แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ชุดที่ 5 ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนโพธิสัมพันธ์พิทยาคาร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 18

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

คำนำ

การพัฒนาแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 5 (ค33201) เรื่อง แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ได้จัดทำขึ้นเพื่อใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนการสอน และเป็นแนวทางในการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นการปฏิรูปการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญและให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์ ในการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้นให้ผู้เรียนเกิดความคงทนในการเรียนรู้สามารถนำไป แก้ปัญหาต่างๆได้ ผู้จัดทำได้แบ่งเนื้อหาของแบบฝึกทักษะออกเป็น 6 ชุด ประกอบด้วย

แบบฝึกทักษะ ชุดที่ 1 เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

แบบฝึกทักษะชุดที่ 2 เรื่อง ความชันของเส้นโค้งและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

แบบฝึกทักษะชุดที่ 3 เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตรและอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

แบบฝึกทักษะชุดที่ 4 เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงและการประยุกต์ของอนุพันธ์

แบบฝึกทักษะชุดที่ 5 เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

แบบฝึกทักษะชุดที่ 6 เรื่อง ปริพันธ์จำกัดเขตและพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

แบบฝึกทักษะชุดนี้ เป็นชุดที่ 5 เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ซึ่งประกอบด้วยใบความรู้และแบบฝึกทักษะ เพื่อให้นักเรียนได้ศึกษาหาความรู้และฝึกทักษะในการคิดคำนวณอย่างมีเหตุผล แบบฝึกทักษะนี้มีเนื้อหาที่เรียงจากง่ายไปหายาก เหมาะสมกับนักเรียนที่จะศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

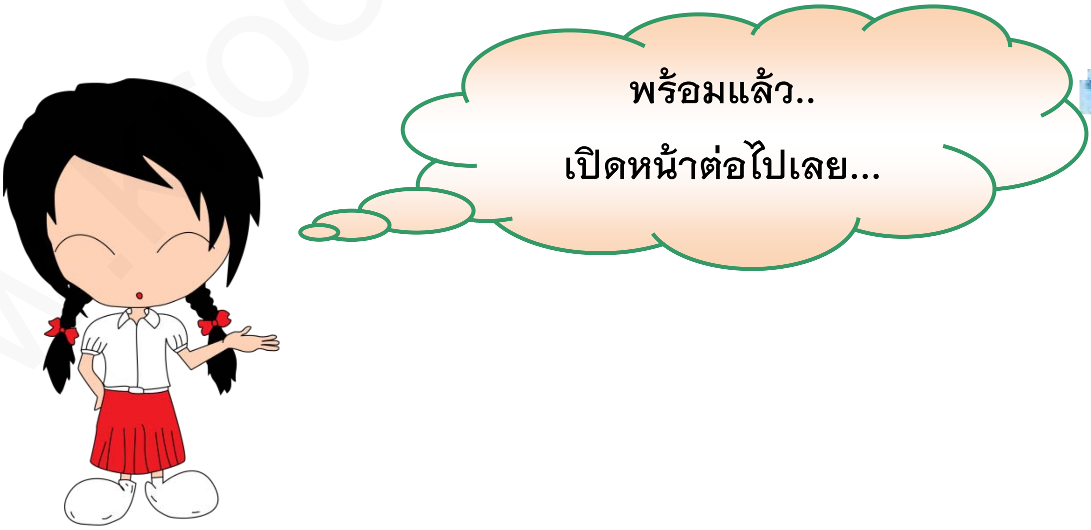
ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะชุดนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับการเรียนรู้ของผู้เรียน ได้มากยิ่งขึ้น

นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี

สารบัญ

ผลการเรียนรู้

1. บอกและอธิบายความหมายของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. นำความรู้เรื่องปริพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้



คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะ

แบบฝึกทักษะชุดนี้ เป็นชุดที่ 5 เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต โดยสิ่งที่นักเรียนควรปฏิบัติอย่างเคร่งครัดในการใช้แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ให้นักเรียนร่วมกันศึกษาขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ และปฏิบัติตามลำดับขั้นตอน
2. ให้นักเรียนตรวจคำตอบในแบบฝึกทักษะและแบบทดสอบ เมื่อเรียนจบทีละเรื่อง และรวมคะแนนที่ได้ในตารางบันทึกผล
3. นักเรียนต้องซื่อสัตย์ต่อตนเองและห้ามเปิดดูเฉลยก่อนการทำแบบฝึกทักษะและแบบทดสอบ เพราะจะทำให้นักเรียนไม่เกิดการเรียนรู้
4. ถ้านักเรียนทำแบบทดสอบประจำแบบฝึกทักษะไม่ผ่านให้นักเรียนกลับไปอ่านทบทวนความรู้ในแบบฝึกทักษะและทำแบบทดสอบใหม่อีกครั้งจนกว่าจะผ่านเกณฑ์ แล้วจึงไปศึกษาแบบฝึกทักษะชุดอื่นๆต่อไป
5. แบบฝึกทักษะ**ไม่ใช่ข้อสอบ**นักเรียนไม่ต้องกังวลใจ ค่อย ๆศึกษาไปทีละหน้า นักเรียนจะได้รับความรู้ด้วยตัวเองตามผลการเรียนรู้
6. ครูคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือนักเรียนในการทำงานหรือขณะปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียนอย่างใกล้ชิด

ปฏิบัติตามคำแนะนำด้วยนะครับ . .

แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. กำหนดให้ $f(x) = -5$ จงหาว่า $F(x)$ตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. -5

ค. $-5x + c$

ง. $5x + c$

2. จงหาค่าของ $\int dx$

ก. 0

ข. 1

ค. x

ง. $x + c$

3. จงหาค่าของ $\int 3dx$

ก. 0

ข. 3

ค. $3x$

ง. $3x + c$

4. จงหาค่าของ $\int (2x + 3)dx$

ก. $x^2 + 3x + c$

ข. $2x^2 + 3$

ค. $4x$

ง. 2

5. จงหาค่าของ $\int x^2(x-3)dx$

ก. $x^2 - 3x^2$

ข. $x - 3$

ค. $x^4 - x^3 + c$

ง. $\frac{x^4}{4} - x^3 + c$

6. จงหาฟังก์ชันFเมื่อกำหนดF (x) = $6x^2$

ก. $6x^3 + 3x + c$

ข. $2x^3 + c$

ค. $3x^2 + c$

ง. $6x$

7. จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

ก. $6x - 6$

ข. $\frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x + c$

ค. $x^3 - 3x^2 + 9x + c$

ง. $3x - 6$

8. จงหาค่าของ $\int (2x^3 + 3x - 1)dx$

ก. $6x^2 + 3x + c$

ข. $\frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} - x + c$

ค. $4x + 3$

ง. 4

9. อนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่จากจุดๆ หนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที อนุภาคจะมีความเร็ว $V = 4t^3 + 2t - 1$ เมตรต่อวินาที ขณะที่เริ่มต้นจับเวลา อนุภาคเคลื่อนที่ได้ทาง 4 เมตร ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ห่างจากจุดเริ่มต้นเมื่อ t = 3 วินาที คือข้อใด

