

ชุดการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชุดที่ 1

ความรู้เบื้องต้น เกี่ยวกับกราฟ



โดย

นางขจรรัตน์ เกษรสิทธิ์

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์

สำนักงานเขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร



คำนำ

การจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นหัวใจสำคัญของครูผู้สอนที่จะถ่ายทอดความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เพื่อส่งเสริมความรู้ความสามารถในการเรียนรู้ของนักเรียนตามศักยภาพให้ได้มากที่สุด ซึ่งการส่งเสริมการเรียนรู้ให้กับนักเรียนเป็นการจัดการกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ครูสามารถออกแบบการจัดการเรียนในลักษณะต่างๆ ได้อย่างหลากหลายเพื่อให้ นักเรียนได้รับความรู้อย่างคงทน ผักทักษะทางการคิด ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และการนำเอาความรู้มาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์สูงสุด

ชุดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดทำขึ้นเพื่อเป็นสื่อประกอบกิจกรรมการเรียนรู้รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 รหัสวิชา ค 30204 ซึ่งนักเรียนจะได้ฝึกทำกิจกรรมในรูปแบบที่เป็นขั้นตอน โดยเรียงลำดับเนื้อหาจากง่ายไปยากและนำไปสู่สถานการณ์ปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวันซึ่งจะช่วยเสริมสร้างให้นักเรียนเกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญคือทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เนื่องจากการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะและกระบวนการที่นักเรียนควรจะเรียนรู้ ฝึกฝนทักษะ และพัฒนาให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียนเพราะการที่นักเรียนเห็นทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์จะส่งเสริมให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ของเนื้อหาต่างๆ ในคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อลึกซึ้งและคงทนขึ้น ตลอดจนช่วยให้นักเรียนเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีคุณค่าและสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวันได้จริง โดยมีครูเป็นผู้ให้คำแนะนำและอำนวยความสะดวก ตลอดจนติดตามผลการเรียนจากการศึกษาชุดการเรียนรู้ของนักเรียนอย่างใกล้ชิด

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณท่านผู้อำนวยการสถานศึกษาโรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์ ผู้เชี่ยวชาญและคณะครูทุกท่านที่ให้คำแนะนำจนชุดการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นที่เน้นทักษะการเชื่อมโยงสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี หวังเป็นอย่างยิ่งว่าชุดการเรียนรู้ชุดนี้จะส่งผลให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องทฤษฎีกราฟ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องหรือนำความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟมาเชื่อมโยงใช้ในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างถูกต้องและรักที่จะเรียนรู้ในวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

ขจรรัตน์ เกษรสิทธิ์

ครู วิทยฐานะครูชำนาญการ



สารบัญ

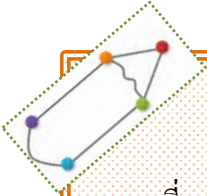
	หน้า
คำแนะนำการใช้	1
จุดประสงค์การเรียนรู้	2
เวลาที่ใช้	2
แบบทดสอบก่อนเรียน	3
ใบความรู้ที่ 1.1 จุดเริ่มต้นของกราฟ	7
กิจกรรมที่ 1.1 สำรวจเส้นทาง	8
ใบความรู้ที่ 1.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ	11
กิจกรรมที่ 1.2 เขียนเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ จากกราฟ G	16
ใบความรู้ที่ 1.3 เขียนกราฟจากเซตของจุดยอด $V(G)$ และ เซตของเส้นเชื่อม $E(G)$	17
กิจกรรมที่ 1.3 มาเขียนกราฟกันเถอะ	21
แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.1	24
ใบความรู้ที่ 1.4 จุดยอดประชิด (Adjacent vertices) และ เกิดกับ (Incident)	27
กิจกรรมที่ 1.4 จุดยอดประชิด (Adjacent vertices) และเกิดกับ (Incident) ของกราฟ G	29
ใบความรู้ที่ 1.5 เส้นเชื่อมขนาน (Parallel Edges) และวงวน (Loop)	31
กิจกรรมที่ 1.5 ตามหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop)	33
ใบความรู้ที่ 1.6 กราฟเชิงเดียว (Simple graph) และกราฟหลายเชิง (Multi graph)	35
กิจกรรมที่ 1.6 กราฟเชิงเดียว (simple graph) และกราฟหลายเชิง (multi graph)	39
แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.2	41
ใบความรู้ที่ 1.7 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนปัญหาโดยใช้กราฟ	44
กิจกรรมที่ 1.7 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์ปัญหา	48
ใบความรู้ที่ 1.8 การนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟมาแก้ปัญหา	
บางปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวันบางปัญหา	50
กิจกรรมที่ 1.8 ปัญหาการจับคู่เด่นรำ และ ปัญหาการจัดชุมนุม	59
กิจกรรมที่ 1.9 ปัญหาการแบ่งงานทำตามความถนัดของสมาชิกในกลุ่ม	61



แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.3	62
แบบทดสอบหลังเรียน	71
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	75
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	76
เฉลยกิจกรรมและแบบฝึกเสริมทักษะ	77
บรรณานุกรม	101

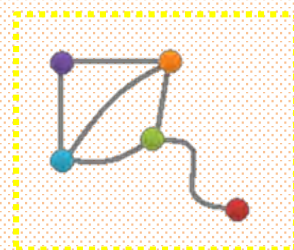
คำแนะนำในการใช้

ชุดการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง



ชุดการเรียนรู้ เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ ที่นักเรียนจะได้ศึกษาต่อไปนี้ใช้เป็นสื่อประกอบการเรียนของนักเรียนและนักเรียนสามารถศึกษา ปฏิบัติกิจกรรมต่างๆ ได้ด้วยตนเอง ซึ่งนักเรียนต้องศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ ระยะเวลาที่ใช้ในการทำชุดการเรียนรู้และเนื้อหาในชุดการเรียนรู้ให้เข้าใจเพื่อเป็นแนวทางการศึกษา และปฏิบัติกิจกรรมที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ดังนี้

1. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดการเรียนรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ จำนวน 10 ข้อ
2. นักเรียนแบ่งกลุ่มออกเป็น 8 กลุ่ม กลุ่มละ 5 คน โดยผลความสามารถของสมาชิกในกลุ่มดังนี้ นักเรียนเก่ง 1 คน ปานกลาง 2 คน และอ่อน 2 คน โดยการแบ่งกลุ่มจะใช้คะแนนของนักเรียนที่ได้จากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากบทเรียนในหน่วยก่อนหน้านี
3. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ ใ้ความรู้ และตัวอย่างในชุดการเรียนรู้ อย่างละเอียดรอบคอบและเป็นลำดับขั้นตอน
4. นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมแต่ละกิจกรรมที่กำหนดให้อย่างเต็มความสามารถโดยสมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือซึ่งกันและกัน หากนักเรียนมีข้อสงสัยในข้อคำถามสามารถซักถามครูได้
5. นักเรียนทำแบบฝึกเสริมทักษะด้วยตนเอง
6. เมื่อศึกษาชุดการเรียนรู้ชุดที่ 1 เสร็จเรียบร้อยแล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนเป็นรายบุคคล เพื่อตรวจสอบความรู้ความเข้าใจและทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และเปรียบเทียบความก้าวหน้าทางการเรียน
7. นักเรียนแต่ละคนต้องมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูเฉลยขณะปฏิบัติกิจกรรมหรือขณะทำแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน



จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อศึกษาชุดการเรียนรู้ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ จบแล้วนักเรียนจะมีความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์รวมทั้งคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ดังนี้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. หาเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟที่กำหนดให้ได้
2. เขียนกราฟ G เมื่อกำหนดเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้ได้
3. หาจุดยอดประชิดและเส้นเชื่อมเกิดกับจุดยอดในกราฟที่กำหนดให้ได้
4. หาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) ได้
5. บอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือกราฟหลายเชิง (multi graph)
6. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟแทนสถานการณ์ต่างๆได้
7. แก้ปัญหาบางปัญหาโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้

ด้านทักษะและกระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การเชื่อมโยง
2. การสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอข้อมูล
3. การแก้ปัญหา

ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ : นักเรียนเป็นผู้ที่

1. มีความซื่อสัตย์
2. มีวินัย
3. ใฝ่เรียนรู้

เวลาที่ใช้ 5 ชั่วโมง

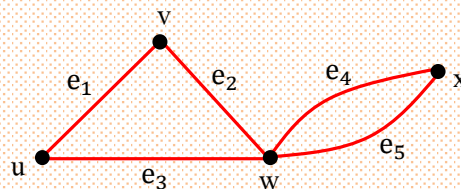
แบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย เลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ เวลา 10 นาที
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย × ลงบนคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. คำว่า “กราฟ” ในทฤษฎีกราฟเบื้องต้นหมายถึงสิ่งใดต่อไปนี้
 - ก. เซตของจุดยอดและเซตของคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่เซตว่าง
 - ข. เซตของมุมและเซตของด้านของรูปเหลี่ยม
 - ค. เซตของจุดยอดที่ไม่เป็นเซตว่างและเซตของเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด
 - ง. เซตของด้านต่างๆของรูปหลายเหลี่ยมและเซตของจำนวนต่างๆ ที่บอกความยาวของด้านต่างๆ

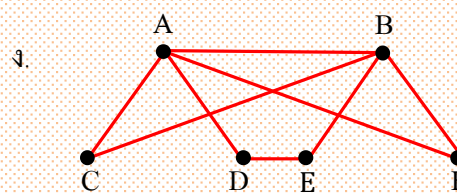
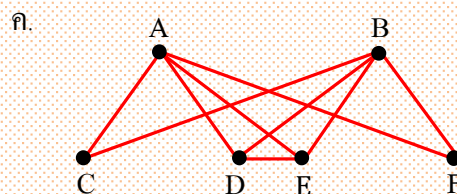
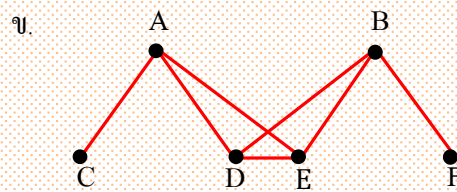
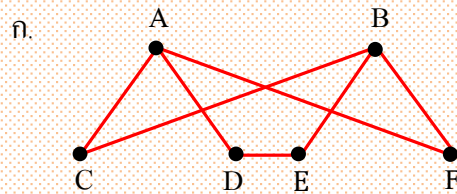
2. กำหนด G เป็นกราฟ ดังรูป



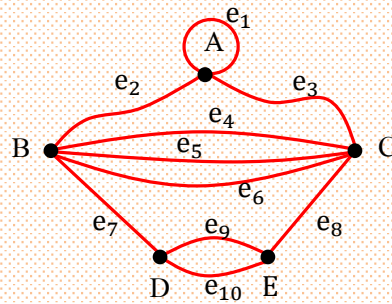
- ก. $V(G) = \{u, v, w, x\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- ข. $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- ค. $V(G) = \{u, v, w, x\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- ง. $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$



3. กำหนดเซตของจุดยอด $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{AC, AD, AF, BC, BE, BF, DE\}$ ข้อใดเป็นกราฟ G ที่เกิดจาก $V(G)$ และ $E(G)$

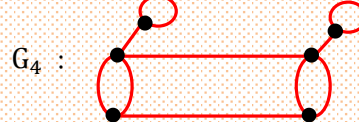
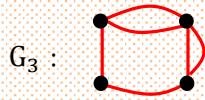
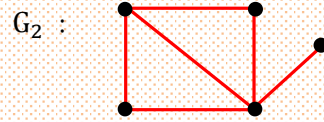
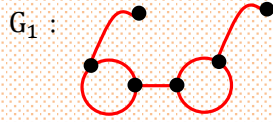


