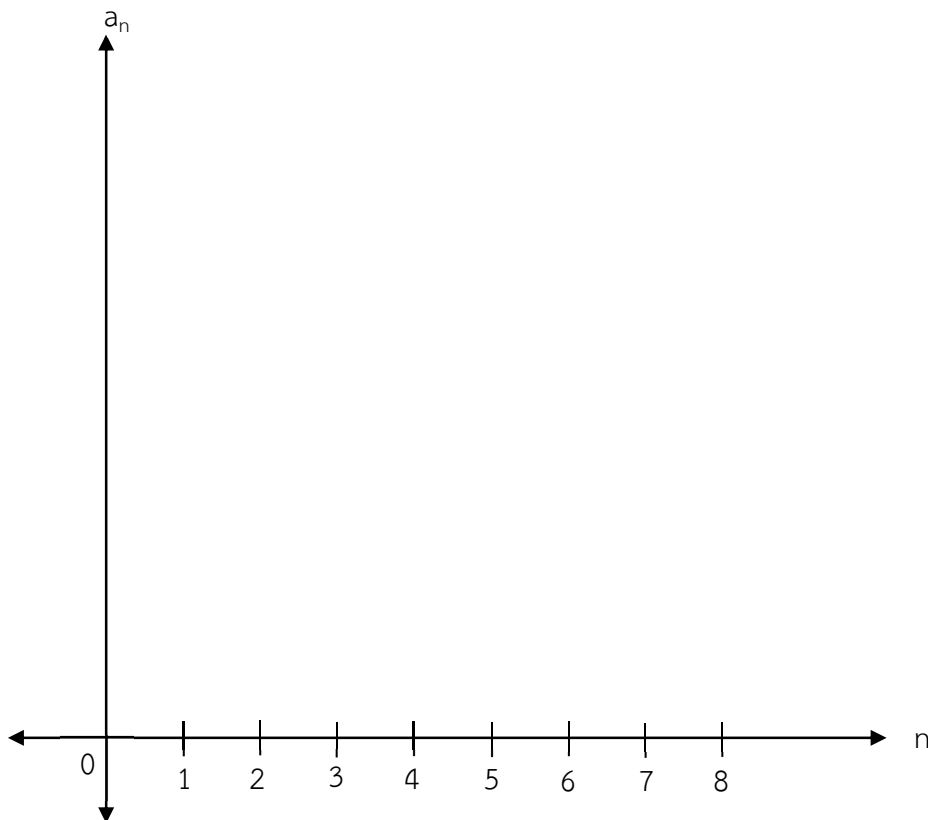
4 ข้อ

แบบฝึกหัดที่ 3 (ข)

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟ เพื่อตรวจสอบว่าลำดับอนันต์ใดเป็นลำดับลู่เข้า ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้หาลิมิตของลำดับนั้น

1. $a_n = n^2$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n		4				36			...

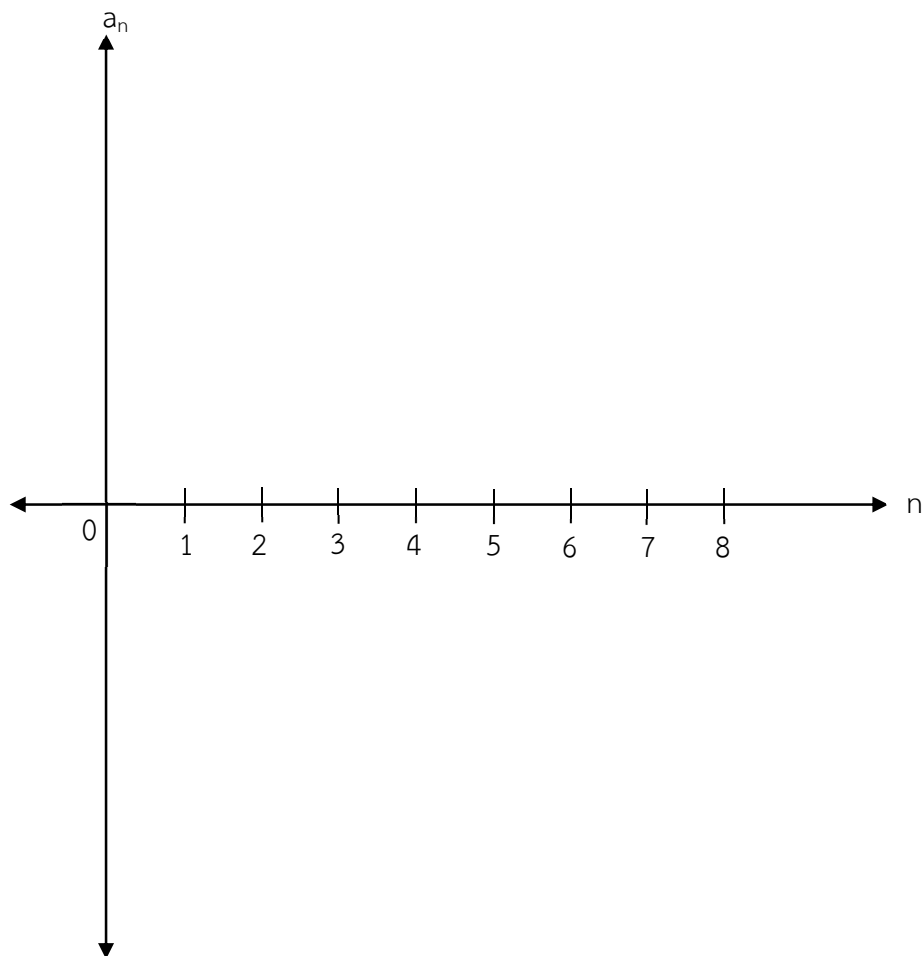


ดังนั้น $a_n = n^2$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

2. $a_n = (-1)^n \frac{2}{n}$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n		1		$\frac{1}{2}$					...