ก. 113 เมตร

ข. 110 เมตร

ค. 98 เมตร

ง. 91 เมตร

10. จงหาค่าของ $\int (2x + 3x^2)dx$

ก. $x^2 + x^3 + c$

ข. $\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

ค. $2 + 6x$

ง. $2x^2 + 3x^4 + c$

ใบความรู้ที่ 5.1
ปฏิยานุพันธ์

จากเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเราทราบว่า ถ้ามีสมการของการเคลื่อนที่ ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง (s) กับเวลา (t) แล้ว ความเร็ว (v) ของวัตถุคือ $\frac{ds}{dt}$ หรือ $v = \frac{ds}{dt}$ ฉะนั้น ถ้าเราทราบว่า $v = 3t^2 + 6t$ แสดงว่า $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t$

ลองนึกย้อนกลับว่าสมการของการเคลื่อนที่ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง s กับ t ควรจะเป็นอย่างไร จึงจะได้ $\frac{ds}{dt} = 3t^2 + 6t$

สมมติคาดคะเนว่าสมการของการเคลื่อนที่ คือ $s_1 = t^3 + t^2$

จะได้ $v_1 = \frac{ds_1}{dt}$

$= 3t^2 + 2t$

พบว่า $s_1 = t^3 + t^2$ ไม่ใช่สมการของการเคลื่อนที่ตามต้องการ

ลองสมมติใหม่ ให้ $s_2 = t^3 + 3t^2$

คราวนี้จะเห็นได้ว่า $v_2 = 3t^2 + 6t$ ได้สมการของการเคลื่อนที่ซึ่งให้ความเร็วตรงตามที่กำหนด ปัญหาที่ตามมาคือ ยังมีสมการของการเคลื่อนที่อื่นอีกหรือไม่ที่ให้ความเร็วตามที่กำหนด ลองพิจารณาสมการของการเคลื่อนที่ต่อไปนี้

ถ้า $s_3 = t^3 + 3t^2 + 5$

จะได้ $v_3 = 3t^2 + 6t$

ถ้า $s_4 = t^3 + 3t^2 - 8$

จะได้ $v_4 = 3t^2 + 6t$

ถ้า $s_5 = t^3 + 3t^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ $v_5 = 3t^2 + 6t$

จากสมการของการเคลื่อนที่ข้างต้น จะเห็นว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เท่ากันคือ $v = 3t^2 + 6t$ เมตรต่อวินาที เมื่อสมการของการเคลื่อนที่คือ $s = t^3 + 3t^2 + c$ กระบวนการหาความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อทราบสมการของการเคลื่อนที่ โดยอาศัยความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แต่สำหรับการหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อทราบความเร็วของวัตถุนั้นเป็นกระบวนการตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ ซึ่งเรียกว่า **การหาปฏิยานุพันธ์** และเรียกสมการของการเคลื่อนที่แต่ละสมการข้างต้นว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $v = 3t^2 + 6t$

ในกรณีทั่วไป จะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ ดังนี้

> **บทนิยาม** ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f ถ้า $F'(x) = f(x)$
> สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า $F(x) = \sqrt{x^2-1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

วิธีทำ จาก $F(x) = \sqrt{x^2-1}$

จะได้ $F'(x) = \frac{1}{2}(x2-1)^{-\frac{1}{2}}(2x)$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

นั่นคือ $F'(x) = f(x)$

ดังนั้น $F(x) = \sqrt{x^2-1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน

$F(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ $f(x) = 2x$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ ให้ $F_1(x) = x^3$ จะได้ $F_1'(x) = 3x^2$

$F_2(x) = x^2$ จะได้ $F_2'(x) = 2x$

$F_3(x) = x^2 + 3$ จะได้ $F_3'(x) = 2x$

$F_4(x) = x^2 + 1$ จะได้ $F_4'(x) = 2x$

นั่นคือ F_2 , F_3 , F_4ต่างเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x$

จะเห็นว่าถ้าให้ $F(x) = x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จะได้ $F'(x) = 2x$

ดังนั้น $F(x) = x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ ของ $F(x) = 2x$

หมายเหตุ 1. ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f แล้ว ฟังก์ชัน G ที่นิยามโดย $G(x) = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ด้วย

2. ในคณิตศาสตร์ระดับที่สูงขึ้นไปมีการพิสูจน์โดยชัดแจ้งว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันเดียวกันจะต่างกันเพียงค่าคงตัวเท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาฟังก์ชัน F เมื่อกำหนด $F'(x) = 3x^2$

วิธีทำ ลองให้ $F(x) = x^3$

จะได้ $F'(x) = 3x^2$ ซึ่งตรงกับสิ่งที่กำหนดให้

ดังนั้น เมื่อ $F'(x) = 3x^2$

จะได้ $F(x) = x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $f(x) = x$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x$ จะหา F ที่ $F'(x) = x$

ลองให้ $F(x) = x^2$ จะได้ $F'(x) = 2x$

แสดงว่า $F(x) = x^2$ ไม่ใช่ฟังก์ชันที่ต้องการ

ลองให้ $F(x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ ของ $f(x) = x$ คือ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $f(x) = 3x^2 + x$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 + x$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 3x^2 + x$

ลองให้ $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$

จะได้ $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}(2x)$

$= 3x^2 + x$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + x$

คือ $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

แบบฝึกทักษะที่ 5.1

ผลการเรียนรู้ หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x$

....

....

....

....

....

....

....

2. $f(x) = x^3$

....

....

....

....

....

....

....

3. $f(x) = x\sqrt{x}$

....

....

....

....

....

....

....

....

4. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. $f(x) = 2x + 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

6. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

....

....

....

....

....

....

....

....

7. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

8. $f(x) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียน

เกณฑ์การให้คะแนน ดี ได้ 2 คะแนน

พอใช้ ได้ 1 คะแนน

ควรปรับปรุง ได้ 0 คะแนน

เกณฑ์การประเมิน การผ่านการประเมินทุกรายการต้องได้ 1 ขึ้นไป

ข้อ	รายการประเมิน	คะแนนที่ได้	สรุป		ไม่ผ่าน
			ผ่าน	ไม่ผ่าน	
1	การสนใจในการตอบคำถาม				
2	ความกระตือรือร้น				
3	การแสดงความคิดเห็น				
รวมคะแนน					

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม...

....

....

....

....

....

(ลงชื่อ) ....ผู้ประเมิน

(นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี)

ครูผู้สอน

.... / .... / ....