ใช้กราฟต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 4 – 7



4. วาดตรงกับข้อใด
 - ก. e_9
 - ข. e_7
 - ค. e_4
 - ง. e_1
5. เส้นเชื่อมใดต่อไปนี้ ไม่ใช่ เส้นเชื่อมขนาน
 - ก. e_2 และ e_3
 - ข. e_4 และ e_5
 - ค. e_5 และ e_6
 - ง. e_9 และ e_{10}
6. ข้อใดเป็นจุดยอดประชิด
 - ก. จุดยอด A และจุดยอด E
 - ข. จุดยอด D และจุดยอด E
 - ค. จุดยอด C และจุดยอด D
 - ง. จุดยอด B และจุดยอด E
7. เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A
 - ก. e_1
 - ข. e_4
 - ค. e_5
 - ง. e_7

8. กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังรูป ข้อใดกล่าวถูกต้อง



- ก. G_1 ไม่ใช่กราฟอย่างง่าย เพราะ มีวงวน
- ข. G_2 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีจุดยอดหลายจุด
- ค. G_3 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวน
- ง. G_4 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

9. การแข่งขันแบดมินตัน มีผู้สมัคร 6 คน โดยการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมด คณะกรรมการแข่งขันต้องการทราบว่าต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่ ให้พิจารณาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ ดังต่อไปนี้

1) ให้จุดกลุ่มที่ 1 แทน ผู้สมัครแข่งขัน

จุดกลุ่มที่ 2 แทน คู่แข่งขันของผู้สมัคร

2) ให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดๆ แทน การแข่งขันของผู้สมัครแข่งขันและคู่แข่งขัน

ข้อความข้างต้นข้อใดถูกต้อง

- ก. ข้อ 1) และ ข้อ 2) ถูก
- ข. ข้อ 1) ถูก และ ข้อ 2) ผิด
- ค. ข้อ 1) ผิด และ ข้อ 2) ถูก
- ง. ข้อ 1) และ ข้อ 2) ผิด

10. จากการแข่งขันแบดมินตันในข้อ 9. คณะกรรมการต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่

- ก. 10 คู่
- ข. 15 คู่
- ค. 20 คู่
- ง. 25 คู่



ใบความรู้ที่ 1.1 จุดเริ่มต้นของกราฟ

ทฤษฎีกราฟเริ่มต้นมาจากปัญหาหนึ่งที่มีชื่อเสียงมากในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 18 เรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาสะพานเคอนิกส์เบิร์ก (Königsberg Bridge Problem)** โดยปัญหานี้กล่าวถึงสะพาน 7 สะพานในเมืองเคอนิกส์เบิร์ก เมืองหลวงของอาณาจักรปรัสเซียตะวันออก ปัจจุบันคือเมืองคาลินินกราด (Kaliningrad) สหพันธรัฐรัสเซีย ซึ่งเป็นสะพานเชื่อมระหว่างเกาะเนียฟฮอฟ (Kneiphof island) กลางแม่น้ำพรีเกิล (Pregel river) และแผ่นดิน ดังรูป



ภาพวาดจำลองเมืองเคอนิกส์เบิร์ก วาดโดยนางสาวธนพร เกตุอภัย นักเรียนชั้น ม.5/2 โรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์

ชาวเมืองต่างพากันสงสัยว่า “ เป็นไปได้หรือไม่เมื่อเริ่มต้น ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วเดินข้ามสะพานทั้งเจ็ดสะพาน โดยผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นได้ ”

ปัญหาชวนคิด

นักเรียนคิดว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินข้ามสะพานเคอนิกส์เบิร์ก โดยที่เริ่มต้น ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วเดินข้ามสะพานทุกสะพานเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาอยู่ตำแหน่งเดิม
ให้นักเรียนสำรวจเส้นทางเพื่อหาคำตอบของปัญหานี้จากกิจกรรมที่ 1.1 สำรวจเส้นทาง

กิจกรรมที่ 1.1 สำรวจเส้นทาง

คำชี้แจง ให้นักเรียนสำรวจเส้นทางการเดินทางข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์ก ทั้ง 7 สะพานโดยเดินผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้นและกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้หรือไม่



ภาพวาดจำลองเมืองคอนิกส์เบิร์ก วาดโดยนางสาวชนพร เกตุอกัย นักเรียนชั้น ม.5/2 โรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์

สรุปผล จากการสำรวจเส้นทางการเดินทางข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์กที่นักเรียนได้สำรวจในกิจกรรม 1.1 คือ

.....

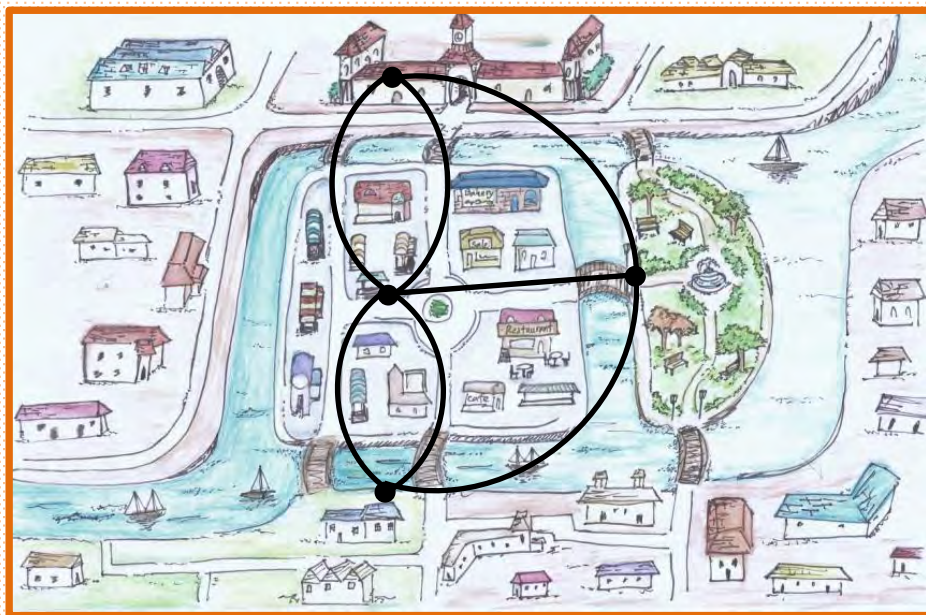
.....

.....

.....

ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก โดยการสำรวจที่เกิดขึ้น เกิดมาจากการทดลองเดินตามเส้นทางและให้ผ่านสะพานทั้ง 7 เพื่อกลับมายังจุดเริ่มต้น หากเป็นสถานการณ์หรือสถานที่จริงในการเดินสำรวจเป็นไปได้ยากแต่การจำลองสะพานคอนิกส์เบิร์กมาเป็นภาพวาดดังกล่าวที่ 1.1 แล้วลองลากเส้นทางการเดินสามารถทำให้การสำรวจสะดวกขึ้น ซึ่งผลที่ได้จากการสำรวจปรากฏว่าไม่สามารถเดินข้ามสะพานคอนิกส์เบิร์กทั้ง 7 สะพาน โดยเดินผ่านแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวและกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้ และปัญหานี้มีนักคณิตศาสตร์หลายคนได้พยายามแก้ปัญหาโดยการทดลองจนได้คำตอบว่าเป็นไปไม่ได้แต่ไม่มีใครสามารถแสดงข้อพิสูจน์ได้ จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 นักคณิตศาสตร์สวิสเซอร์แลนด์ชื่อ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้ไขปริศนานี้โดยการจำลองปัญหาด้วยการใช้ จุด แทน เกาะหรือแผ่นดินและใช้เส้นเชื่อม แทน สะพาน ซึ่งเชื่อมระหว่างเกาะกับเกาะหรือเกาะกับแผ่นดิน

ดังนั้น แบบจำลองที่แทนปัญหานี้สามารถเขียนได้ ดังรูป



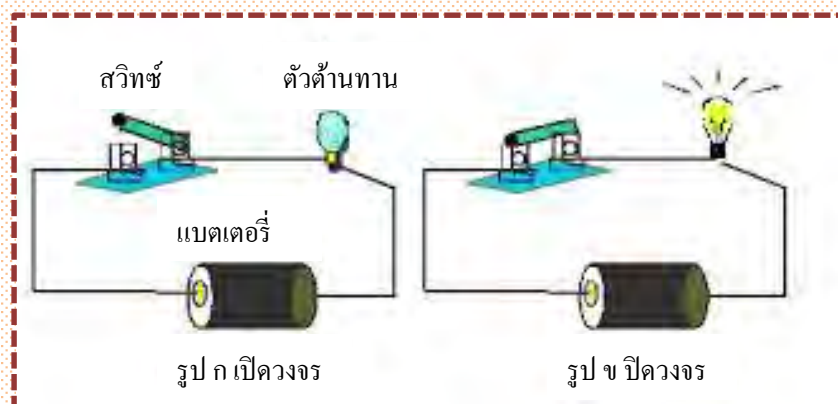
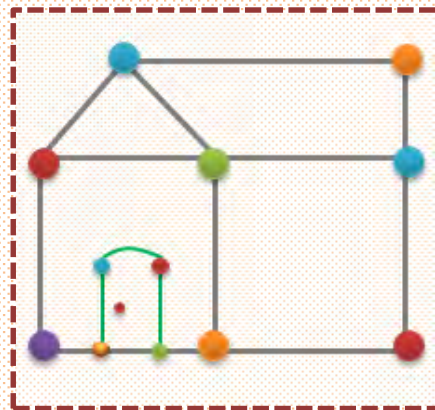
ภาพวาดจำลองเมืองคอนิกส์เบิร์ก วาดโดยนางสาวธนพร เกตุอภัย นักเรียนชั้น ม.5/2 โรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์

เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้ใช้แบบจำลองแทนปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก จนเขาสามารถให้คำตอบของปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์กและอธิบายเหตุผลว่าเป็นไปไม่ได้

เราเรียกแผนภาพที่สร้างเป็นแบบจำลองของปัญหาโดยใช้จุดและเส้นเชื่อมว่า “กราฟ” เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) ได้ศึกษาแบบจำลองดังกล่าว จนเกิดผลงานต่างๆ ขึ้นมากมาย ซึ่งทำให้เกิดจุดเริ่มต้นของคณิตศาสตร์สาขาใหม่อีกสาขาหนึ่งที่เรียกว่า **ทฤษฎีกราฟหรือ**

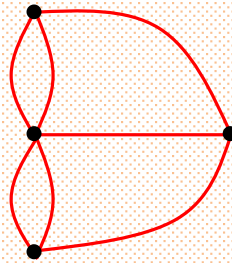
วิทยาศาสตร์ หลังจากนั้นก็ได้มีนักคณิตศาสตร์อื่นๆ ทำการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟเพิ่มเติม จนสามารถนำความรู้ดังกล่าวไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้มากมาย

ดังนั้น **กราฟ (Graph)** จึงมีความสำคัญในการแก้ปัญหาต่างๆ โดยการจำลองปัญหาบางอย่างด้วยแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุด เช่น แผนภาพที่แสดงเส้นทางการเดินรถไฟ BTS แผนภาพแสดงถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆ วงจรไฟฟ้า แผนภาพแสดงการเชื่อมต่อของจังหวัดต่างๆ ในประเทศไทย เป็นต้น และการศึกษาถึงสมบัติต่างๆ ในทฤษฎีกราฟมีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์แขนงอื่นๆ เช่น วิทยาศาสตร์ สังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น ซึ่งนักเรียนจะได้ศึกษาต่อไป



ใบความรู้ที่ 1.2 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

ก่อนที่นักเรียนจะนำทฤษฎีกราฟไปใช้ประโยชน์ได้นั้น จะต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับความรู้เบื้องต้นของกราฟที่จะกล่าวต่อไปนี้ก่อน



แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สะพานคอนิกส์เบิร์ก

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สะพานคอนิกส์เบิร์ก

เรียกแผนภาพซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้นที่เกิดขึ้นว่า “กราฟ” โดยที่จุดภายในกราฟเรียกว่า จุดยอด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุด เรียกว่า เส้นเชื่อม

“กราฟ” ในทฤษฎีกราฟไม่ได้หมายถึงกราฟของความสัมพันธ์หรือกราฟของฟังก์ชัน แต่ “กราฟ” ในที่นี้เป็นแผนภาพที่ประกอบไปด้วยจุดยอดและเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดสองจุด ในเชิงคณิตศาสตร์ “กราฟ” มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

กราฟ G ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

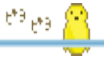
1. เซตของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ $V(G)$
ถ้า u เป็นสมาชิกใน $V(G)$ เรียก u ว่าจุดยอด
2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G)$

หมายเหตุ

1. $V(G) \neq \emptyset$ แต่ $E(G)$ อาจเป็นเซตว่างได้

2. ถ้าเส้นเชื่อมเส้นหนึ่งมีจุดปลายด้านหนึ่งคือจุดยอด u และจุดปลายอีกด้านหนึ่ง

คือ จุดยอด v เขียนเชื่อมเส้นนี้ด้วย uv หรือ vu

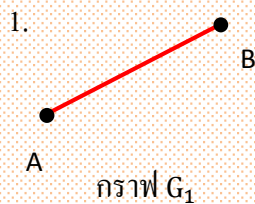


เพื่อให้เกิดความเข้าใจในบทนิยามและการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องเซตกับการนำไปใช้ในการหา $V(G)$ และ $E(G)$ ของกราฟ G ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 1 ถึงตัวอย่างที่ 5 เมื่อกำหนดกราฟ G มาให้ ประกอบการศึกษาดังนี้

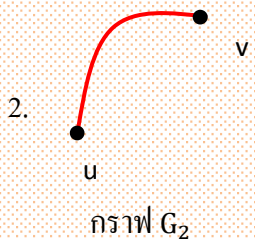


ตัวอย่างที่ 1

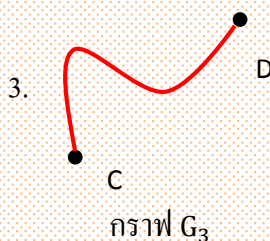
จงพิจารณากราฟ G_1, G_2 และ G_3 ต่อไปนี้



จากกราฟ G_1 เส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอด A และจุดยอด B คือ เส้นเชื่อม AB หรือ BA



จากกราฟ G_2 เส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v คือ เส้นเชื่อม uv หรือ vu



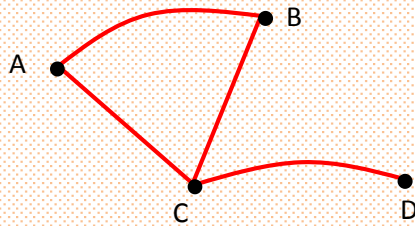
จากกราฟ G_3 เส้นเชื่อมที่เชื่อมระหว่างจุดยอด C และจุดยอด D คือ เส้นเชื่อม CD หรือ DC





ตัวอย่างที่ 2

กำหนดกราฟ G ดังต่อไปนี้



จงหา เซตของจุดยอด $V(G)$ และ เซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟ G

วิธีทำ จากกราฟ G ที่กำหนดให้จะได้ว่า

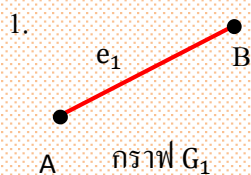
เซตของจุดยอด $V(G) = \{A, B, C, D\}$

เซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{AB, BC, AC, CD\}$

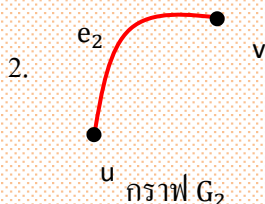


ตัวอย่างที่ 3

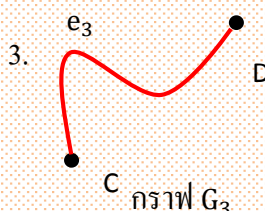
จากกราฟ G_1, G_2 และ G_3 ในตัวอย่างที่ 1 สามารถเขียนสัญลักษณ์แทนเส้นเชื่อมได้ดังนี้



จากกราฟ G_1 สามารถเขียนเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ได้ดังต่อไปนี้
 $E(G) = \{AB\}$ หรือ $E(G) = \{BA\}$ หรือ $E(G) = \{e_1\}$

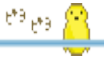


จากกราฟ G_2 สามารถเขียนเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ได้ดังต่อไปนี้
 $E(G) = \{uv\}$ หรือ $E(G) = \{vu\}$ หรือ $E(G) = \{e_2\}$



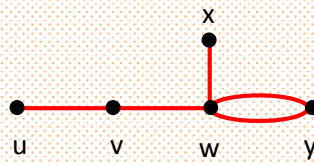
จากกราฟ G_3 สามารถเขียนเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ได้ดังต่อไปนี้
 $E(G) = \{CD\}$ หรือ $E(G) = \{DC\}$ หรือ $E(G) = \{e_3\}$





ตัวอย่างที่ 4

กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จงหา เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟ G

วิธีทำ เนื่องจากกราฟ G มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด w และจุดยอด y สองเส้น เพื่อความสะดวกในการเขียนเส้นเชื่อมในลักษณะนี้ เราสามารถกำหนดชื่อหรือสัญลักษณ์แทนเส้นเชื่อมแต่ละเส้นได้ดังนี้

ให้เส้นเชื่อม e_1 แทนเส้นเชื่อม uv หมายถึง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v

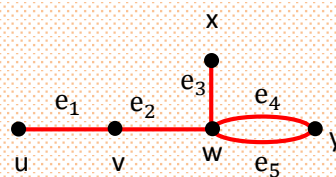
เส้นเชื่อม e_2 แทนเส้นเชื่อม vw หมายถึง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด v และจุดยอด w

เส้นเชื่อม e_3 แทนเส้นเชื่อม wx หมายถึง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด w และจุดยอด x

เส้นเชื่อม e_4 แทนเส้นเชื่อม wy (เส้นบน) หมายถึง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด w และจุดยอด y

เส้นเชื่อม e_5 แทนเส้นเชื่อม wy (เส้นล่าง) หมายถึง เส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด w และจุดยอด y

ดังนั้นเขียนกราฟ G ได้ดังนี้



จะได้ว่า

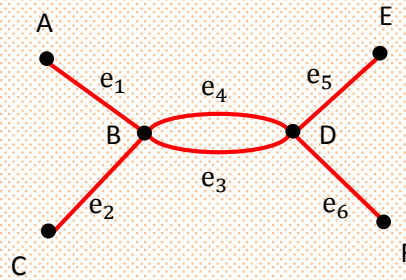
เซตของจุดยอด $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$

เซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



ตัวอย่างที่ 5

กำหนดกราฟ G ดังต่อไปนี้



จงหา เซตของจุดยอด $V(G)$ และ เซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟ G

วิธีทำ จากกราฟ G ที่กำหนดให้จะได้ว่า

เซตของจุดยอด $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$

เซตของเส้นเชื่อม $E(G) = \{AB, BC, BD, DB, DE, DF\}$

หรือ $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

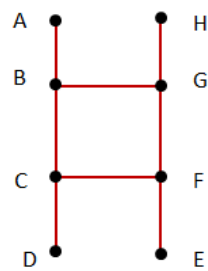
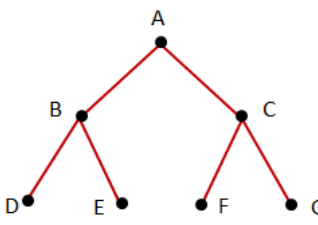
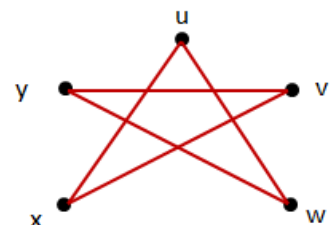

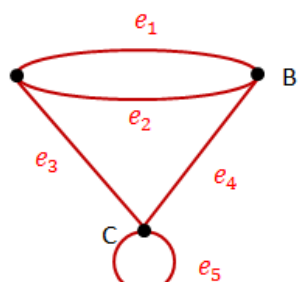


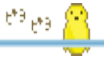
จากใบความรู้ที่ 1.2 ที่นักเรียนได้ศึกษาข้างต้น
ให้นักเรียนตรวจสอบความเข้าใจและนำความรู้เรื่องเซตไป
เชื่อมโยงใช้ในการเขียนเซตของจุดยอด $V(G)$ และ เซตของ
เส้นเชื่อม $E(G)$ เมื่อกำหนดกราฟ G มาให้จากกิจกรรมที่ 1.2
นะคะ

กิจกรรมที่ 1.2 เขียนเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ จากกราฟ G

คำชี้แจง ในแต่ละข้อของกิจกรรมต่อไปนี้ให้นักเรียน เติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ และตรวจคำตอบได้จากเฉลยท้ายชุดที่ 1

1. จากกราฟ G ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$

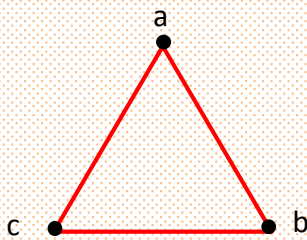
กราฟ G	เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$
$G_1 :$ 	$V(G_1) = \{A, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$ $E(G_1) = \{AB, BC, CD, \dots, \dots, \dots, \dots\}$
$G_2 :$ 	$V(G_2) = \{A, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$ $E(G_2) = \{AB, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots\}$
$G_3 :$ 	$V(G_3) = \{u, \dots, \dots, \dots, \dots\}$ $E(G_3) = \{uw, \dots, \dots, \dots, \dots\}$
$G_4 :$ 	$V(G_4) = \{\dots\}$ $E(G_4) = \dots\dots\dots$
$G_5 :$ 	$V(G_5) = \{\dots, \dots, \dots\}$ $E(G_5) = \{e_1, \dots, \dots, \dots, \dots\}$



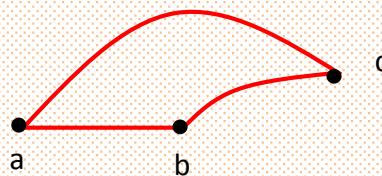
ใบความรู้ที่ 1.3 เขียนกราฟจากเซตของจุดยอด $V(G)$ และ เซตของเส้นเชื่อม $E(G)$

จากใบความรู้ที่ 1.2 นักเรียนได้ศึกษาการเขียนเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ เมื่อกำหนดกราฟ G มาให้ ส่วนในหัวข้อที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการศึกษารายละเอียดของการเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้ ดังนี้

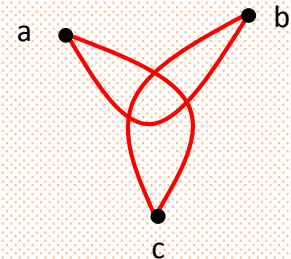
ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้ $V(G) = \{a, b, c\}$ และ $E(G) = \{ab, ac, bc\}$ สามารถเขียนกราฟ G ได้หลายแบบ เช่น รูป (1), (2) หรือ (3) ดังนี้



รูป (1)

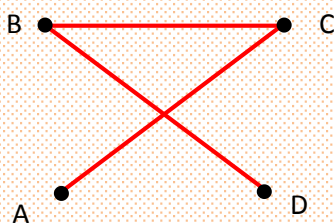


รูป (2)

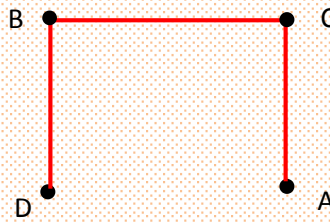


รูป (3)

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้ $V(G) = \{A, B, C, D\}$ และ $E(G) = \{AC, BC, DB\}$ สามารถเขียนกราฟ G ได้หลายแบบ เช่น รูป (1) หรือ (2) ดังนี้