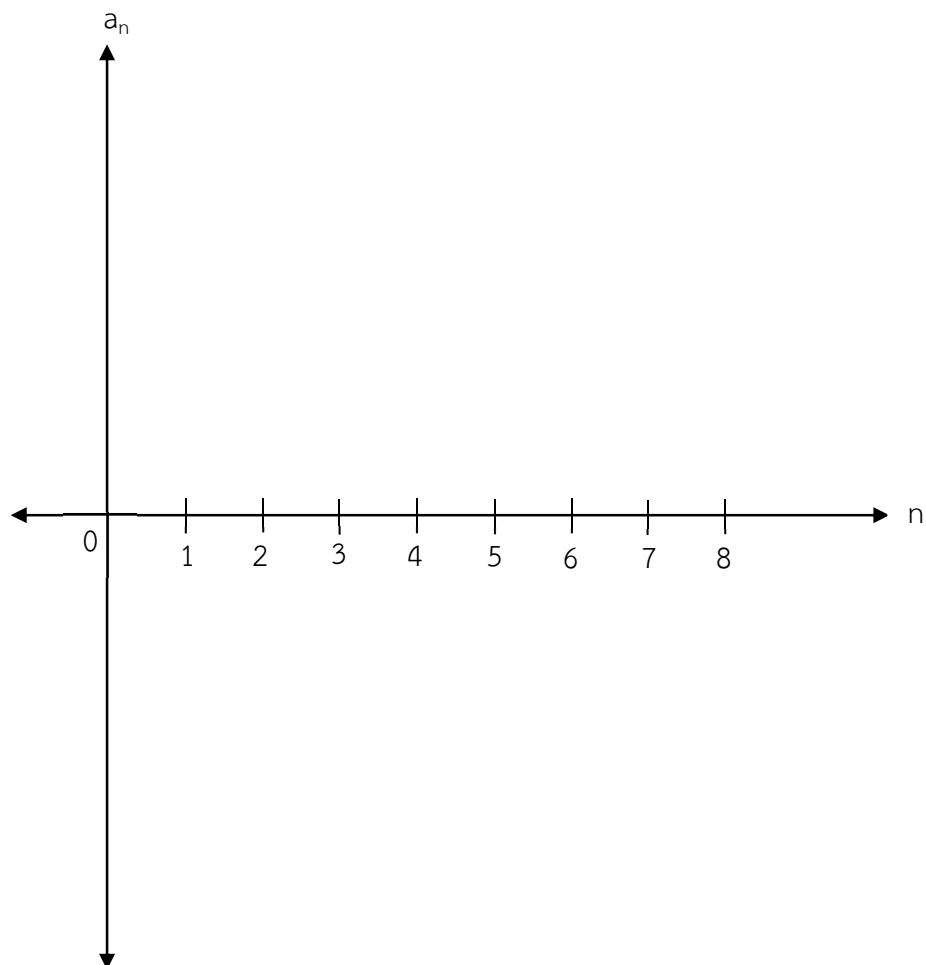


ดังนั้น $a_n = (-1)^n \frac{2}{n}$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

3. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...

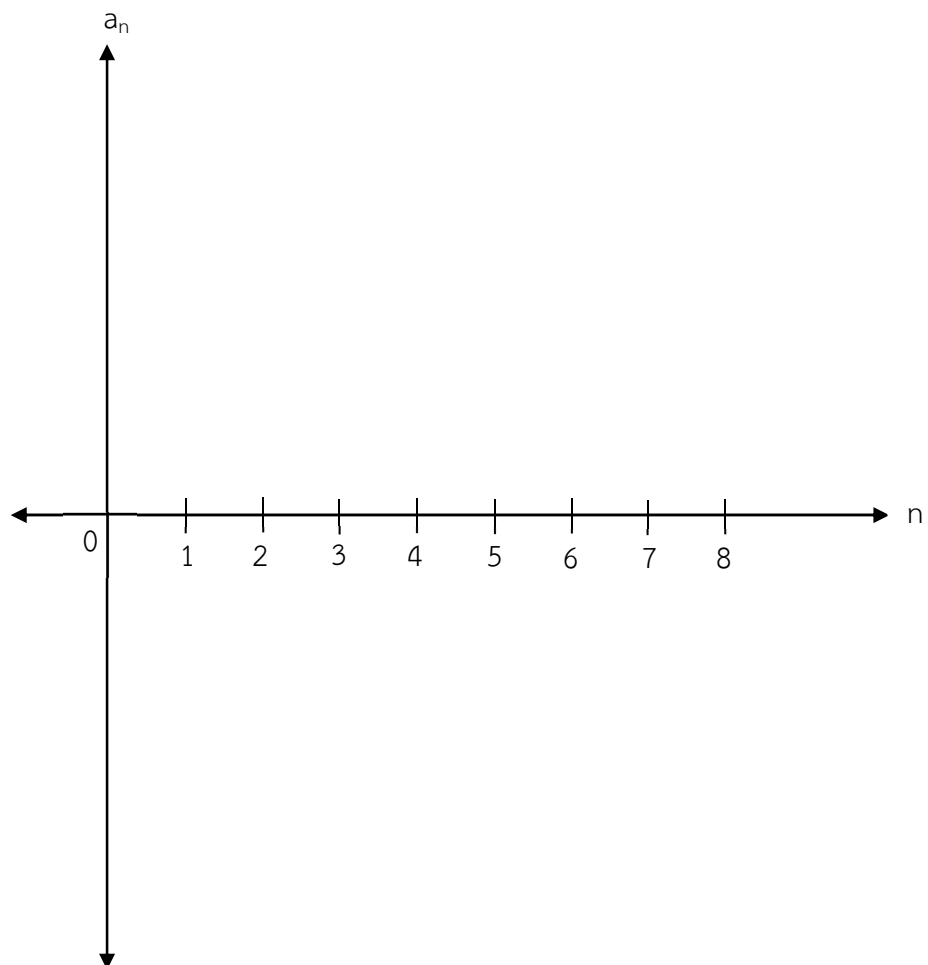


ดังนั้น $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

4. $a_n = 10 - 3n$ ลำดับคือ

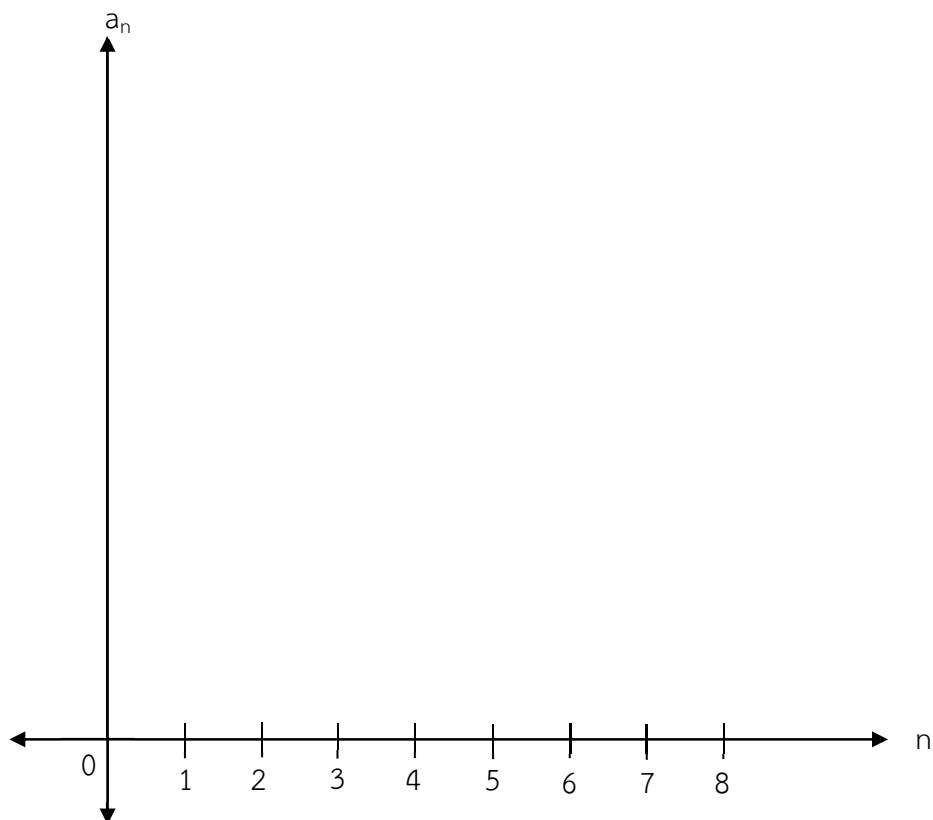
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...