ใบความรู้ที่ 5.2
ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ถ้าให้ $f(x) = 2x$ และ $F(x) = x^2$ จะได้ $F'(x) = f(x) = 2x$
หรือ F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f

นอกจากนี้ฟังก์ชัน

$$F_1(x) = x^2 + 3$$
$$F_2(x) = x^2 - 4$$
$$F_3(x) = x^2 - 12$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

จะเห็นว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ต่างกันที่ค่าคงตัวเท่านั้น และจะเขียนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วย $F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

จากกระบวนการหาปฏิยานุพันธ์ที่แสดงมาข้างต้น จะเห็นว่าเมื่อมีฟังก์ชัน f เราจะพยายามหาฟังก์ชันF ซึ่ง $F'(x) = f(x)$ แล้วสรุปว่ารูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ f คือ ฟังก์ชัน $y = F(x) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ต่อไปเพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะเขียนแทนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ อ่านว่า “ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x”

ดังนั้น ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้วจะได้ว่า

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

กล่าวคือ ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของ f ก็คือ ปฏิยานุพันธ์ของ f นั่นเอง

จากบทนิยามเรียกกระบวนการหา $\int f(x)dx$ ว่า “การหาปริพันธ์” เครื่องหมาย “ $\int$ ” เรียกว่าเครื่องหมาย “ ปริพันธ์ ” เรียก f(x) ว่า “ ปริพัทธ์ ” และ dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่าการหาปริพันธ์นี้เทียบกับตัวแปร x

สูตรต่อไปนี้เป็นสูตรเกี่ยวกับการหาปริพันธ์ไม่จำกัดของฟังก์ชัน โดยจะไม่แสดงการพิสูจน์สูตรดังกล่าว

สูตรที่ 1 $\int k\,dx = kx + c$

เมื่อ k และ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 5\,dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 1 จะได้ $\int 5\,dx = 5x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สูตรที่ 2 ถ้า $n \neq -1$ แล้ว $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int x^5\,dx$

วิธีทำ จากสูตรที่ 2 จะได้ $\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= \frac{x^6}{6} + c$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$

จะได้ $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx$

$$= \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{-1}{2x^2} + c$$

สูตรที่ 3 $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

และ f(x) มีปริพันธ์

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int 3x^2\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx$

$$= 3\left[\frac{x^3}{3} + c_1\right]$$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

$$= x^3 + c$$ เมื่อ $c = 3c_1$

สูตรที่ 4 $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

เมื่อ f(x) และ g(x) มีปริพันธ์

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหา $\int (x^2 + 2x)dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int (x^2 + 2x)dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx$

$$= \int x^2\,dx + 2\int x\,dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^1}{-1} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= x^2 + \frac{1}{x} + c$$

สูตรที่ 5 $\int [f(x)-g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

เมื่อf(x) และ g(x) มีปริพันธ์

หมายเหตุ โดยทั่ว ๆ ไป ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชัน แทนที่จะบวกค่าคงตัวเมื่อหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของแต่ละฟังก์ชันเพื่อความสะดวก จะบวกค่าคงตัวเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหา $\int (2x - \frac{1}{x^2})\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\int (2x - \frac{1}{x^2})\,dx = \int 2x dx - \int \frac{1}{x^2} dx$

$$= 2\int x dx - \int x^{-2} dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^1}{-1} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= x^2 + \frac{1}{x} + c$$

ข้อสังเกต จากสูตรที่ 3 สูตรที่ 4 และสูตรที่ 5 จะได้

$$\int\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)\right]dx = k_1\int f_1(x)\,dx + k_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n\int f_n(x)\,dx$$

เมื่อ k_1 , k_2 ,......, k_n เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int(3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\int(3x^6 - 2x^2 + 7x + 1)\,dx = 3\int x^6dx - 2\int x^2dx + 7\int xdx + 3\int 1\,dx$$

$$= \frac{3x^7}{7} - \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + x + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

หมายเหตุ การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x)$ มาให้ สามารถทำได้ดังนี้

จาก $\frac{dy}{dx} = f(x)$

ดังนั้น $\int \frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)dx$

หรือ $y = \int f(x)dx$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 2$ จงหา y

วิธีทำ จาก $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 2$

จะได้ $y = \int(5x^4 + 3x^2 - 2x)\,dx$

$= \int 5x^4dx + \int 3x^2dx - \int 2\,dx$

$= 5\int x^4dx + 3\int x^2dx - 2\int dx$

$= \frac{5x^5}{5} + \frac{3x^3}{3} - 2x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= x^5 + x^3 - 2x + c$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการของเส้นโค้งที่ผ่านจุด (2,1) และมีความชั้นของเส้นโค้ง ที่จุด (x , y) ใด ๆ เป็น x^2

วิธีทำ เนื่องจากความชันของเส้นโค้งที่จุด (x , y) ใด ๆ คือ $\frac{dy}{dx}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = x^2$

จะได้ $y = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y = \frac{1}{3}x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

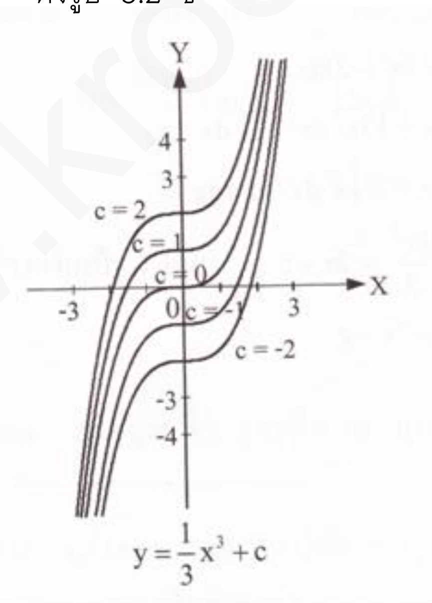
แต่เส้นโค้งนี้ผ่านจุด (2 , 1) นั่นคือ เมื่อ x = 2 จะได้ y = 1

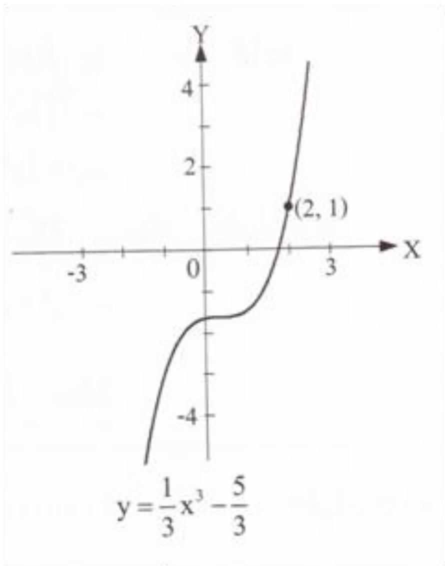
แทนค่า x และy ในสมการเส้นโค้งด้วย 2 และ 1 ตามลำดับ

จะได้ $1 = \frac{1}{3}x^3 + c$ หรือ $c = -\frac{5}{3}$

ดังนั้น สมการเส้นโค้งที่ต้องการคือ $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$