รูป (1)



รูป (2)

ปัญหาชวนคิด จากตัวอย่างที่ 6 และตัวอย่างที่ 7 สามารถเขียนกราฟ G ในแบบอื่น ได้อีกหรือไม่คะเพื่อนๆ และตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกจากเซตแบบบอกเงื่อนไขที่กำหนดให้ เพื่อนำไปใช้ในการเขียนเส้นเชื่อมของกราฟ G ค่ะ



ตัวอย่างที่ 8

จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$

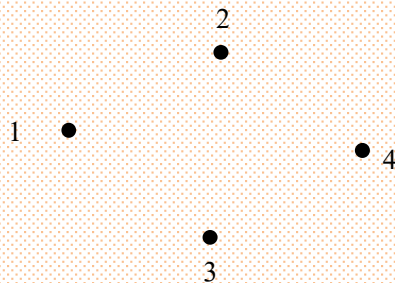
$$E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ และ } A < B\}$$



เพื่อนๆจะนำเส้นเชื่อมไปเขียนกราฟได้ต้องเปลี่ยนเซตแบบบอกเงื่อนไข $E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ และ } A < B\}$ เป็นเซตแบบแจกแจงสมาชิกก่อนนะคะ

วิธีทำ

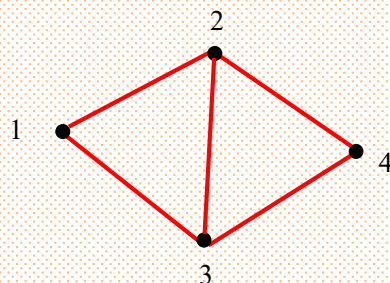
กำหนดจุดยอดของ $V(G)$ ดังรูป (กำหนดจุดยอดเป็นตำแหน่งใดก็ได้)



จากเงื่อนไข $E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ และ } A < B\}$

เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้ $E(G) = \{12, 13, 23, 24, 34\}$

และนำเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาเขียนกราฟ G ได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 9

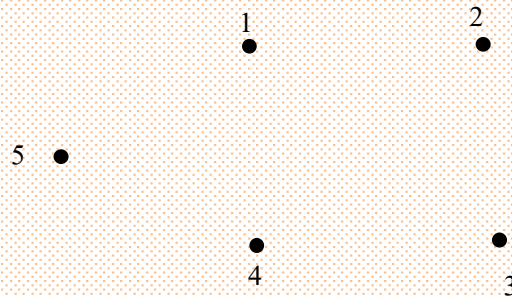
จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E(G) = \{AB | A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่และ } A \leq B\}$$

วิธีทำ

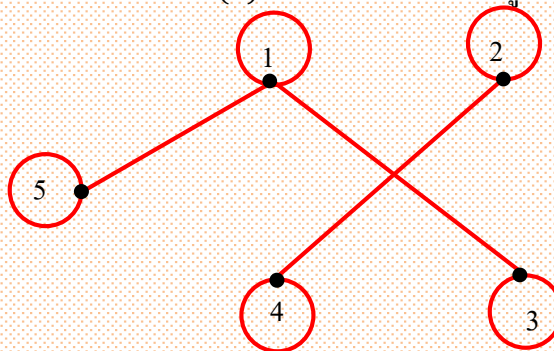
กำหนดจุดยอดของ $V(G)$ ดังรูป



จากเงื่อนไข ของ $E(G) = \{AB | A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่และ } A \leq B\}$

เขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก ได้ดังนี้ $E(G) = \{11, 22, 33, 44, 55, 13, 24, 15\}$

นำเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาเขียนกราฟ G ได้ดังรูป



ข้อสังเกต

การเขียนเซตของ $E(G) = \{AB | A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่และ } A \leq B\}$

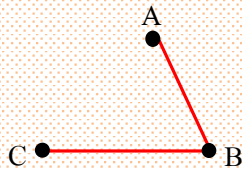
แบบแจกแจงสมาชิกซึ่ง A และ B เป็นสมาชิกของ $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ พิจารณาได้ดังนี้

$1+1=2$ ซึ่ง	$2 \in \text{จำนวนคู่}$	$5+5=10$ ซึ่ง	$10 \in \text{จำนวนคู่}$
$2+2=4$ ซึ่ง	$4 \in \text{จำนวนคู่}$	$1+3=4$ ซึ่ง	$4 \in \text{จำนวนคู่}$
$3+3=6$ ซึ่ง	$6 \in \text{จำนวนคู่}$	$2+4=6$ ซึ่ง	$6 \in \text{จำนวนคู่}$
$4+4=8$ ซึ่ง	$8 \in \text{จำนวนคู่}$	$1+5=6$ ซึ่ง	$6 \in \text{จำนวนคู่}$

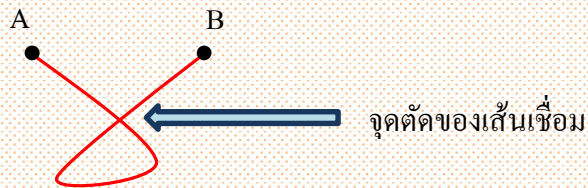
ดังนั้น $E(G) = \{11, 22, 33, 44, 55, 13, 24, 15\}$



หมายเหตุ ในการเขียนกราฟ G จะกำหนดตำแหน่งของจุดยอด ณ ตำแหน่งใดก็ได้และจะลากเส้นเชื่อมของกราฟเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงหรือเส้นโค้งที่มีความยาวเท่าใดก็ได้ เช่น กราฟต่อไปนี้เป็นกราฟเดียวกัน



เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟอาจลากตัดกันได้ โดยที่จุดตัดของเส้นเชื่อมทั้งสอง ไม่ถือว่าเป็นจุดยอดเดียวกันของกราฟ เช่น



กิจกรรมที่ 1.3 มาเขียนกราฟกันเถอะ

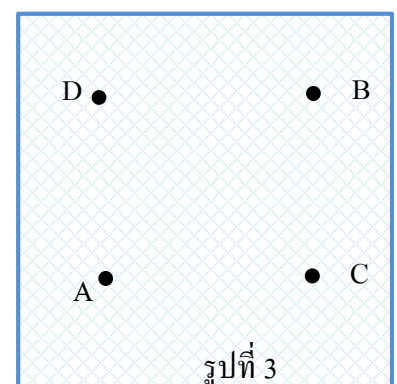
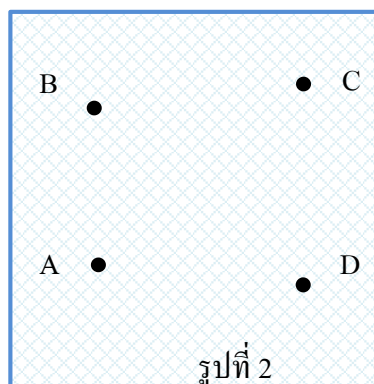
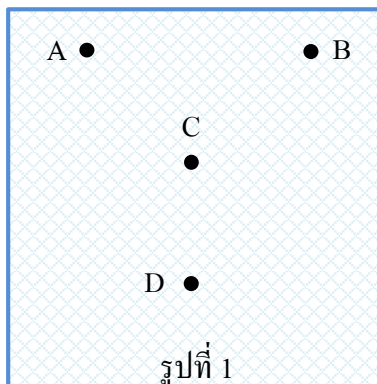
คำชี้แจง เมื่อกำหนดกราฟ G ที่ประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้นักเรียน เขียนกราฟในแต่ละข้อให้สมบูรณ์ โดยครูเป็นผู้ตรวจคำตอบและให้คะแนน

1. ให้นักเรียนเขียนกราฟ G จาก $V(G)$ และ $E(G)$ ต่อไปนี้ ให้สมบูรณ์

1.1 $V(G) = \{A, B, C, D\}$

$E(G) = \{AB, AC, BC, CD\}$

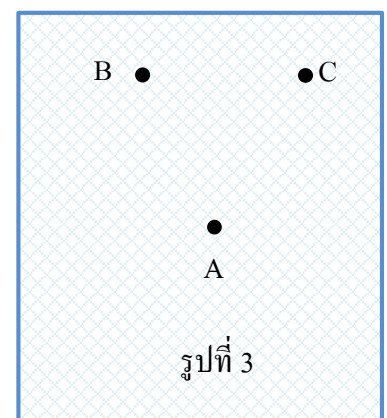
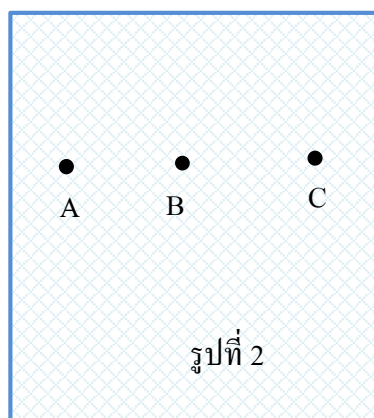
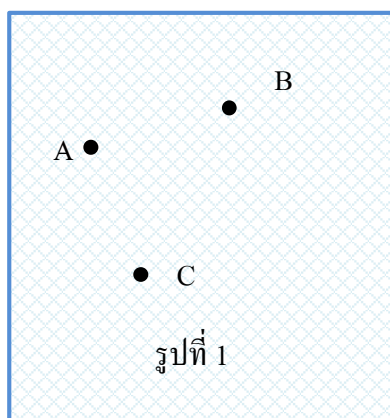
วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 4 จุด และเส้นเชื่อม 4 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น



1.2 $V(G) = \{A, B, C\}$

$E(G) = \{AA, AB, AC, BC, CB\}$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 3 จุด และเส้นเชื่อม 5 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น



2. ให้นักเรียนเขียนกราฟ G จาก $V(G)$ และ $E(G)$ ต่อไปนี้มา **3 กราฟ**

1. $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$
 $E(G) = \{AB, AC, AE, BC, CD, ED\}$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอดจุด และเส้นเชื่อมเส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ
 เช่น



2. $V(G) = \{A, B, C, D\}$
 $E(G) = \{AA, AB, BD, BC, CB\}$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอดจุด และเส้นเชื่อมเส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ
 เช่น

3. จากการเขียนกราฟข้างต้น ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้โดย เติมเครื่องหมาย \checkmark หน้าข้อความ
ที่ถูกต้อง หรือเครื่องหมาย \times หน้าข้อความที่ผิด

- 1. เมื่อกำหนดเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้ สามารถเขียน
กราฟ G ได้หลายรูปแบบ
- 2. การเขียนตำแหน่งของจุดยอดในกราฟ G สามารถเขียน ณ ตำแหน่งใดก็ได้โดยไม่มีรูปแบบที่
แน่นอน
- 3. เส้นเชื่อมของกราฟ G จะเป็นส่วนของเส้นตรงได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น
- 4. ความยาวของเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะยาวเท่าใดก็ได้
- 5. เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟสามารถลากตัดกันได้โดยที่จุดตัดของเส้นทั้งสองถือว่าเป็นจุดยอด
ของกราฟ

ดังนั้นข้อสังเกตที่นักเรียนได้จากการเขียนกราฟ ในกิจกรรมที่ 1.3 ทั้งหมด คือ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