ดังนั้น $a_n = 10 - 3n$ เป็นลำดับ.....
 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$

5. $a_n = \frac{2n+1}{n}$ ลำดับคือ

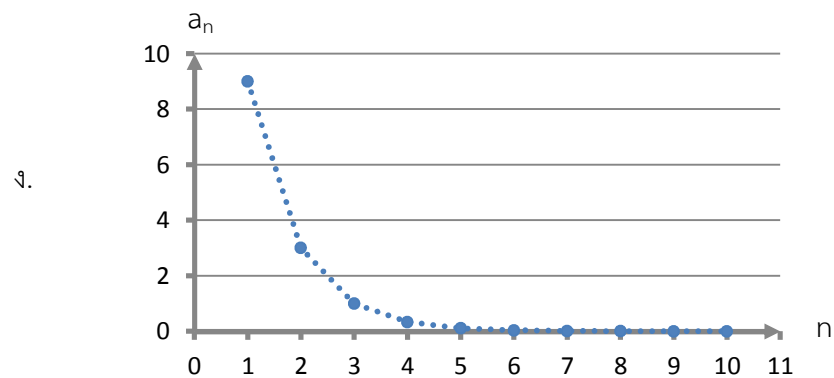
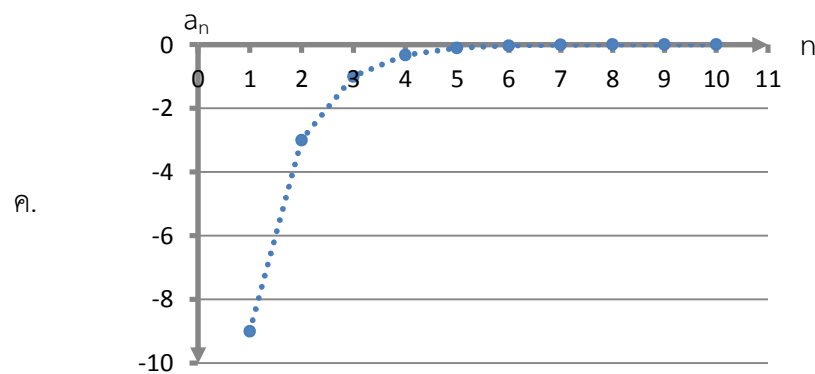
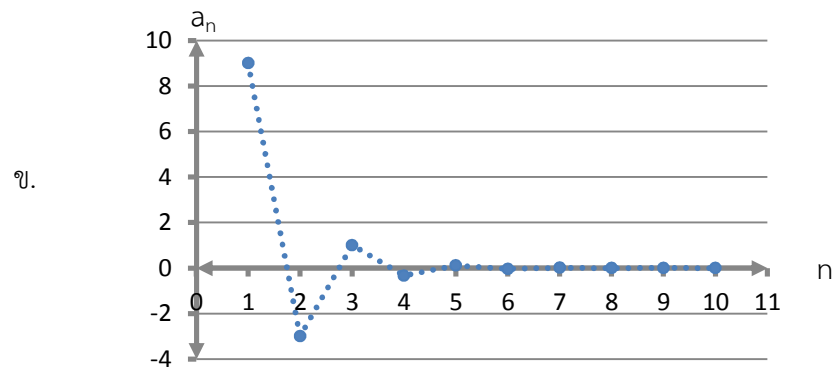
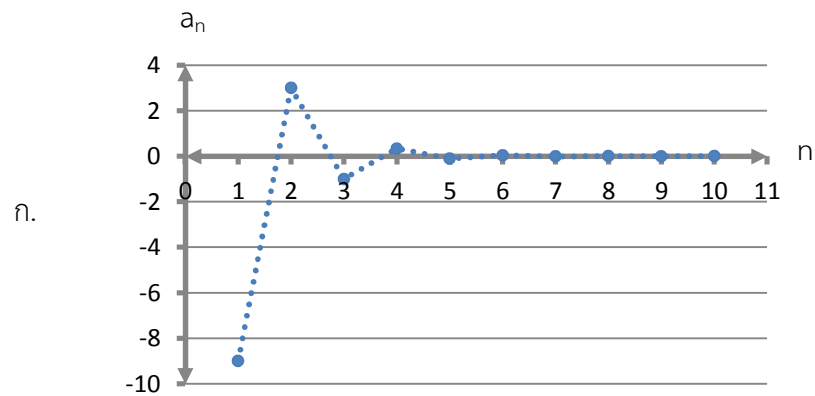
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n									...



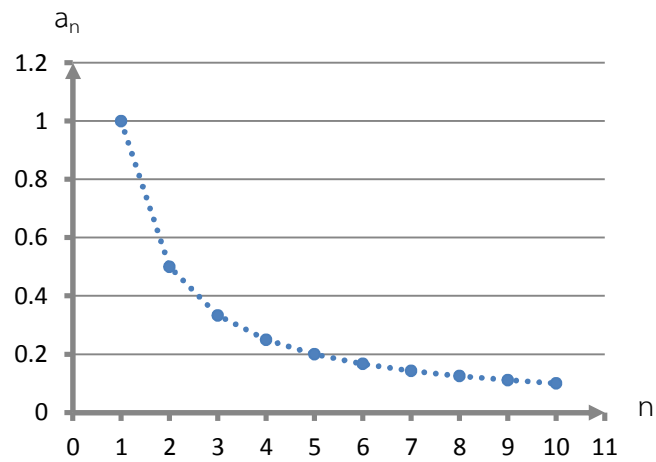
ดังนั้น $a_n = \frac{2n+1}{n}$ เป็นลำดับ.....

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots$

3. พิจารณาลำดับ $a_n = 27\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$ ตรงกับกราฟในข้อใด



4. กำหนดให้



กราฟที่กำหนดให้ตรงกับลำดับในข้อใด เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