หมายเหตุ $y = \frac{1}{3}x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว คือสมการที่แสดงชุดของเส้นโค้งทั้งหลาย ดังรูป 5.2 ก และมีเพียงเส้นโค้งเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด (2 , 1) ดังรูป 5.2 ข





รูป 5.2 ก รูป 5.2 ข

ตัวอย่างที่ 10 ในขณะเวลา t ใด ๆ วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง –3t เมตร/วินาที^{2} ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุชิ้นนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที และได้ระยะทาง 3 เมตร จงหา

(1) ความเร็วของวัตถุขณะเวลา t ใด ๆ

(2) สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้

วิธีทำ (1) เนื่องจาก $\frac{dv}{dt} = -3t$

จะได้ $v = \int -3x\,dt$

$= \frac{-3t^2}{2} + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 1 เมตร/วินาที

นั่นคือ เมื่อ $t = 0$, $v = 1$

จาก $v = \frac{-3t^2}{2} + c_1$

จะได้ $1 = 0 + c_1$ หรือ $c_1 = 1$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุชิ้นนี้ขณะเวลา t ใด ๆ คือ $v = -\frac{3}{2}t^2 + 1$

(2) เนื่องจาก $v = \frac{ds}{dt}$

$= -\frac{3}{2}t^2 + 1$

จะได้ $s = \int \left(-\frac{3}{2}t^2 + 1\right)dt$

$= -\frac{t^3}{2} + t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ขณะที่เริ่มต้นจับเวลาวัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 3 เมตร

นั่นคือ เมื่อ $t = 0$, $s = 3$

จาก $s = -\frac{t^3}{2} + t + c_2$

จะได้ $3 = 0 + 0 + c_2$

$c_2 = 3$

ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้ คือ $s = -\frac{t^3}{2} + t + 3$

ตัวอย่างที่ 11 ปล่อยวัตถุชิ้นหนึ่งให้ตกจากที่สูง โดยกฎของนิวตัน แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ F กำหนดโดยสูตร F = ma เมื่อ m เป็นมวล a เป็นความเร่ง แต่แรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่คือน้ำหนักของวัตถุ (w) ซึ่งเป็นแรงที่โลกดึงดูดวัตถุ โดย w = mg เมื่อ g เป็นความเร่งที่โลกดึงดูดวัตถุและใช้หน่วยของระยะทางเป็นเมตร หน่วยของเวลาเป็นวินาที g = 9.8 เมตร/วินาที^{2} จากสูตร ma = mg จงหาระยะที่วัตถุตก (s) ในรูปของt กำหนดให้ว่าเมื่อ t = 0 จะได้ s = 0 และ v = 0

วิธีทำ จาก $ma = mg$

จะได้ $a = g$

หรือ $\frac{dv}{dt} = g$

ดังนั้น $v = \int g\,dt$

$= gt + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เมื่อ $t = 0$ จะได้ $v = 0$ ฉะนั้น $c_1 = 0$

ดังนั้น $v = gt$

จาก $v = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = gt$

และ $s = \int gt\,dt$

$= \frac{1}{2}gt^2 + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ขณะ $t = 0$ จะได้ $s = 0$ ฉะนั้น $c_2 = 0$

ดังนั้น $s = \frac{1}{2}gt^2$

$= \frac{1}{2}(9.8)t^2$

$= 4.9t^2$

ระยะที่วัตถุตก คือ $s = 4.9t^2$

แบบฝึกทักษะที่ 5.2

ผลการเรียนรู้ หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int (x^4 + 3x^2 + 5x)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

2. $\int (2x^3 + 3x^2 + 6 - 2x^{-2})dx$

....

....

....

....

....

....

....

3. $\int (x^{10} - \frac{1}{x^3})dx$

....

....

....

....

....

....

....

4. $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4})dx$

5. $\int \sqrt{x}\, dx$

6. $\int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}})dx$

7. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

8. $\int x^2(x-3)\,dx$

9. $\int \sqrt{x}(x+1)\,dx$

10. $\int \left(\frac{x-2}{x^3}\right)dx$

11. $\int (x^2 + 5x + 1)dx$

12. $\int (6\sqrt{x} + 15)dx$

13. $\int (x^3 + 5x^2 + 6)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

14. $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x} \right) dx$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

15. $\int (x^4 + 12x^3 + 6x^2 - 10)\,dx$

....

....

....

....

....

....

....

แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียน

เกณฑ์การให้คะแนน ดี ได้ 2 คะแนน
พอใช้ ได้ 1 คะแนน
ควรปรับปรุง ได้ 0 คะแนน

เกณฑ์การประเมิน การผ่านการประเมินทุกรายการต้องได้ 1 ขึ้นไป

ข้อ	รายการประเมิน	คะแนนที่ได้	สรุป		ไม่ผ่าน
			ผ่าน	ไม่ผ่าน	
1	การสนใจในการตอบคำถาม				
2	ความกระตือรือร้น				
3	การแสดงความคิดเห็น				
รวมคะแนน					

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม..
....
....
....
....
....

(ลงชื่อ) ....ผู้ประเมิน
(นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี)
ครูผู้สอน
.... / .... / ....

แบบฝึกทักษะที่ 5.3

ผลการเรียนรู้ นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. ถ้า $f'(x) = x$ และ $f(2) = 2$ แล้ว จงหา $f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อกำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ และจุดที่เส้นโค้งผ่านดังนี้

1) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2$, จุด $(2, 1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x$, จุด (0 , 5)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) $\frac{dy}{dx} = 6 + 3x^2 - 2x^4$, จุด (1 , 0)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาความเร็ว $v(t)$ และตำแหน่งของวัตถุ $s(t)$ ขณะเวลา t ใด ๆ
เมื่อกำหนดความเร่ง $a(t)$ และตำแหน่งของวัตถุเมื่อ $t = 0$ ดังนี้

1) $a(t) = 6 - 2t, \quad 0 \le t \le 3, \quad v(0) = 5, \quad s(0) = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2) $a(t) = 120t - 12t^2, \quad 0 \le t \le 10, \; v(0) = 0, \; s(0) = 4$

3) $a(t) = t^2 + 5t + 4,\ 0 \le t \le 15,\ v(0) = -2,\ s(0) = -3$

แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียน

เกณฑ์การให้คะแนน ดี ได้ 2 คะแนน
พอใช้ ได้ 1 คะแนน
ควรปรับปรุง ได้ 0 คะแนน

เกณฑ์การประเมิน การผ่านการประเมินทุกรายการต้องได้ 1 ขึ้นไป

ข้อ	รายการประเมิน	คะแนนที่ได้	สรุป		ไม่ผ่าน
			ผ่าน	ไม่ผ่าน	
1	การสนใจในการตอบคำถาม				
2	ความกระตือรือร้น				
3	การแสดงความคิดเห็น				
รวมคะแนน					

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม...
....
....
....
....
....