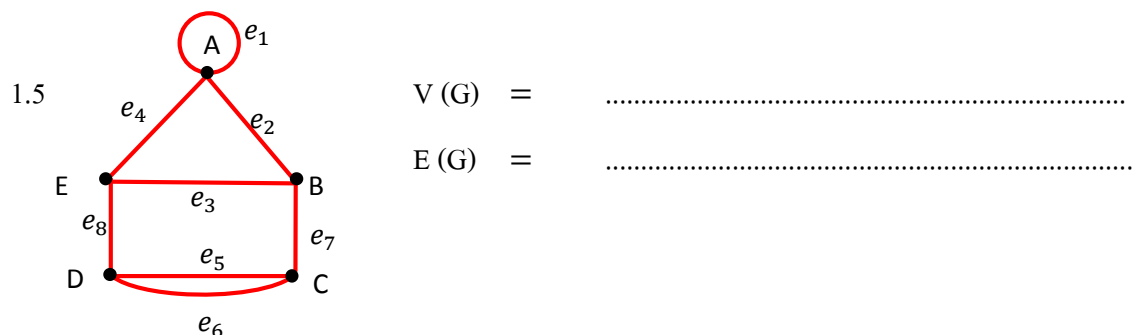
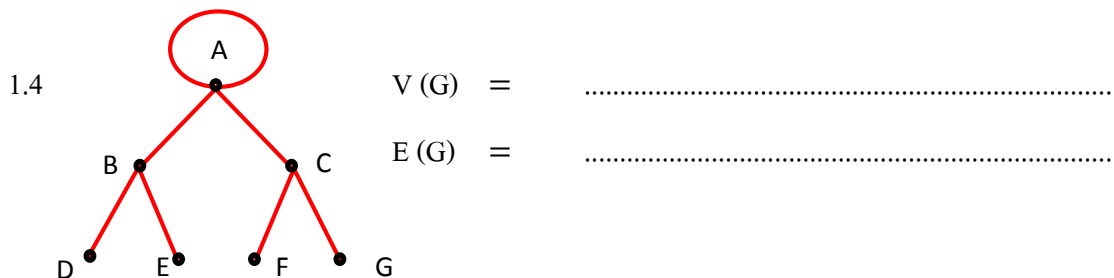
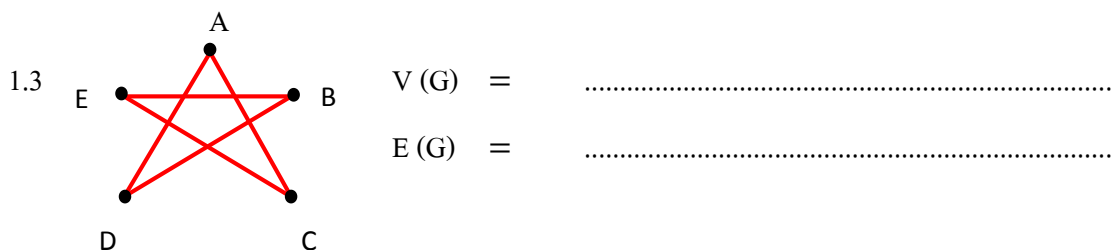
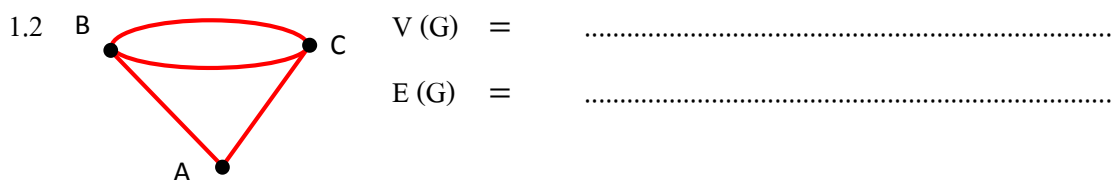
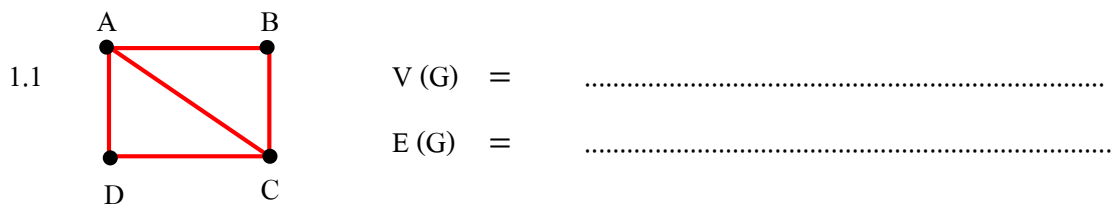


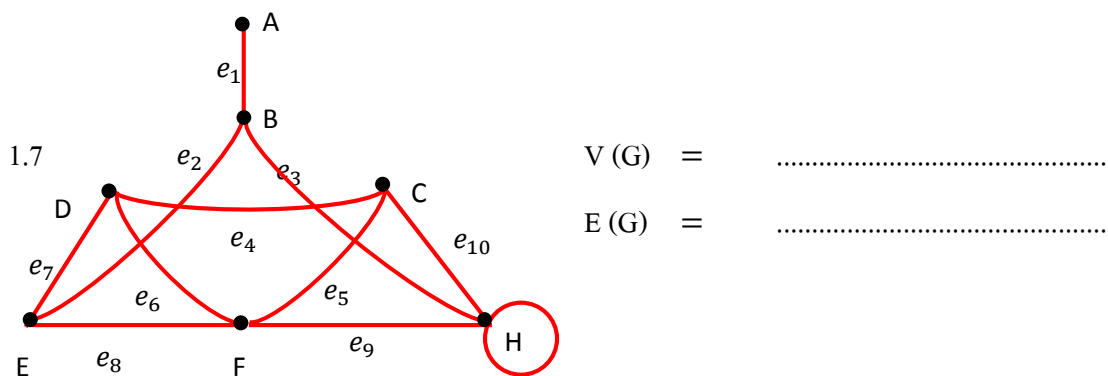
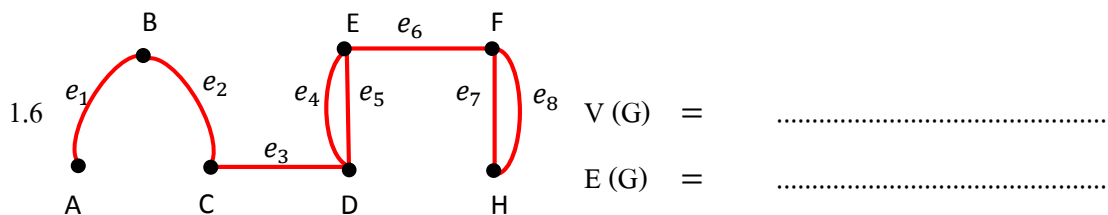
แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.1

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถ

1. หาเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ เมื่อกำหนดกราฟ G มาให้ได้
2. เขียนกราฟ G เมื่อกำหนดเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้ได้

1. จงหาเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้





2. จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนด เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้

2.1 $V(G) = \{u, v, w\}$
 $E(G) = \{uv, uw, vv, vw\}$

2.2 $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$
 $E(G) = \{AB, AC, AE, BC, CD, ED\}$

2.3 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
 $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$

3. จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A > B \text{ และ } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$$

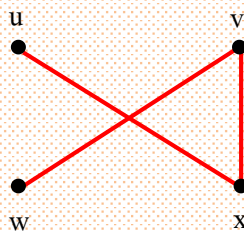
ใบความรู้ที่ 1.4 จุดยอดประชิด(Adjacent vertices) และ เกิดกับ (Incident)

บทนิยาม จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟ เป็นจุดยอดประชิด (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อ มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง
เส้นเชื่อม e ของกราฟเกิดกับ (incident) จุดยอด v ถ้าจุดยอด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม e

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในบทนิยาม ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จะเห็นว่า

จุดยอด u และจุดยอด x เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากมีเส้นเชื่อม ux
จุดยอด v และจุดยอด x เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากมีเส้นเชื่อม vx
จุดยอด v และจุดยอด w เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากมีเส้นเชื่อม vw
แต่ จุดยอด u และจุดยอด v ไม่เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง
จุดยอด u และจุดยอด w ไม่เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง
จุดยอด w และจุดยอด x ไม่เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจากไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง

และจะเห็นว่า

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด u คือ เส้นเชื่อม ux

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด v คือ เส้นเชื่อม vx และ vw

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด x คือ เส้นเชื่อม xu และ xv

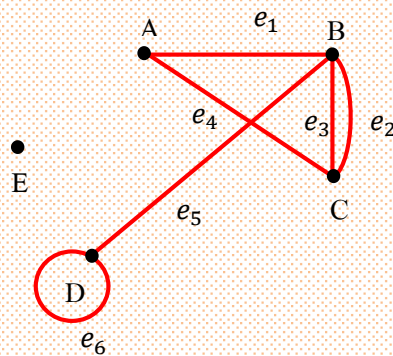
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด w คือ เส้นเชื่อม wv

หมายเหตุ การเขียนจุดยอดประชิดนักเรียนสามารถเขียนจุดใดก่อนก็ได้ ถือว่าเหมือนกัน เช่น

จุดยอด u และจุดยอด x เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจากมีเส้นเชื่อม ux

หรือ จุดยอด x และจุดยอด u เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจากมีเส้นเชื่อม xu

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จะเห็นว่า

จุดยอด A และ จุดยอด B เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม e_1

จุดยอด B และ จุดยอด C เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม e_2

จุดยอด B และ จุดยอด C เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม e_3

จุดยอด A และ จุดยอด C เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม e_4

จุดยอด B และ จุดยอด D เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม e_5

และ จะเห็นว่า

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด A คือ เส้นเชื่อม e_1 และ e_4

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด B คือ เส้นเชื่อม e_1, e_2, e_3 และ e_5

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด C คือ เส้นเชื่อม e_2, e_3 และ e_4

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด D คือ เส้นเชื่อม e_5 และ e_6

แต่ จุดยอด E ไม่เป็นจุดยอดประชิดกับจุดยอดใดๆ และ ไม่มีเส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด E



เพื่อนๆมีข้อสังเกตในการหาเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดแต่ละจุดอย่างไรบ้างคะ

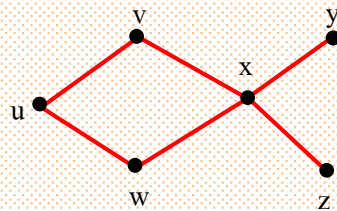
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดแต่ละจุดนั้นให้มองจุดยอดเป็นหลัก และสังเกตดูว่ามีเส้นเชื่อมใดที่ลากออกจากจุดยอดนั้นบ้างและเพื่อตรวจสอบความเข้าใจเกี่ยวกับจุดยอดประชิดและเส้นเชื่อมเกิดกับให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.4 ต่อไปค่ะ



กิจกรรมที่ 1.4 จุดยอดประชิด (Adjacent vertices) และเกิดกับ (Incident) ของกราฟ G

คำชี้แจง ในแต่ละข้อของกิจกรรมต่อไปนี้ให้นักเรียนเติมคำตอบในช่องว่างให้ถูกต้องและตรวจคำตอบได้จากเฉลยท้ายชุดที่ 1

1. กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จะเห็นว่า

จุดยอด u และ จุดยอด v	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....
จุดยอด u และ จุดยอด w	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....
จุดยอด v และ จุดยอด x	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....
จุดยอด w และ จุดยอด x	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....
จุดยอด x และ จุดยอด y	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....
จุดยอด x และจุดยอด z	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก.....

และ เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด u คือ

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด v คือ

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด w คือ

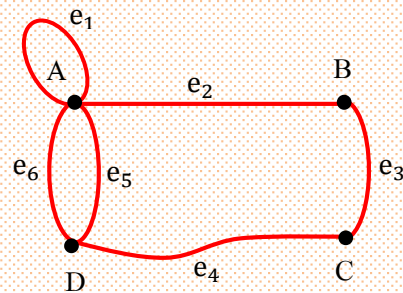
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด x คือ

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด y คือ

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด z คือ



2. กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จงเติมเครื่องหมาย \checkmark หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือเครื่องหมาย \times หน้าข้อความที่ผิด

- 1. จุดยอด A และจุดยอด D เป็นจุดยอดประชิดเนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_1, e_2, e_5 และ e_6
- 2. จุดยอด B และ จุดยอด D เป็นจุดยอดประชิดเนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_4
- 3. เส้นเชื่อม e_5 เกิดกับจุดยอด A
- 4. เส้นเชื่อม e_4 เกิดกับจุดยอด B
- 5. เส้นเชื่อม e_3 เกิดกับจุดยอด C
- 6. จุดยอด C และ จุดยอด D เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_3

สรุปได้ว่า

จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟ เป็นจุดยอดประชิด (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อ.....