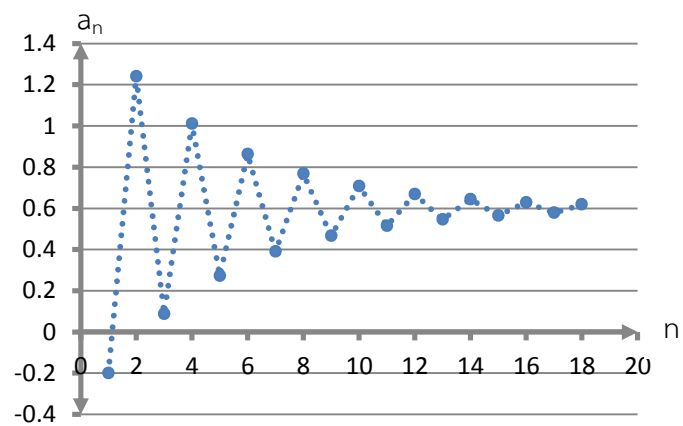
ก. $a_n = -\frac{1}{n}$

ข. $a_n = \frac{1}{n}$

ค. $a_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

ง. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

5. ลิมิตของลำดับอนันต์ที่กำหนดให้เท่ากับเท่าไร เมื่อพิจารณาจากกราฟต่อไปนี้



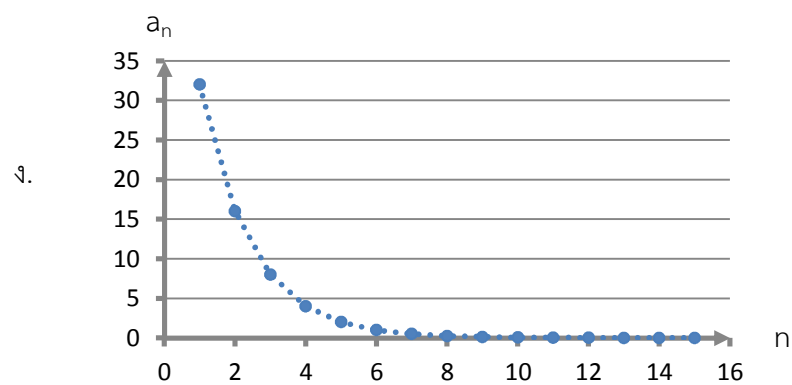
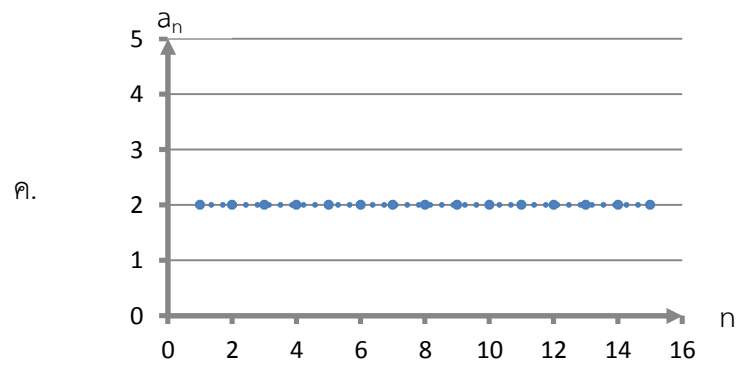
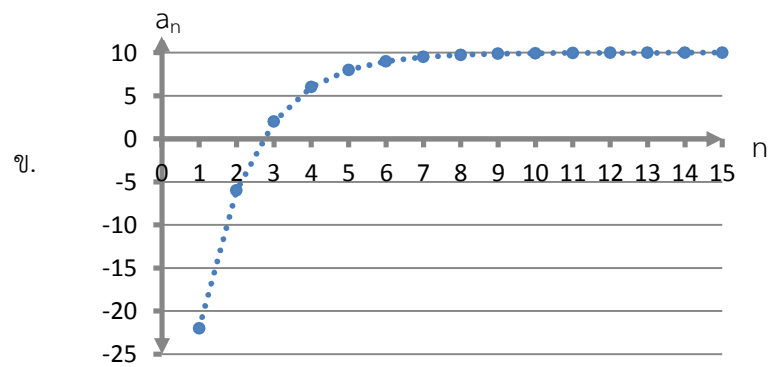
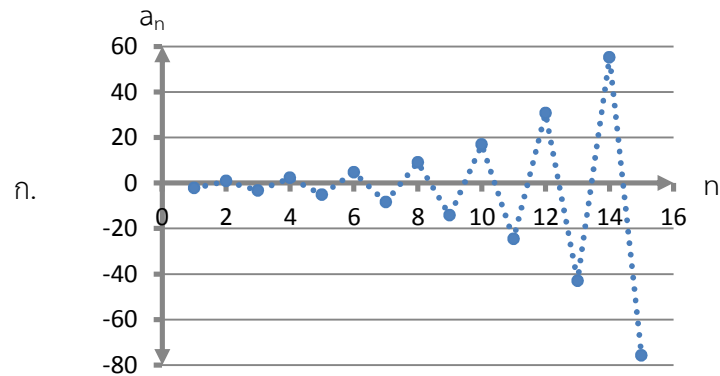
ก. -0.2

ข. 0

ค. 0.6

ง. หาค่าไม่ได้

6. พิจารณากราฟของลำดับอนันต์ต่อไปนี้ ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก



7. ลิมิตลำดับใดต่อไปนี้ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

ก. $a_n = \frac{2}{n^3}$

ข. $a_n = (-1)^{2n}$

ค. $a_n = \frac{1}{n+2}$

ง. $a_n = 5 - 4n$

8. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. ลำดับแกว่งกวัดบางลำดับเป็นลำดับลู่เข้า

ข. ลำดับลู่เข้าบางลำดับสามารถมีค่าลิมิตได้หลายค่า

ค. ลำดับลู่ออกทุกลำดับ เป็นลำดับอนันต์ที่ไม่มีลิมิต

ง. ลำดับจำกัดทุกลำดับเป็นลำดับลู่เข้า

9. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับแกว่งกวัด เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

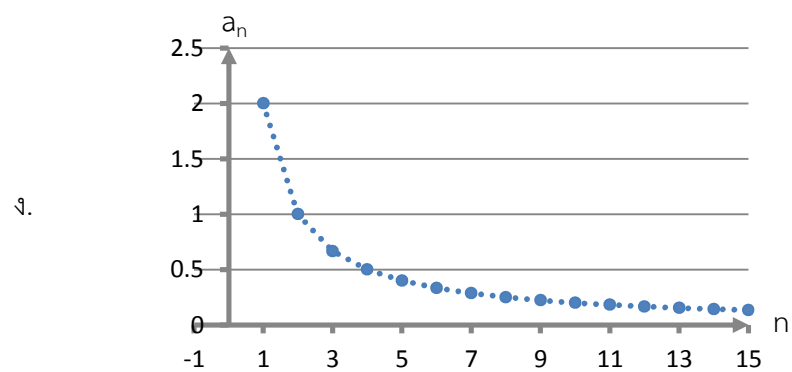
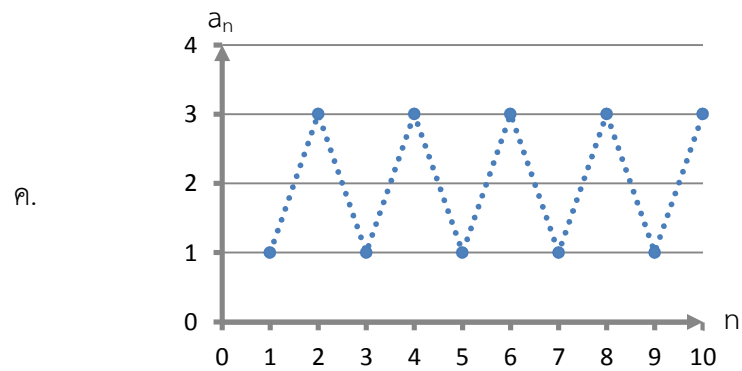
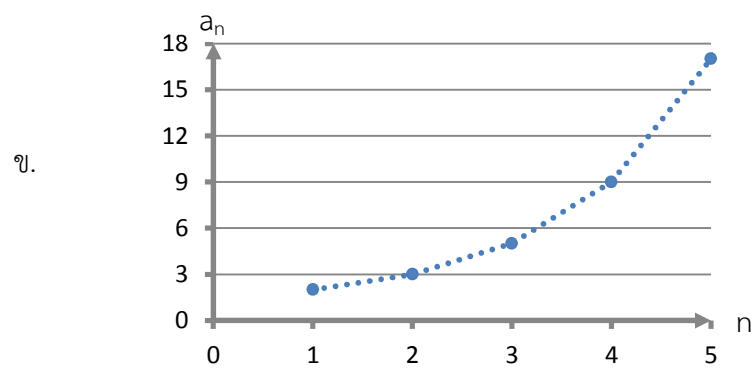
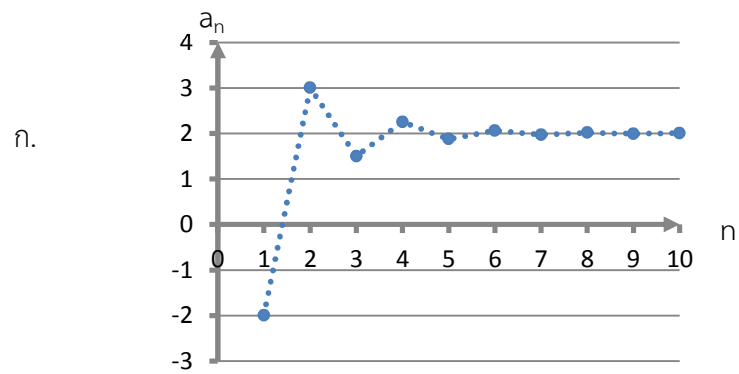
ก. $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