(ลงชื่อ) ....ผู้ประเมิน
(นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี)
ครูผู้สอน
.... / .... / ....

แบบฝึกทักษะที่ 5.4

ผลการเรียนรู้ นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. โยนวัตถุชิ้นหนึ่งขึ้นไปบนอากาศในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 98 เมตร/วินาที กำหนดให้ $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2} จงหา

(1) สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้

(2) วัตถุขึ้นไปสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด

(3) ระยะทางสูงสุดที่วัตถุขึ้นไปได้

(4) ต้องใช้เวลาเท่าใดวัตถุจึงอยู่สูง 249.9 เมตร จากจุดเริ่มต้น

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. ในขณะเวลาt ใด ๆ รถไฟขบวนหนึ่งแล่นออกจากสถานีด้วยความเร่ง $\frac{1}{4}(20 - t)$ เมตร/วินาที^{2} จนวินาทีที่ 20 หลังจากนั้นรถไฟแล่นต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิมโดยตลอด จงหาว่าหลังวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็วเท่าใดและเมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างจากสถานีต้นทางเป็นระยะเวลาเท่าใด

แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียน

เกณฑ์การให้คะแนน ดี ได้ 2 คะแนน
พอใช้ ได้ 1 คะแนน
ควรปรับปรุง ได้ 0 คะแนน

เกณฑ์การประเมิน การผ่านการประเมินทุกรายการต้องได้ 1 ขึ้นไป

ข้อ	รายการประเมิน	คะแนนที่ได้	สรุป		ไม่ผ่าน
			ผ่าน	ไม่ผ่าน	
1	การสนใจในการตอบคำถาม				
2	ความกระตือรือร้น				
3	การแสดงความคิดเห็น				
รวมคะแนน					

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม...
....
....
....
....
....

(ลงชื่อ) ....ผู้ประเมิน
(นางสาวเอื้อมพร ลาโยธี)
ครูผู้สอน
.... / .... / ....

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

คำชี้แจง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. จงหาฟังก์ชัน F เมื่อกำหนด $f(x) = 6x^2$

ก. $6x^3 + 3x + c$

ข. $2x^3 + c$

ค. $3x^2 + c$

ง. $6x$

2. จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

ก. $6x - 6$

ข. $\frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 9x + c$

ค. $x^3 - 3x^2 + 9x + c$

ง. $3x - 6$

3. กำหนดให้ $f(x) = -5$ จงหาว่า $F(x)$ ตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. -5

ค. $-5x + c$

ง. $5x + c$

4. จงหาค่าของ $\int dx$

ก. 0

ข. 1

ค. x

ง. $x + c$

5. จงหาค่าของ $\int(2x^3+3x-1)dx$

ก. $6x^2 + 3x + c$

ข. $\frac{x^4}{2}+\frac{3x^2}{2}-x+c$

ค. $4x + 3$

ง. 4

6..จงหาค่าของ $\int 3dx$

ก. 0

ข. 3

ค. $3x$

ง. $3x + c$

7. จงหาค่าของ $\int x^2(x-3)dx$

ก. $x^2 - 3x^2$

ข. $x - 3$

ค. $x^4 - x^3 + c$

ง. $\frac{x^4}{4} - x^3 + c$

8. จงหาค่าของ $\int(2x+3)dx$

ก. $x^2 + 3x + c$

ข. $2x^2 + 3$

ค. $4x$

ง. 2

9. จงหาค่าของ $\int (2x+3x^2)dx$

ก. $x^2 + x^3 + c$

ข. $\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+c$

ค. $2 + 6x$

ง. $2x^2 + 3x^4 + c$

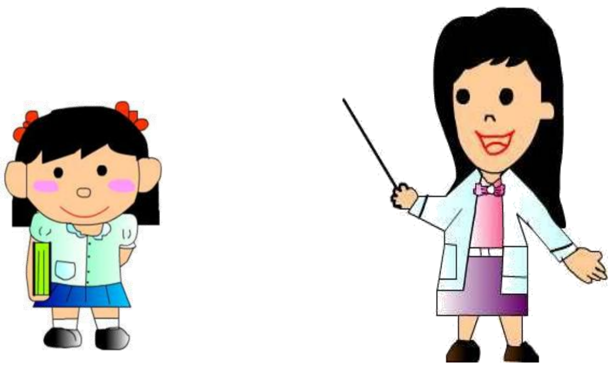
10. อนุภาคชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่จากจุดๆ หนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที อนุภาคจะมีความเร็ว $V = 4t^3 + 2t - 1$ เมตรต่อวินาที ขณะที่เริ่มต้นจับเวลา อนุภาคเคลื่อนที่ได้ทาง 4 เมตร ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ห่างจากจุดเริ่มต้นเมื่อ t = 3 วินาที คือข้อใด

ก. 113 เมตร

ข. 110 เมตร

ค. 98 เมตร

ง. 91 เมตร



ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ปฏิยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

1. ค
2. ง
3. ง
4. ก
5. ง
6. ข
7. 8
8. ก
9. ง
10. ค

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.1

ผลการเรียนรู้ หาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $f(x) = 5x$
2. $f(x) = x^3$
3. $f(x) = x\sqrt{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$
5. $f(x) = 2x + 1$
6. $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$
7. $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$
8. $f(x) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$
9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
10. $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{x^2}$

<u>เฉลย</u>

1. จาก $f(x) = 5x$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 5x$

ถ้าให้ $F(x) = \frac{5}{2}x^2$

จะได้ $F'(x) = \frac{5}{2}(2x)$

$= 5x$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 5x$ คือ

ถ้าให้ $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2. จาก $f(x) = x^3$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = x^3$

ถ้าให้ $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

จะได้ $F'(x) = \frac{1}{4}(4)x^3$

x^3

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^3$

คือ $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

3. จาก $f(x) = x\sqrt{x}$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = x\sqrt{x}$

$= x(x^{\frac{1}{2}})$

$= x^{\frac{3}{2}}$

ถ้าให้ $F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

จะได้ $F'(x) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x\sqrt{x}$

คือ $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

4. จาก $f(x) = \frac{1}{x^5}$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = \frac{1}{x^5}$

$= x^{-5}$

ถ้าให้ $F(x) = -\frac{1}{4}x^{-4}$

จะได้ $F'(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)(-4)x^{-5}$

$= x^{-5}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x^5}$

คือ $F(x) = -\frac{1}{4}x^{-4} + c$

หรือ $F(x) = -\frac{1}{4x^4} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

5. จาก $f(x) = 2x + 1$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 2x + 1$

ถ้าให้ $F(x) = x^2 + x$

จะได้ $F'(x) = 2x + 1$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x + 1$

คือ $F(x) = x^2 + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

6. จาก $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

ถ้าให้ $F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

จะได้ $F'(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

คือ $F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

7. จาก $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

$= 2x^{-2} + 3x^{-3}$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = 2x^{-2} + 3x^{-3}$

ถ้าให้ $F(x) = 2x^{-1} - \frac{3}{2}x^{-2}$

จะได้ $F'(x) = -2(-1)x^{-2} - \frac{3}{2}(-2)x^{-3}$

$= 2x^{-2} + 3x^{-3}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-3}$

คือ $F(x) = -2x^{-1} - \frac{3}{2}x^{-2} + c$

หรือ $F(x) = \frac{-2}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$

8. จาก $f(x) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$

$= -x^4 + 5x^2 - 4$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

ถ้าให้ $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x$

จะได้ $F'(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

คือ $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - 4x + c$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

9. จาก $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

$= x^{-\frac{1}{2}}$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

ถ้าให้ $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

จะได้ $F'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

คือ $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + c$

หรือ $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

10. จาก $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}$

$= \dfrac{1+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

$= \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

$= x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}$

จะหา F(x) ที่ $F'(x) = x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}$

ถ้าให้ $F(x) = -x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}$

จะได้ $F'(x) = -(-1)x^{-2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$

$= x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}$

ดังนั้น ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}}$

คือ $F(x) = -x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c$

$= \dfrac{-1}{x} - \dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}} + c$

$F(x) = \dfrac{-1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.2

ผลการเรียนรู้ หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. $\int (x^4 + 3x^2 + 5x)\, dx$

$$= \int x^4\, dx + \int 3x^2\, dx + \int 5x\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= \frac{x^5}{5} + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c$$

2. $\int (2x^3 + 3x^2 + 6 - 2x^{-2})dx$

$$= \int 2x^3\, dx - \int 3x^2\, dx + \int 6dx - \int 2x^{-2}\, dx$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 6x - 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคง

ตัว

$$= \frac{x^4}{2} - x^3 + 6x + \frac{2}{x} + c$$

3. $\int (x^{10} - \frac{1}{x^3})dx = \int x^{10}\, dx - \int \frac{1}{x^3}dx$

$$= \int x^{10}\, dx - \int x^3\, dx$$

$$= \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{-2}}{-2} + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= \frac{x^{11}}{11} + \frac{1}{2x^2} + c$$

4. $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4})dx = \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{2}{x^4})dx$

$$= \int x^{-2}\, dx - \int 2x^{-4}\, dx$$

$$= \frac{x^{-1}}{-1} + 2\left(\frac{x^{-3}}{-3}\right) + c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$$= -\frac{1}{x} - \frac{2}{3x^3} + c$$

5. $\int \sqrt{x}\,dx \quad = \quad \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}x^{1+\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

6. $\int (x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{2}{3}})dx \quad = \quad \int x^{\frac{3}{2}}\,dx - \int x^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \dfrac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \dfrac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$

7. $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}})dx \quad = \quad \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= \int x^2 dx - \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}(2)\,x^{\frac{1}{2}} + c$

$= -\frac{1}{x} - \sqrt{x} + c$

8. $\int x^2(x-3)\,dx = \int (x^3-3x^2)\,dx$

$= \int x^3dx - \int 3x^2dx$

$= \dfrac{x^{3+1}}{3+1} - 3\left(\dfrac{x^{2+1}}{2+1}\right) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \dfrac{x^4}{4} + x^3 + c$

9. $\int \sqrt{x}(x+1)\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}}dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \dfrac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$= \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

$= \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

10. $\int \left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)dx = \int \left(\dfrac{x}{x^3} - \dfrac{2}{x^3}\right)dx$

$= \int \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)dx$

$= \int (x^{-2} - 2x^{-3})dx$

$= \int x^{-2}dx - \int 2x^{-3}dx$

$= \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2\left(\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= -\dfrac{1}{x} - 2\,\dfrac{1}{2x^2} + c$

$= -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + c$

11. $\int (x^2 + 5x + 1)\,dx = \int x^2\,dx + \int 5x\,dx + \int 1dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

12. . $\int (6\sqrt{x} + 15)\,dx = \int 6\sqrt{x}\,dx + \int 15\,dx$

$= \frac{6x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 15x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \frac{2}{3}(6x^{\frac{3}{2}}) + 15x + c$

$= 4\sqrt{x^3} + 15x + c$

$= 4x\sqrt{x} + 15x + c$

13. $\int (x^3 + 5x^2 + 6)\,dx = \int (x^3 + \int 5x^2\,dx + \int 6\,dx$

$= \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} + 6x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

14. $\int \left(\frac{6}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x}\right) dx = \int (6x^{-\frac{1}{2}} + 8x^{\frac{1}{2}})dx$

$= \frac{6x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= 2(6x^{\frac{1}{2}}) + \frac{2}{3}(8x^{\frac{3}{2}}) + c$

$= 12\sqrt{x} + \frac{16}{3}\sqrt{x^3} + c$

15. $\int (x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 10)\,dx$

$= \int x^4 dx - \int 12x^3\,dz + \int 6x^2\,dx - \int 10\,dx$

$= \frac{x^5}{5} - \frac{12x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 10x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= \frac{x^5}{5} - 3x^4 + 2x^3 - 10x + c$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.3

ผลการเรียนรู้ นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. ถ้า $f'(x) = x$ และ $f(2) = 2$ แล้ว จงหา $f(x)$

จาก $f'(x) = x$

จะได้ $f(x) = \int x\,dx$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + c$

$f(2) = \frac{4}{2} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

$= 2 + c$

เนื่องจาก $f(2) = 2$

จะได้ $2 + c = 2$ จะได้ $c = 0$

ดังนั้น $f(x) = \frac{x^2}{2} + 0$

หรือ $f(x) = \frac{x^2}{2}$

2. จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ เมื่อกำหนดความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x , y) ใด ๆ และจุดที่เส้นโค้งผ่านดังนี้

1. จาก $\frac{dy}{dx} = x^2 - 3x + 2$

$y = \int (x^2 - 3x + 2)\,dx$

$= \int x^2 dx - \int 3x\,dx + \int 2\,dx$

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เส้นตรงสัมผัสโค้งที่จุด $(2 ,1)$

แทนค่า $x = 2$, $y = 1$ ในสมการ

จะได้ 1 $= \frac{2^3}{3} - \frac{3(2^2)}{2} + 2(2) + c$

$1 = \frac{8}{3} - 3\left(\frac{4}{2}\right) + 2(2) + c$

$= \frac{8}{3} - 6 + 4 + c$

$1 - \frac{8}{3} + 2 = c$

จะได้ $c = \frac{1}{3}$

ดังนั้น สมการเส้นโค้ง คือ $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{3}$

2\. จาก $\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x$

$y = \int (2x^3 + 4x)\,dx$

$= \int 2x^3 dx + \int 4x\,dx$

$y = 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + 4\left(\frac{x^2}{2}\right) + c$

$= \frac{x^4}{2} + 2x^2 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เส้นตรงสัมผัสโค้งที่จุด (0 ,5)