ข. $a_n = (-1)^{n+1}$

ค. $a_n = -(3)^n$

ง. $a_n = (-2)^{n-1}$

10. ลำดับอนันต์ในข้อใดมีลิมิตเท่ากับ 2



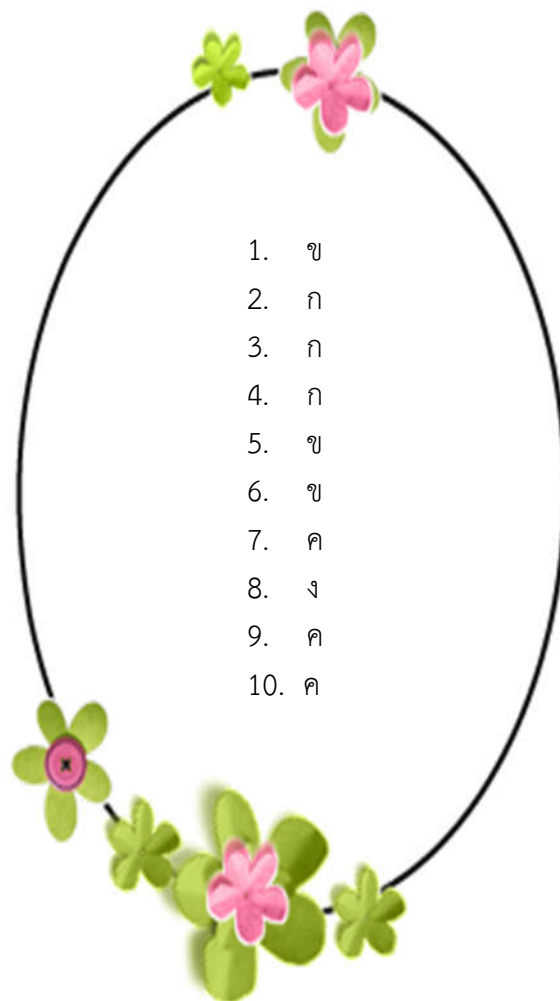
บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และ รณชัย มาเจริญทรัพย์. (2555). *แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 เล่ม 6*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์เดอะบุคส์.
- กวียา เนาวประทีป. (2547). *เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์: ลำดับและอนุกรม*. กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). *หนังสือเรียนเสริมคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 6 ภาคเรียนที่ 2*. (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: แม็คเอดดูเคชั่น.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 6). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (2557). *Hi-ED's Mathematics คณิตศาสตร์ ม. 4-6 เล่ม 6* (รายวิชาพื้นฐานและเพิ่มเติม). กรุงเทพฯ: บริษัท ไฮเอดพับลิชชิง จำกัด.
- สำนักบริหารงานการศึกษาออกโรงเรียน. (2547). *ชุดการเรียนรู้ทางไกล ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายหมวดวิชาคณิตศาสตร์ รหัส คณ 30 (MA 30)*. กรุงเทพฯ: กลุ่มพัฒนาสื่อและเทคโนโลยีสถาบันการศึกษาทางไกล (ศูนย์การศึกษาทางไกลไทยคม).



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4
ลิมิตของลำดับ



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1 (ก)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่ “ลู่เข้า” ลงใน หน้าหมายเลขข้อในแต่ละข้อ
เมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับลู่เข้า และใส่ “ลู่ออก” เมื่อเป็นลำดับลู่ออก

- (1) ลู่เข้า
- (2) ลู่ออก
- (3) ลู่ออก
- (4) ลู่เข้า
- (5) ลู่เข้า
- (6) ลู่ออก
- (7) ลู่เข้า
- (8) ลู่เข้า
- (9) ลู่ออก
- (10) ลู่เข้า

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1 (ข)

คำชี้แจง ให้นักเรียนใส่ “ลู่เข้า” ลงใน หน้าหมายเลขข้อในแต่ละข้อ
เมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับลู่เข้า และใส่ “ลู่ออก” เมื่อเป็นลำดับลู่ออก

(1) ลู่ออก

(2) ลู่เข้า

(3) ลู่ออก

(4) ลู่เข้า

(5) ลู่ออก

(6) ลู่ออก

(7) ลู่เข้า

(8) ลู่ออก

(9) ลู่ออก

(10) ลู่เข้า

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2 (ก)

คำชี้แจง ให้นักเรียนนำคำตอบที่กำหนดให้ ใส่ในช่องว่างของแต่ละข้อให้ถูกต้อง

คำตอบ $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$, หาค่าไม่ได้

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots 1 \dots\dots$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots \text{หาค่าไม่ได้} \dots\dots$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots \frac{1}{2} \dots\dots$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots 0 \dots\dots$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots -2 \dots\dots$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 2 (ข)

คำชี้แจง ให้นักเรียนนำคำตอบที่กำหนดให้ ใส่ในช่องว่างของแต่ละข้อให้ถูกต้อง

คำตอบ $-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2$, หาค่าไม่ได้

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots 2 \dots\dots$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots\dots \text{หาค่าไม่ได้} \dots\dots\dots$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots -2 \dots\dots$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots -\frac{1}{2} \dots\dots$$

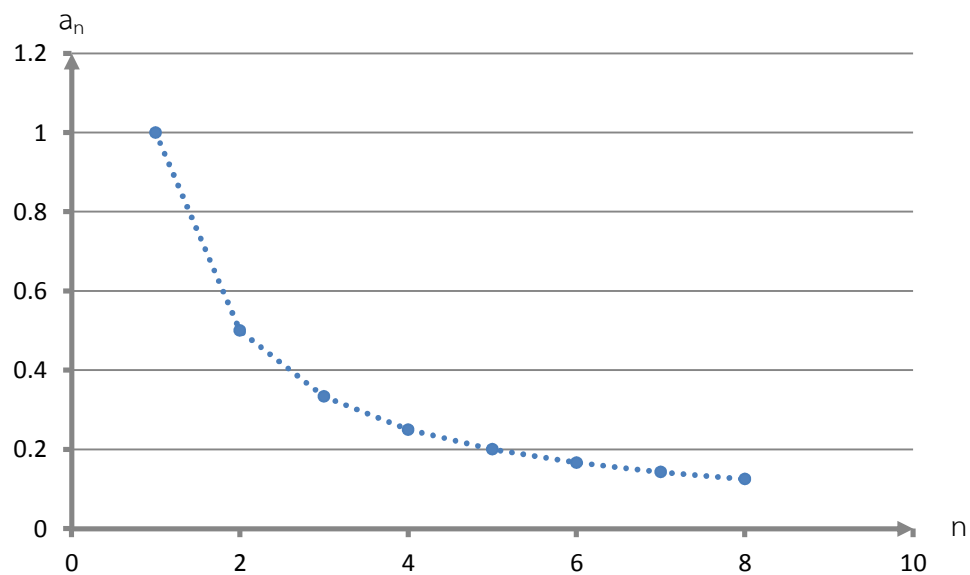
$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \dots\dots 1 \dots\dots$$

เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3 (ก)

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟ เพื่อตรวจสอบดูว่าลำดับอนันต์ใดเป็นลำดับลู่เข้า ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้หาลิมิตของลำดับนั้น

1. $a_n = \frac{1}{n}$ ลำดับคือ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$

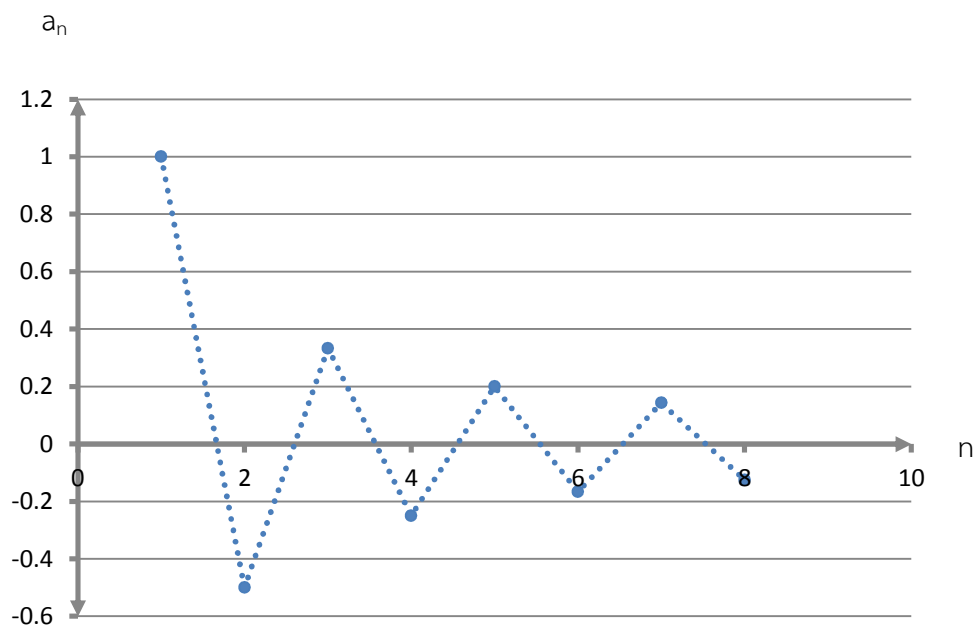
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...



ดังนั้น $a_n = \frac{1}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้า
และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

2. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ลำดับคือ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{8}$	...



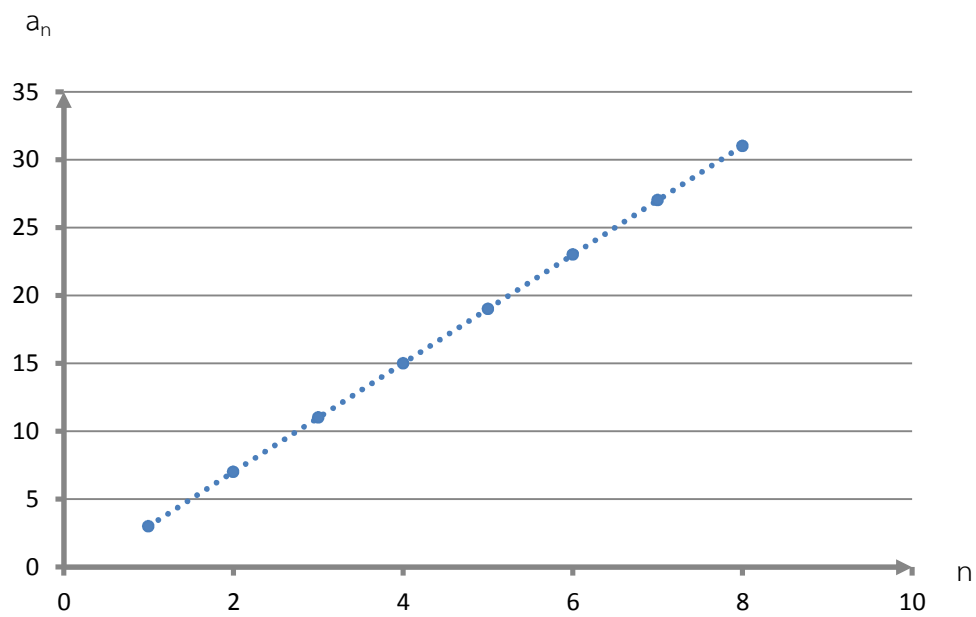
ดังนั้น $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ เป็นลำดับลู่อู่เข้า

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$3. a_n = 4n - 1$$

ลำดับคือ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ...

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	3	7	11	15	19	23	27	31	...