แทนค่า $x = 0$, $y = 5$ ในสมการ

จะได้ $5 = \frac{0^4}{2} + 2(0^2) + c$

$c = 5$

ดังนั้นสมการเส้นโค้ง คือ $y = \frac{x^4}{2} + 2x^2 + 5$

3\. จาก $\frac{dy}{dx} = 6 + 3x^2 - 2x^4$

$y = \int (6 + 3x^2 - 2x^4)\,dx$

$= \int 6dx + \int 3x^2 dx - \int 2x^4 dx$

$y = 6x + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เส้นตรงสัมผัสโค้งที่จุด (1 ,0)

แทนค่า $x = 1$, $y = 0$ ในสมการ

จะได้ $0 = 6(1) + \frac{3(1^3)}{3} + \frac{2(1^5)}{5} + c$

$0 = 6 + 1 - \frac{2}{5} + c$

$c = -\frac{33}{5}$

ดังนั้น จะได้สมการเส้นโค้ง คือ $y = 6x + x^3 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{33}{5}$

3. จงหาความเร็ว $v(t)$ และตำแหน่งของวัตถุ $s(t)$ ขณะเวลา t ใด ๆ เมื่อกำหนดความเร่ง $a(t)$ และตำแหน่งของวัตถุเมื่อ $t = 0$ ดังนี้

1. $a(t) = 6 - 2t, \quad 0 \le t \le 3, \quad v(0) = 5, \quad s(0) = 0$
2. $a(t) = 120t - 12t^2, \quad 0 \le t \le 10, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = 4$
3. $a(t) = t^2 + 5t + 4, \quad 0 \le t \le 15, \quad v(0) = -2, \quad s(0) = -3$

1. จาก $a(t) = 6 - 2t, \quad 0 \le t \le 3$

เนื่องจาก $a(t) = \frac{dv}{dt}$

จะได้ $\frac{dv}{dt} = 6 - 2t$

$v = \int (6 - 2t)\,dt$

$= 6t - 2\frac{t^2}{2} + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $v(t) = 6t - t^2 + c_1$

จะได้ $v(0) = 6(0) - 0^2 + c_1$

เนื่องจาก $v(0) = 5$

จะได้ $5 = 6(0) - 0^2 + c_1$ จะได้ $c_1 = 5$

ดังนั้น $v(t) = 6t - t^2 + 5$

เนื่องจาก $v(t) = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = 6t - t^2 + 5$

$s = \int (6t - t^2 + 5)\,dt$

$= 6\left(\frac{t^2}{2}\right) - \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

$s = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$

ดังนั้น $s(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + 5t + c_2$

จะได้ $s(0) = 3(0)^2 - \frac{0^3}{3} + 5(0) + c_2$

เนื่องจาก $s(0) = 0$

จะได้ $0 = 3(0)^2 - \frac{0^3}{3} + 5(0) + c_2$

$c_2 = 0$

ดังนั้น $s(t) = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + 5t$

2. จาก $a(t) = 120t - 12t^2 , \; 0 \le t \le 10$

เนื่องจาก $a(t) = \frac{dv}{dt}$

จะได้ $\frac{dv}{dt} = 120t - 12t^2$

$v = \int (120t - 12t^2)\, dt$

$= 120 \frac{t^2}{2} - 12\left(\frac{t^3}{3}\right) + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $v(t) = 60t^2 - 4t^3 + c_1$

จะได้ $v(0) = 60(0^2) - 4(0^3) + c_1$

เนื่องจาก $v(0) = 0$

จะได้ $0 = 60(0^2) - 4(0^3) + c_1$

$c_1 = 0$

ดังนั้น $v(t) = 60t^2 - 4t^3$

เนื่องจาก $v(t) = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = 60t^2 - 4t^3$

$s = \int (60t^2 - 4t^3)\, dt$

$= 60\left(\frac{t^3}{3}\right) - 4\left(\frac{t^4}{4}\right) + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $s(t) = 20t^3 - t^4 + c_2$

จะได้ $s(0) = 20(0^3) - 0^4 + c_2$

เนื่องจาก $s(0) = 4$

จะได้ $4 = 20(0^3) - 0^4 + c_2$

$c_2 = 4$

ดังนั้น $s(t) = 20t^3 - t^4 + 4$

3. จาก $a(t) = t^2 + 5t + 4 \,,0 \le t \le 15$

เนื่องจาก $a(t) = \frac{dv}{dt}$

จะได้ $\frac{dv}{dt} = t^2 + 5t + 4$

$v = \int (t^2 + 5t + 4)\, dt$

$= \frac{t^3}{3} + 5\left(\frac{t^2}{2}\right) + 4t + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5}{2}t^2 + 4t + c_1$

จะได้ $v(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{5}{2}(0^2) + 4(0) + c_1$

เนื่องจาก $v(0) = -2$

จะได้ $-2 = \frac{0^3}{3} + \frac{5}{2}(0^2) + 4(0) + c_1$

$c_1 = -2$

ดังนั้น $v(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{5}{2}t^2 + 4t - 2$

เนื่องจาก $v(t) = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = \frac{t^3}{3} + \frac{5}{2}t^2 + 4t - 2$

$s = \int (\frac{t^3}{3} + \frac{5}{2}t^2 + 4t - 2)\, dt$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right) + 4\left(\frac{t^2}{2}\right) - 2t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{5t^3}{6} + 2t^2 - 2t + c_2$

จะได้ $s(0) = \frac{0^4}{12} + \frac{5(0)^3}{6} + 2(0^2) - 2(0) + c_2$

เนื่องจาก $s(0) = -3$

จะได้ $-3 = \frac{0^4}{12} + \frac{5(0)^3}{6} + 2(0^2) - 2(0) + c_2$

$c_2 = -3$

ดังนั้น $s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{5t^3}{6} + 2t^2 - 2t - 3$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 5.4

ผลการเรียนรู้ นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ได้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมแสดงวิธีทำ

1. โยนวัตถุชิ้นหนึ่งขึ้นไปบนอากาศในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 98 เมตร/วินาที กำหนดให้ $g = 9.8$ เมตร/วินาที^{2} จงหา
   1. สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้
   2. วัตถุขึ้นไปสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปนานเท่าใด
   3. ระยะทางสูงสุดที่วัตถุขึ้นไปได้
   4. ต้องใช้เวลาเท่าใดวัตถุจึงอยู่สูง 249.9 เมตร จากจุดเริ่มต้น

1. เนื่องจาก $g = 9.8$

g เป็นความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก จึงสามารถเขียน a แทน g ได้การโยนวัตถุขึ้นไปบนอากาศ

จะได้ $a = -9.8$

เนื่องจาก $a = \dfrac{dv}{dt}$

จะได้ $\dfrac{dv}{dt} = -9.8$

$v = \int -9.8\ dt$

$= -9.8t + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก $t = 0$, $v = 98$