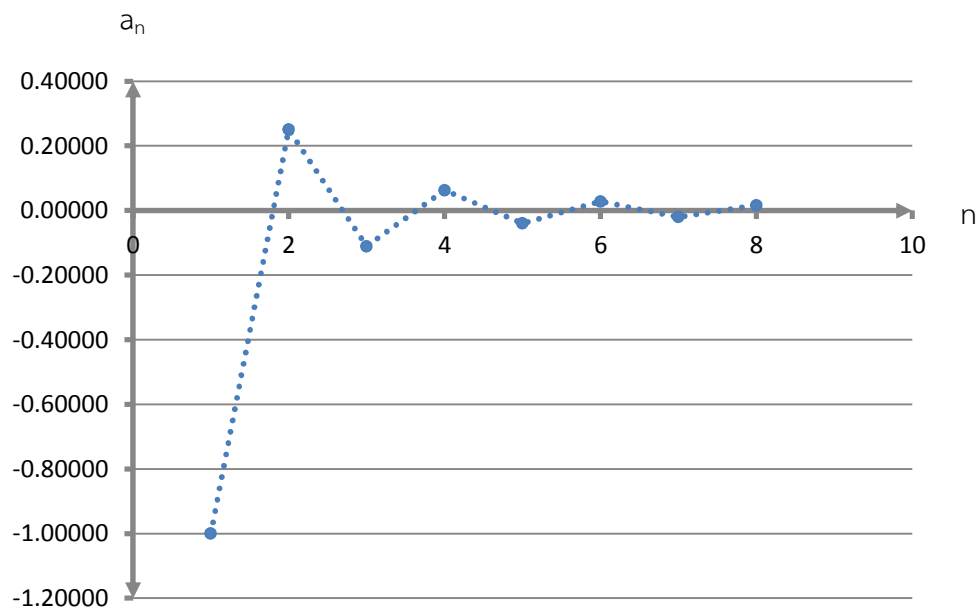


ดังนั้น $a_n = 4n - 1$ เป็นลำดับลู่ออก

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้

4. $a_n = \frac{1}{n^2} \cos(n\pi)$ ลำดับคือ $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, -\frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{49}$	$\frac{1}{64}$	...

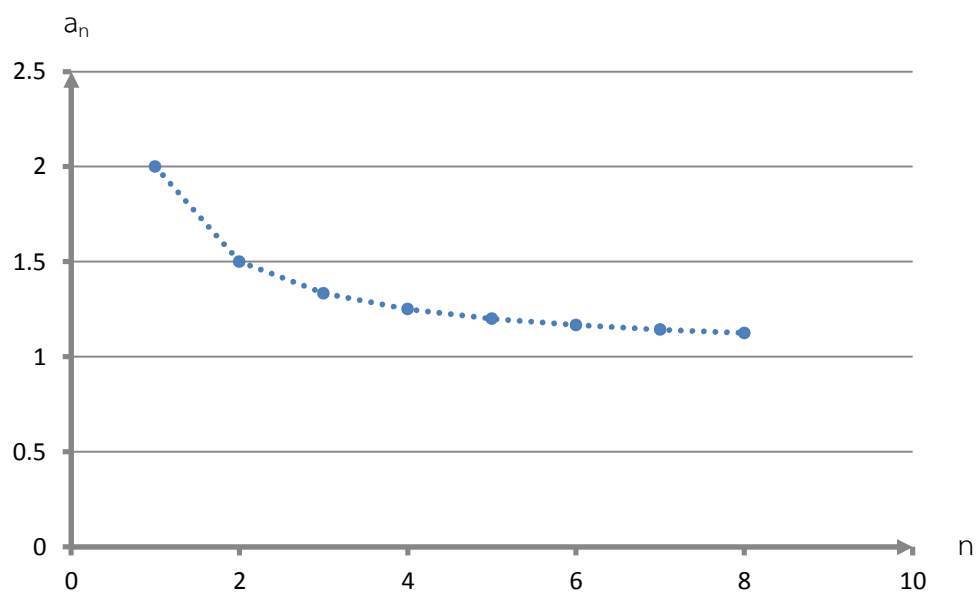


ดังนั้น $a_n = \frac{1}{n^2} \cos(n\pi)$ เป็นลำดับลู่อเข้า
 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$5. a_n = \frac{n+1}{n}$$

ลำดับคือ $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{9}{8}$	...



ดังนั้น $a_n = \frac{n+1}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้า

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

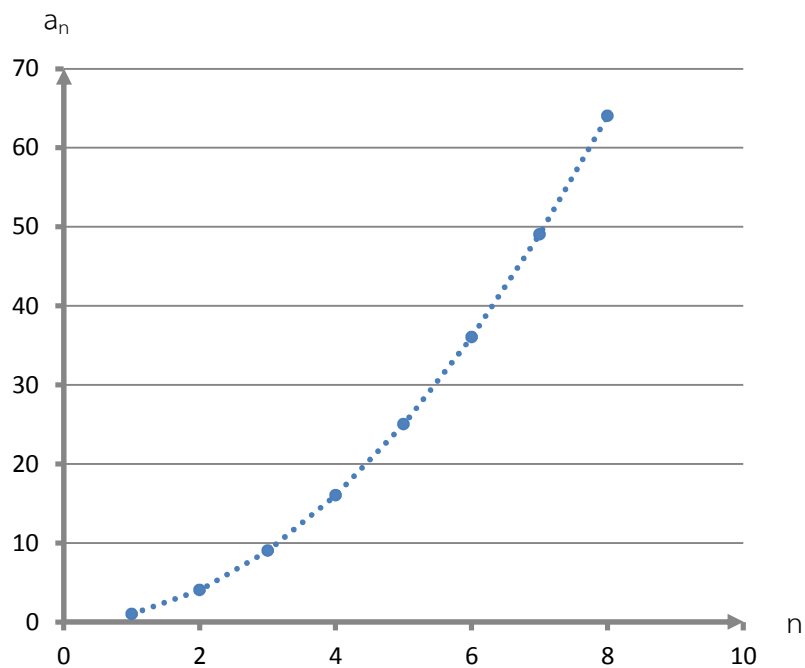
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 3 (ข)

คำชี้แจง ให้นักเรียนเขียนกราฟ เพื่อตรวจสอบว่าลำดับอนันต์ใดเป็นลำดับลู่เข้า
ลำดับใดเป็นลำดับลู่ออก ถ้าเป็นลำดับลู่เข้า ให้หาลิมิตของลำดับนั้น

1. $a_n = n^2$

ลำดับคือ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

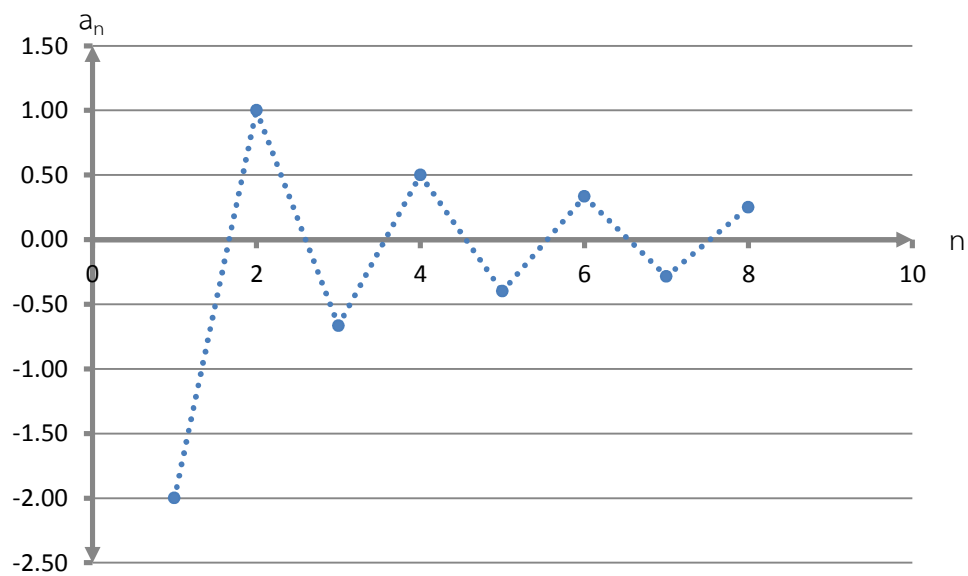
n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	1	4	9	16	25	36	49	64	...



ดังนั้น $a_n = n^2$ เป็นลำดับลู่ออก
และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้

2. $a_n = (-1)^n \frac{2}{n}$ ลำดับคือ $-2, 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \dots$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	-2	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}$	...

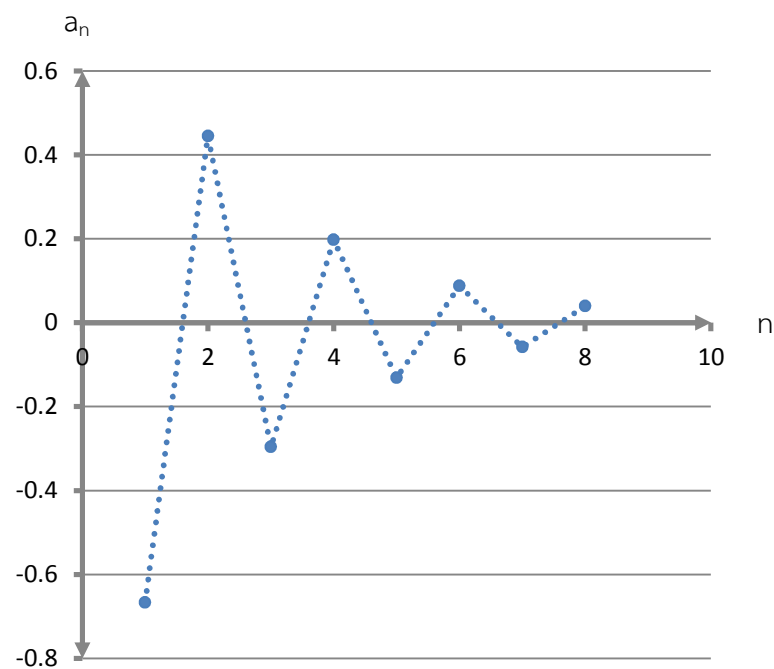


ดังนั้น $a_n = (-1)^n \frac{2}{n}$ เป็นลำดับลู่อู่เข้า

และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$3. a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{ลำดับคือ } -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \frac{64}{729}, -\frac{128}{2187}, \frac{256}{6561}, \dots$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$-\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$-\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$	$-\frac{128}{2187}$	$\frac{256}{6561}$	...



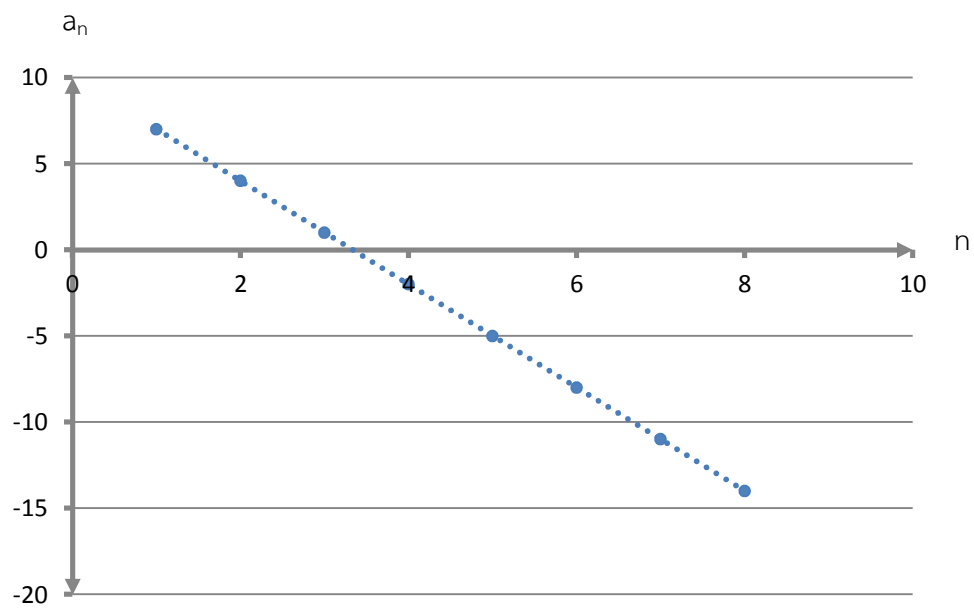
$$\text{ดังนั้น } a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ เป็นลำดับลู่เข้า}$$

$$\text{และ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

4. $a_n = 10 - 3n$

ลำดับคือ 7, 4, 1, -2, -5, -8, -11, -14, ...

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	7	4	1	-2	-5	-8	-11	-14	...

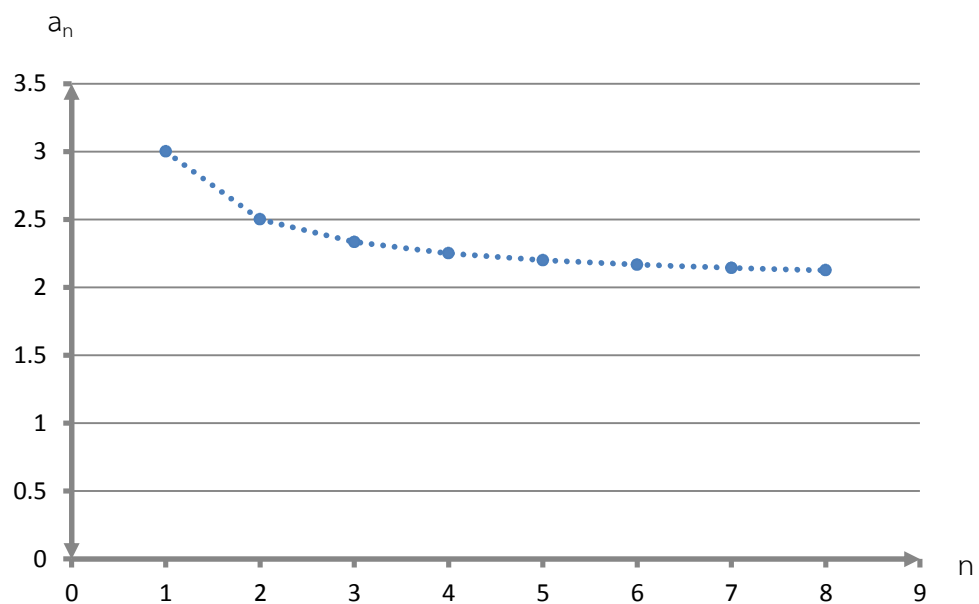

 ดังนั้น $a_n = 10 - 3n$ เป็นลำดับลู่ออก

 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้

5. $a_n = \frac{2n+1}{n}$

ลำดับคือ

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{17}{8}$	...



ดังนั้น $a_n = \frac{2n+1}{n}$ เป็นลำดับลู่เข้า
 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

เฉลยแบบทดสอบหลังการใช้แบบฝึกทักษะ เล่มที่ 4
ลิมิตของลำดับ