จะได้ $98 = 0 + c_1$

$c_1 = 98$

ดังนั้น $v = -9.8t + 98$

เนื่องจาก $v = \dfrac{ds}{dt}$

จะได้ $\dfrac{ds}{dt} = -9.8t + 98$

$s = \int (-9.8t + 98)\, dt$

$= -\dfrac{9.8t^2}{2} + 98t + c_2$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $s = -4.9t^2 + 98t + c_2$

เมื่อ $t = 0$, $s = 0$

$0 = 0 + 0 + c$

$c_2 = 0$

ดังนั้น $s = -4.9t^2 + 98t$

2. จาก $v = -9.8t + 98$

ตำแหน่งที่วัตถุขึ้นไปสูงสุดจะได้ $v = 0$

จะได้ $0 = -9.8t + 98$

$t = 10$

ดังนั้น วัตถุขึ้นไปสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป 10 วินาที

3. เนื่องจาก $s = -4.9t^2 + 98t$

ถ้า $t = 10$

จะได้ $s = -4.9(10)^2 + 98(10)$

$= -490 + 980$

$= 490$

ดังนั้น ระยะทางสูงสุดที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ เท่ากับ 490 เมตร

4. จาก $s = -4.9t^2 + 98t$

ถ้า $s = 249.9$

จะได้ $249.9 = -4.9t^2 + 98t$

$4.9t^2 + 98t + 249.9 = 0$

ใช้ 4.9 หารทั้งสองข้าง

$t^2 - 20t + 51 = 0$

$(t - 17)(t - 3) = 0$

$t = 17$ หรือ 3

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที และ 17 วินาที วัตถุอยู่สูงจากจุดเริ่มต้น 249.9 เมตร

2. ในขณะเวลา t ใด ๆ รถไฟขบวนหนึ่งแล่นออกจากสถานีด้วยความเร่ง $\frac{1}{4}(20-t)$ เมตร/วินาที^{2} จนวินาทีที่ 20 หลังจากนั้นรถไฟแล่นต่อไปด้วยความเร็วเท่าเดิมโดยตลอด จงหาว่าหลังวินาทีที่ 20 รถไฟแล่นด้วยความเร็วเท่าใดและเมื่อเวลาผ่านไป 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างจากสถานีต้นทางเป็นระยะเวลาเท่าใด

จาก $a = \frac{1}{4}(20-t)$

และ $a = \frac{dv}{dt}$

จะได้ $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}(20-t)$

$v = \int \frac{1}{4}(20 - t)\,dt$

$= \int\left(5-\frac{1}{4}t\right)dt$

$v = 5t - \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}\right) + c_1$

$= 5t - \frac{t^2}{8} + c_1$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัว

เมื่อ $t = 0$, $v = 0$

จะได้ $0 = 5(0) - \frac{0^2}{8} + c_1$ จะได้ $c_1 = 0$

$v = 5t - \frac{t^2}{8}$

ถ้า $t = 20$

จะได้ $v = 5(20) - \frac{20^2}{8}$

$= 100 - 50$

$= 50$

ดังนั้น วินาทีที่ 20 รถไฟกำลังแล่นด้วยความเร็ว 50 เมตร/วินาที

จาก $v = 5t - \frac{t^2}{8}$

$v = \frac{ds}{dt}$

จะได้ $\frac{ds}{dt} = 5t - \frac{t^2}{8}$

$$s = \int \left(5t - \frac{t^2}{8}\right) dt$$

$$= \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{24} + c_2$$ เมื่อ c_2 เป็นค่าคงตัว

เมื่อ $t = 0$, $s = 0$

$$0 = \frac{5(0^2)}{2} - \frac{0^3}{24} + c_2$$ จะได้ $c_2 = 0$

ดังนั้น $s = \frac{5t^2}{2} - \frac{t^3}{24}$

ถ้า $t = 20$, $s = \frac{5(20^2)}{2} - \frac{20^3}{24} = 666\frac{2}{3}$

จากความเร็ว 50 เมตร/วินาที ถ้า 10 วินาทีได้ทาง 500 เมตร

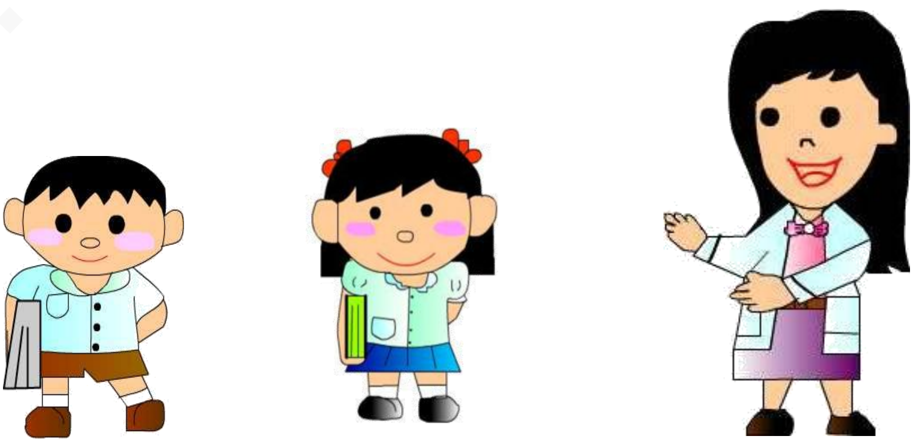
ดังนั้น หลังจากออกวิ่งจากสถานี 30 วินาที รถไฟจะอยู่ห่างจากสถานี

เป็นระยะทาง $666\frac{2}{3} + 500 = 1,166\frac{2}{3}$ เมตร

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงและการประยุกต์ของอนุพันธ์

1. ข
2. ค
3. ค
4. ง
5. ข
6. ง
7. ง
8. ก
9. ก
10. ง



บรรณานุกรม

กนกวลี อุษณกรกุล และคณะ. **คณิตศาสตร์ O-Net & Pre O-Net ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – ม.6)**. กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด, 2537.

กวิยา เนาวประทีป. **เทคนิคการเรียนคณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น**. นครปฐม : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2547.

กระทรวงศึกษาธิการ. **หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์วัฒนาพานิช, 2551.

คมกฤช จันทร์ขจร และคณะ. **กรอบมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย**. กรุงเทพมหานคร : บรรณกิจ จำกัด, 2553.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และคณะ. **คู่มือเตรียมสอบ ม.4 – 5 – 6.** กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์ จำกัด, 2551.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด, 2551.

ธนวัฒน์(สันติ) สนทราพรพล. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6.** นนทบุรี : สำนักพิมพ์ธรรมบัณฑิต จำกัด, 2552.

สมัย เหล่าวานิชย์ และคณะ. **คณิตศาสตร์พื้นฐาน + เพิ่มเติม** 6. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิสชิ่ง จำกัด, 2537.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.** กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว, 2554.