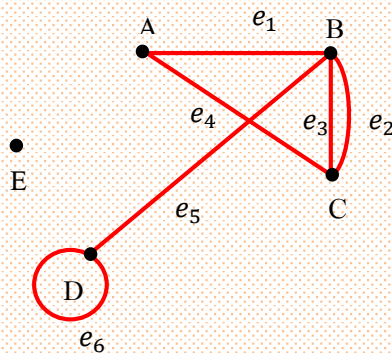
เส้นเชื่อม e ของกราฟเกิดกับ (Incident) จุดยอด v ถ้า.....



ใบความรู้ที่ 1.5 เส้นเชื่อมขนาน (Parallel Edges) และวงวน (Loop)

คำถามจุดประกายเพื่อต่อยอดความคิด

จากใบความรู้ที่ 1.4 ตัวอย่างที่ 11



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. เส้นเชื่อม e_2 และ e_3 มีจุดปลายของเส้นเชื่อมเป็นอย่างไร
2. เส้นเชื่อม e_6 หรือเส้นเชื่อม DD มีจุดปลายของเส้นเชื่อมเป็นอย่างไร

บทนิยาม

เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดยอดคู่เดียวกัน เรียกว่า เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)

เส้นเชื่อมที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอดเดียวกัน เรียกว่า วงวน (loop)

ดังนั้นจากคำถามจุดประกายเพื่อต่อยอดความคิดและบทนิยาม สามารถตอบคำถามได้ดังนี้

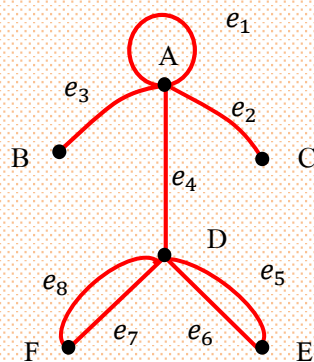
1. เส้นเชื่อม e_2 และ e_3 มีจุดปลายของเส้นเชื่อมเป็นจุดยอดคู่เดียวกัน นั่นคือ เส้นเชื่อม e_2 และ e_3 เรียกว่า เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)
2. เส้นเชื่อม e_6 หรือ เส้นเชื่อม DD เป็นเส้นเชื่อมที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอดเดียวกัน นั่นคือ เส้นเชื่อม e_6 หรือ เส้นเชื่อม DD เรียกว่า วงวน (loop)

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในบทนิยาม ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างที่ 12 และตรวจสอบความเข้าใจในเรื่องเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.5 ด้วยนะคะ



ตัวอย่างที่ 12

กำหนดกราฟ G ดังรูป



จากกราฟ G จะได้ $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

และพบว่า

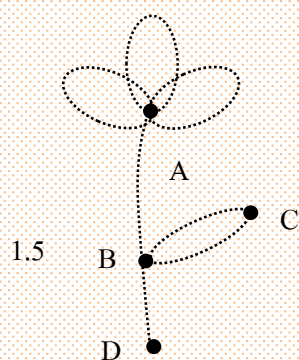
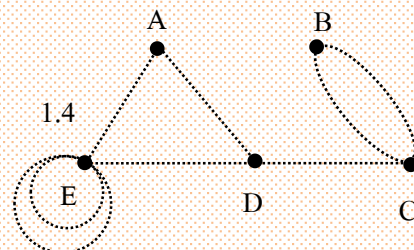
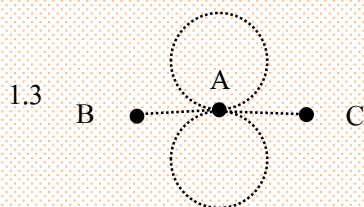
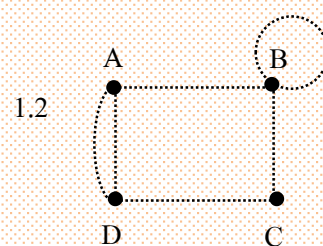
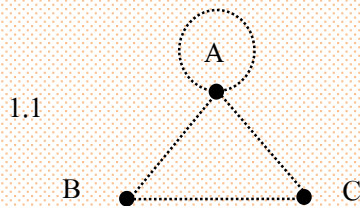
e_1	เป็นวงวน
e_5 และ e_6	เป็นเส้นเชื่อมขนาน
e_7 และ e_8	เป็นเส้นเชื่อมขนาน



กิจกรรมที่ 1.5 ตามหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop)

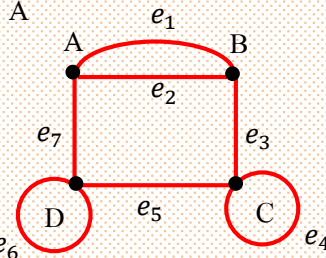
คำชี้แจง ในแต่ละข้อของกิจกรรมต่อไปนี้ให้นักเรียนเขียนเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop) โดยตรวจคำตอบได้จากเฉลยท้ายชุดที่ 1

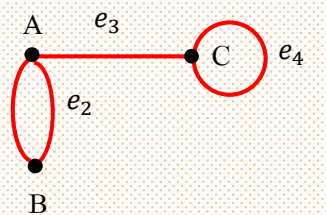
- จากกราฟ G ที่กำหนดให้ จงเขียนเส้นเชื่อมที่เป็นเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และ วงวน (loop) โดยใช้ปากกาสีแตกต่างจากโจทย์ที่ปรากฏในกราฟตามรอยเส้นประให้ถูกต้อง

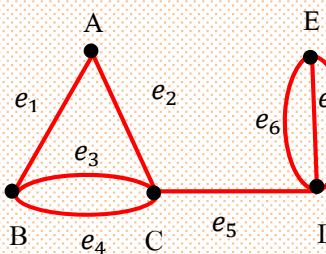


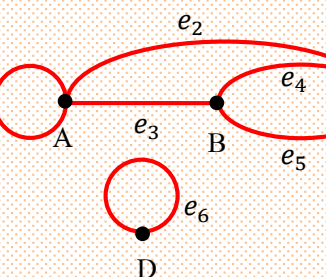
2. จงหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) จากกราฟต่อไปนี้

2.1  เส้นเชื่อมขนาน คือ
วงวน คือ

2.2  เส้นเชื่อมขนาน คือ
วงวน คือ

2.3  เส้นเชื่อมขนาน คือ
วงวน คือ

2.4  เส้นเชื่อมขนาน คือ
วงวน คือ

2.5  เส้นเชื่อมขนาน คือ
วงวน คือ

สรุปได้ว่า

เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) คือ

วงวน (loop) คือ



ใบความรู้ที่ 1.6 กราฟเชิงเดียว (Simple graph) และกราฟหลายเชิง (Multi graph)

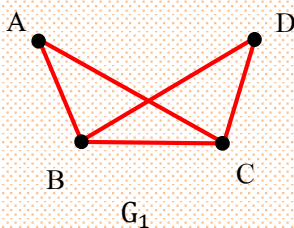
บทนิยาม กราฟ G จะเรียกว่าเป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือกราฟอย่างง่าย ก็ต่อเมื่อ ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวนในกราฟ G
 สำหรับกราฟที่ไม่ใช่กราฟเชิงเดียว เรียกว่า กราฟหลายเชิง (multi graph)



จากบทนิยาม หากกราฟ G มีเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) หรือวงวน (loop) อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือ มีทั้งเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) จะถือว่ากราฟ G เป็นกราฟหลายเชิง (multi graph) เพื่อทำความเข้าใจบทนิยามให้ง่ายขึ้น ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13

กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังนี้



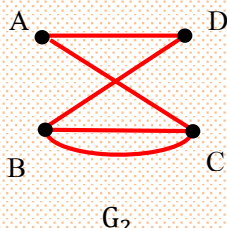
จะได้ว่า

กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว

กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิง

กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิง

กราฟ G_4 เป็นกราฟหลายเชิง

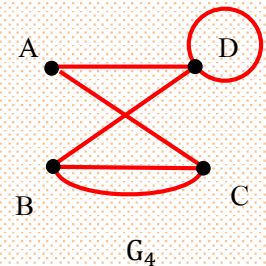
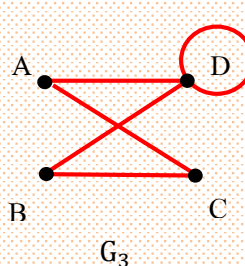


เนื่องจากในกราฟ G_1 ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและวงวน

เนื่องจากในกราฟ G_2 มีเส้นเชื่อมขนานระหว่างจุดยอด B และจุดยอด C

เนื่องจากในกราฟ G_3 มีวงวนที่จุดยอด D

เนื่องจากในกราฟ G_4 มีเส้นเชื่อมขนานระหว่างจุดยอด B และจุดยอด C และวงวนที่จุดยอด D



ตัวอย่างที่ 14

กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังนี้

กราฟ G_1 ประกอบด้วย	$V(G_1) = \{A, B, C, D, E\}$ $E(G_1) = \{AB, AC, BD, BC, CD, DE\}$
กราฟ G_2 ประกอบด้วย	$V(G_2) = \{A, B, C, D, E\}$ $E(G_2) = \{AB, BA, BC, DE\}$
กราฟ G_3 ประกอบด้วย	$V(G_3) = \{A, B, C, D, E\}$ $E(G_3) = \{CD, DE, EE\}$
กราฟ G_4 ประกอบด้วย	$V(G_4) = \{A, B, C, D, E\}$ $E(G_4) = \{AB, CB, BC, DE, AA\}$

วิธีทำ

จากเซตของเส้นเชื่อมของกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ที่โจทย์กำหนดให้ สามารถพิจารณากราฟเชิงเดียวและกราฟหลายเชิงได้โดยไม่ต้องเขียนกราฟ ดังนี้



พิจารณากราฟเชิงเดียวและกราฟหลายเชิงได้โดยไม่ต้องเขียนกราฟให้นักเรียนสังเกตเส้นเชื่อม ถ้าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดยอดเดียวกัน คือ วงวน (loop) แต่ถ้ามีเส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดยอดคู่เดียวกัน คือ เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) นะคะ

กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว เนื่องจากในกราฟ G_1 ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและวงวน

กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจากในกราฟ G_2 มีเส้นเชื่อมขนาน คือ เส้นเชื่อม AB, BA

กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจากในกราฟ G_3 มีวงวนคือ เส้นเชื่อม EE

กราฟ G_4 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจากในกราฟ G_4 มีเส้นเชื่อมขนาน CB, BC และวงวน AA



ตัวอย่างที่ 15

จงยกตัวอย่างกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุดยอด 4 จุด และมีเส้นเชื่อม 6 เส้นและมีลักษณะดังนี้

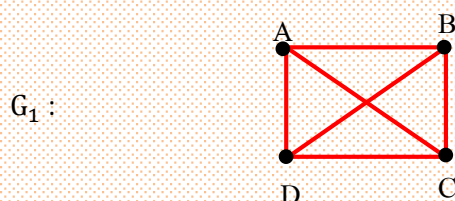
กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว

กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีเส้นเชื่อมขนาน

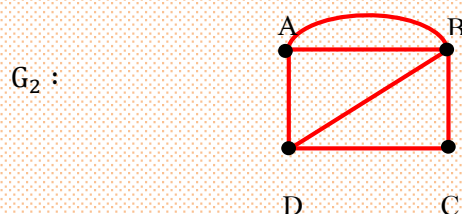
กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวน

กราฟ G_4 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

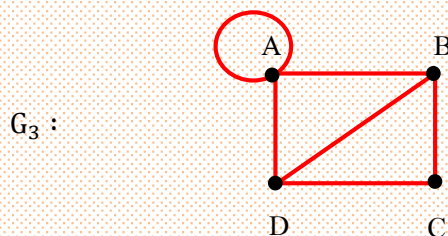
วิธีทำ (1) เนื่องจากกราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว แสดงว่า ต้องไม่มีวงวนและไม่มีเส้นเชื่อมขนาน สามารถเขียนกราฟได้ เช่น



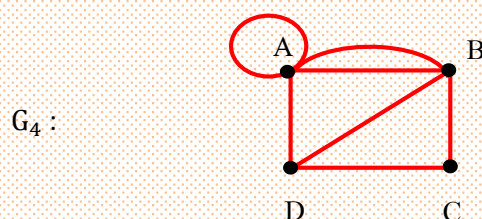
(2) เนื่องจากกราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีเส้นเชื่อมขนาน สามารถเขียนกราฟได้ เช่น



(3) เนื่องจากกราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวน สามารถเขียนกราฟได้ เช่น



(4) เนื่องจากกราฟ G_4 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน สามารถเขียนกราฟได้ เช่น



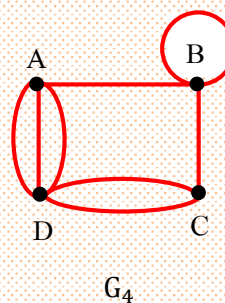
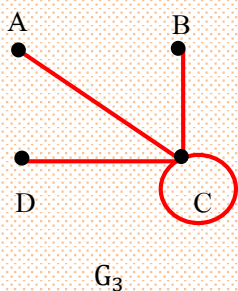
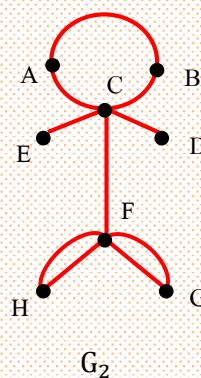
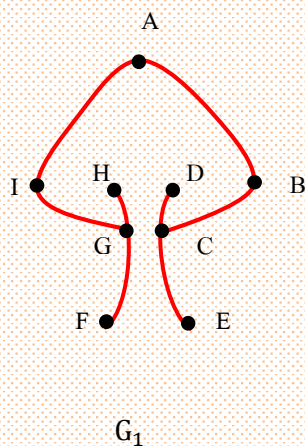
เพื่อตรวจสอบความเข้าใจในเรื่องกราฟเชิงเดียว
(simple graph) และกราฟหลายเชิง (multi graph)
ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.6 ต่อไปนี้



กิจกรรมที่ 1.6 กราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือ กราฟหลายเชิง (multi graph)

คำชี้แจง ในแต่ละข้อของกิจกรรมต่อไปนี้ให้นักเรียน เติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์ และตรวจคำตอบได้จากเฉลยท้ายชุดที่ 1

1. กราฟ G ในข้อต่อไปนี้ กราฟใดเป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือ กราฟหลายเชิง (multi graph) พร้อมทั้งบอกเหตุผลประกอบ



กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว เนื่องจาก

กราฟ G_2 เป็นกราฟ.....เนื่องจาก


กราฟ G_3 เป็นกราฟ.....เนื่องจาก

กราฟ G_4 เป็นกราฟ.....เนื่องจาก



2. จงยกตัวอย่างกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุดยอด 5 และเส้นเชื่อม 8 เส้นตามเงื่อนไข ดังนี้

2.1 กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว



2.2 กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวน



2.3 กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

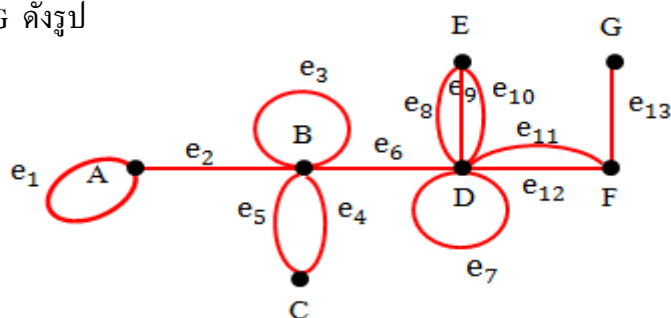


แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.2

จุดประสงค์ : นักเรียนสามารถ

1. หาจุดยอดประชิด (Adjacent vertices) และเกิดกับ (Incident) จุดยอดในกราฟที่กำหนดให้ได้
2. หาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) ได้
3. บอกได้ว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือกราฟหลายเชิง (multi graph)

1. กำหนดกราฟ G ดังรูป



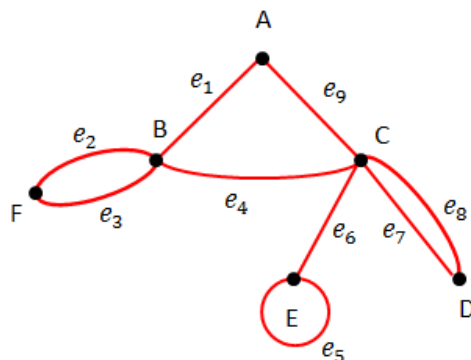
จงหา

- 1.1 วงวน ของจุดยอด A คือ
- 1.2 วงวน ของจุดยอด B คือ
- 1.3 วงวน ของจุดยอด D คือ
- 1.4 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด B และจุดยอด C คือ
- 1.5 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด D และจุดยอด E คือ
- 1.6 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด D และจุดยอด F คือ





2. จงเติมข้อความจากกราฟ G ที่กำหนดให้



2.1 $V(G) =$

2.2 $E(G) =$

2.3 เส้นเชื่อมขนานของจุดยอด B และจุดยอด F

คือ

2.4 ววงนของจุดยอด E

คือ.....

2.5 จุดยอดประชิดของเส้นเชื่อม e_9

คือ

2.6 จุดยอดประชิดของจุดยอด A

คือ

2.7 เส้นเชื่อมขนานที่เกิดกับจุดยอด C

คือ.....

2.8 เส้นเชื่อม e_6 เกิดกับจุดยอด..... และจุดยอด.....

2.9 เส้นเชื่อมขนานของจุดยอด C และจุดยอด D

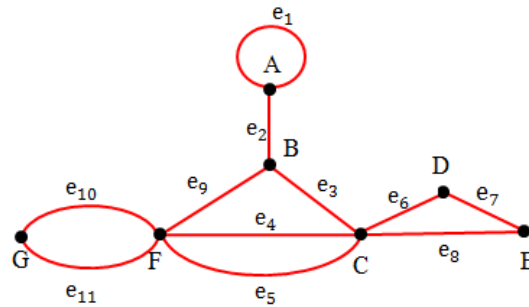
คือ.....

2.10 จุดยอดซึ่งไม่ใช่จุดยอดประชิดของจุดยอด A

คือ



3. จงเติมเครื่องหมาย \checkmark หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือ \times หน้าข้อความที่ผิด



- 3.1 เส้นเชื่อม e_1 เป็นวงวน
- 3.2 เส้นเชื่อม e_4 และ e_5 เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- 3.3 จุดยอด F มีวงวน
- 3.4 จุดยอด F และจุดยอด C มีเส้นเชื่อมขนาน
- 3.5 จุดยอด A และจุดยอด F เป็นจุดยอดประชิด
- 3.6 จุดยอดประชิดของจุดยอด B คือ จุดยอด A จุดยอด C และจุดยอด F
- 3.7 เส้นเชื่อม e_8 เกิดกับจุดยอด E และจุดยอด C
- 3.8 เส้นเชื่อม e_4 และ e_5 เกิดกับจุดยอด F และจุดยอด C
- 3.9 เส้นเชื่อม e_3 และ e_9 เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- 3.10 จุดยอด C และจุดยอด F มีจำนวนเส้นเชื่อมขนาน 4 เส้น



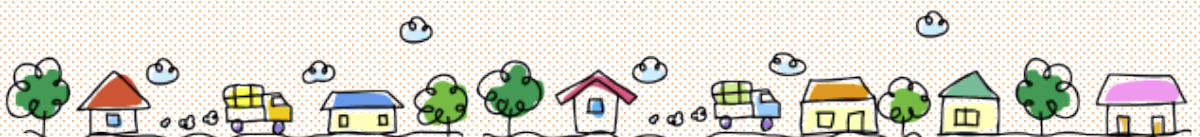
ใบความรู้ที่ 1.7 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนปัญหาโดยใช้กราฟ

หลังจากที่นักเรียนได้ศึกษาความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟแล้ว ในหัวข้อต่อไปนี้เป็น การนำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟมาเชื่อมโยงกับปัญหาหรือสถานการณ์บางอย่าง

การแก้ปัญหามองปัญหาที่ซับซ้อน อาจทำได้โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมแทนปัญหา ซึ่งทำให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น หลังจากนั้นจึงแก้ปัญหามาจากแบบจำลองเพื่อหาคำตอบ แล้วนำคำตอบที่ได้จากแบบจำลองมาอธิบายผลที่เกิดขึ้นกับปัญหาจริง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟ มีลักษณะค่อนข้างง่ายและเป็นแบบจำลองที่เหมาะสมกับบางสถานการณ์ที่ซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟแทนปัญหาหรือสถานการณ์ เพื่อให้เข้าใจปัญหาหรือสถานการณ์ได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้ค่ะ



ตัวอย่างที่ 16

จงสร้างแบบจำลองแสดงจังหวัดที่มีพรมแดนติดกัน

โดยให้จุด แทน จังหวัด เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่า
จังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน เมื่อกำหนดแผนที่ดังรูป



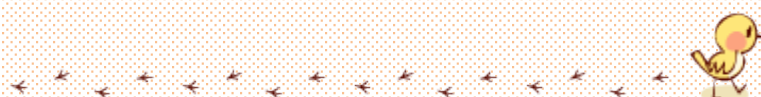
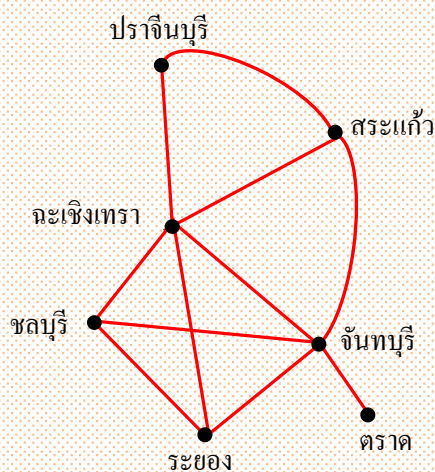
ที่มาแผนที่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ <http://www.panteethai.com>

วิธีทำ สามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์

โดยให้ จุด แทน จังหวัด

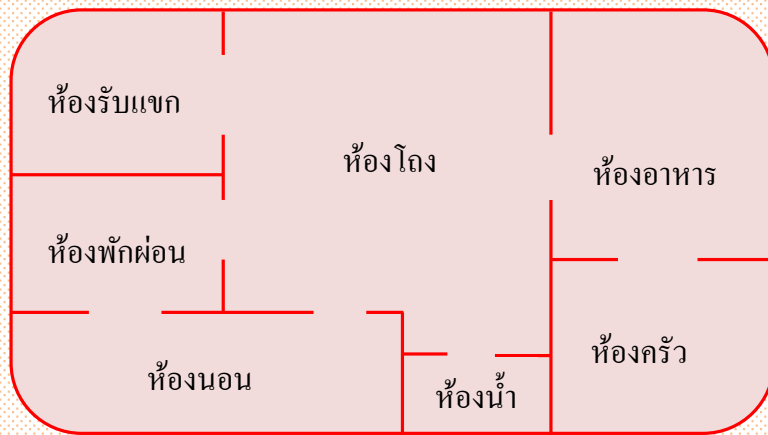
เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าจังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน

ดังนั้นแบบจำลองที่แทนสถานการณ์สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 17

ในการออกแบบชั้นล่างของบ้านนครจรรัตน์ สถาปนิกของบริษัทที่ว่าจ้างได้ออกแบบบ้านชั้นล่างไว้ ดังรูป



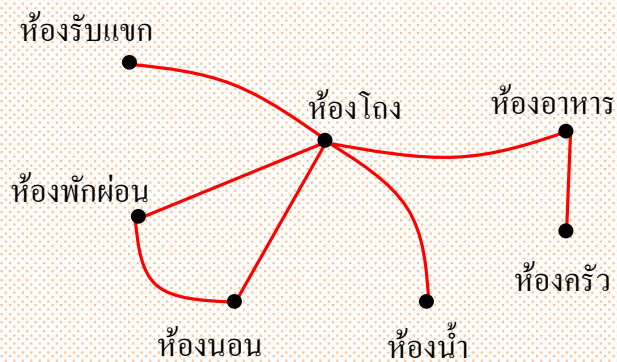
จงสร้างแบบจำลองแสดงทางเชื่อมระหว่างห้องแต่ละห้องภายในบ้าน โดยให้ จุด แทนห้อง และเส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ประตู

วิธีทำ สามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์

โดยให้ จุด แทนห้อง

และ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ประตู

ดังนั้นแบบจำลองที่แทนสถานการณ์สามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

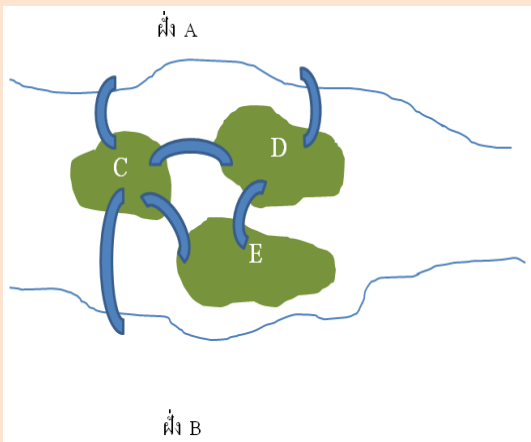


จากตัวอย่างที่ 16 และตัวอย่างที่ 17 เป็นการสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์หรือปัญหาโดยใช้กราฟ ซึ่งทำให้เข้าใจสถานการณ์หรือปัญหาได้ง่ายขึ้น และก่อนที่นักเรียนจะแก้ปัญหาก็โดยการหาคำตอบจากแบบจำลองที่สร้างขึ้นได้นั้น นักเรียนจะต้องสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์หรือปัญหาให้ถูกต้องก่อน และเพื่อเป็นการตรวจสอบว่านักเรียนสามารถนำความรู้มาเชื่อมโยงในการสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์หรือปัญหาได้ ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1.7 ต่อไปนี้

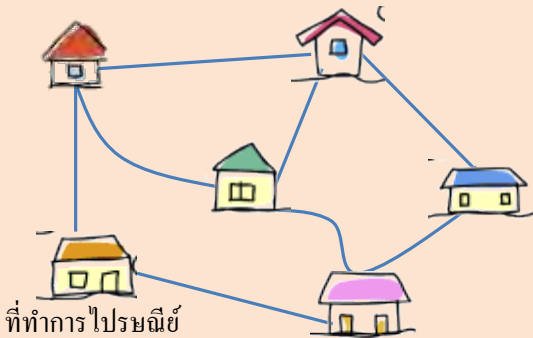


กิจกรรมที่ 1.7 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์ปัญหา

- สมมุติว่าสวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีเกาะ 3 เกาะ คือ C , D ,E และมีสะพานเชื่อมระหว่างเกาะและฝั่ง A กับ ฝั่ง B ดังรูป ให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์นี้ โดยให้จุดแทนเกาะและฝั่ง และเส้นเชื่อมแทนสะพาน


สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	

- บุรุษไปรษณีย์คนหนึ่งต้องไปส่งจดหมายทั้งหมด 5 บ้าน โดยที่แต่ละบ้านตั้งอยู่ริมถนน ดังภาพต่อไปนี้ ให้ จุดยอด แทน บ้านแต่ละหลัง เส้นเชื่อมแทนถนน

สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	

3. จงสร้างแบบจำลองแสดงจังหวัดที่มีพรมแดนติดกัน

โดยให้จุด แทน จังหวัด เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าจังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน เมื่อกำหนดแผนที่ดังรูป

สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	

ใบความรู้ที่ 1.8 การนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟมาแก้ปัญหาบางปัญหาที่พบเห็นในชีวิตประจำวันบางปัญหา

การแก้ปัญหาด้านต่างๆ เช่น ปัญหาด้านธุรกิจ ปัญหาด้านอุตสาหกรรมการจัดการ หรือแม้กระทั่งปัญหาที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันบางปัญหา เราอาจสร้างแบบจำลองที่เหมาะสมแทนปัญหา เพื่อให้เข้าใจปัญหาได้ง่ายขึ้น แล้วแก้ปัญหาโดยการหาคำตอบจากแบบจำลอง จากนั้นนำคำตอบที่ได้จากแบบจำลองมาใช้ในการตัดสินใจเพื่อแก้ปัญหาจากสถานการณ์จริงเป็นการเชื่อมโยงความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟเบื้องต้นกับชีวิตประจำวัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 17

ปัญหาการเดินทาง

มีเมือง 4 เมือง คือ เมือง A , B , C และ D โดยที่

มีถนน 2 สายเชื่อมเมือง A และ B

มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง A และ C

มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง B และ D

มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง A และ D

มีถนน 1 สายเชื่อมเมือง B และ C

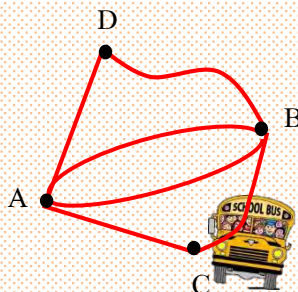
โดยการเดินทางระหว่างเมืองทั้ง 4 เมือง มีรถประจำทางวิ่งให้บริการ จะเป็นไปได้หรือไม่ที่รถประจำทางจะเริ่มรับผู้โดยสารจากเมือง C โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง C

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้

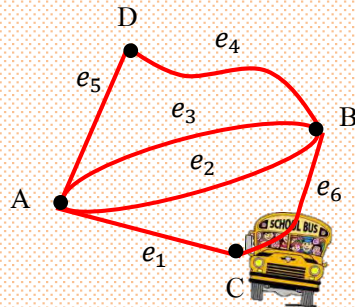
ให้ จุด A , B , C และ D แทน เมืองแต่ละเมืองตามลำดับ

ให้เส้นที่เชื่อมจุด 2 จุด แทน ถนนที่เชื่อมเมืองทั้งสองนั้น

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ดังรูป



เนื่องจากถนนที่เชื่อมระหว่างเมือง A และ B มีถนน 2 สาย และเพื่อความสะดวกในการหา
คำตอบจากสถานการณ์ เราสามารถกำหนดให้ถนนแต่ละสายแทนด้วย e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 และ e_6 ดังนี้



พิจารณาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า เส้นทางการเดินทางของรถประจำทาง
จากเมือง C โดยให้ผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมาถึงเมือง C สามารถทำได้ดังตัวอย่าง
การเดินทางตามเส้นทางต่อไปนี้ (ทำได้หลายแบบ)

แบบที่ 1 เริ่มต้นที่จุดยอด C $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow e_4 \rightarrow e_5 \rightarrow e_3 \rightarrow e_6$ สิ้นสุดที่จุดยอด C

แบบที่ 2 เริ่มต้นที่จุดยอด C $e_6 \rightarrow e_4 \rightarrow e_5 \rightarrow e_3 \rightarrow e_2 \rightarrow e_1$ สิ้นสุดที่จุดยอด C

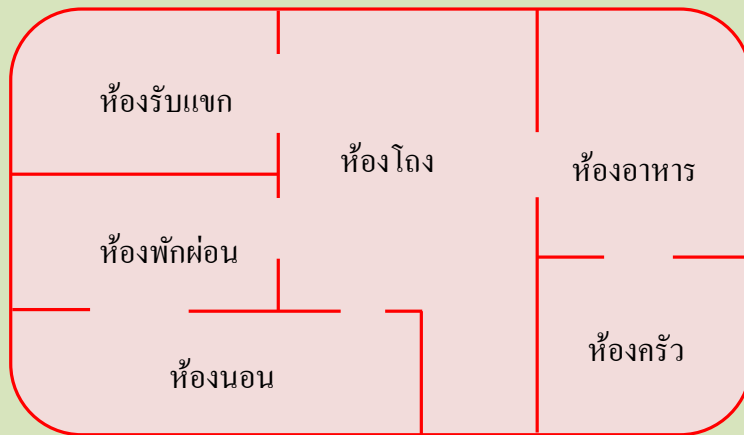
ซึ่งทั้ง 2 แบบ มีจุดเริ่มต้นที่เมือง C แล้วเดินทางผ่านถนนทุกสายเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมา
ที่เมือง C เหมือนเดิม



ตัวอย่างที่ 18

ปัญหาการออกแบบบ้านของสถาปนิก

ในการออกแบบชั้นล่างของบ้านครูจรรตน์ สถาปนิกของบริษัทที่ว่าจ้างได้ออกแบบบ้านชั้นล่างไว้ ดังนี้

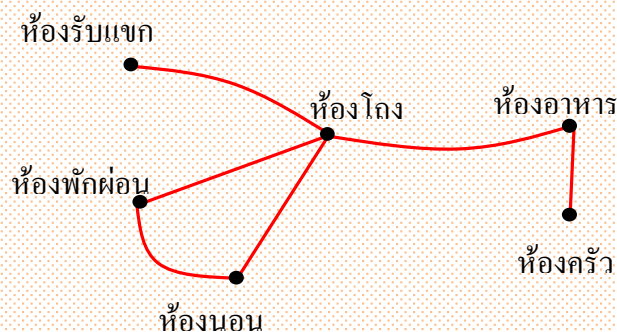


ถ้าครูจรรตน์จะเดินผ่านห้องทุกห้องโดยมีเงื่อนไขว่าต้องเดินผ่านทุกประตู และแต่ละประตูจะผ่านได้เพียงครั้งเดียว สามารถทำได้หรือไม่ ถ้าทำได้ต้องเริ่มจากที่ใด และ ไปสิ้นสุดที่ใด

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้จุด แทนห้อง

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ประตู

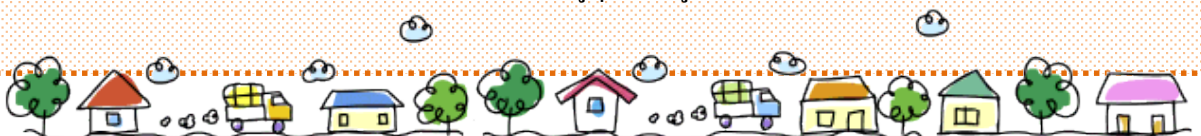
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ดังรูป



พิจารณาจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า การเดินผ่านห้องทุกห้อง และผ่านประตูแต่ละประตูเพียงครั้งเดียวสามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เริ่มจาก ห้องรับแขก → ห้องโถง → ห้องพักผ่อน → ห้องนอน → ห้องโถง → ห้องอาหาร → ห้องครัว

จะพบว่าการเดินทางดังกล่าว จะสามารถผ่านประตูทุกประตูเพียงครั้งเดียวได้



ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 17 และตัวอย่างที่ 18 ลักษณะของการหาคำตอบของปัญหาเกิดจากการทดลองอาจใช้เวลาในการหาคำตอบได้ค่อนข้างช้า แต่หากนักเรียนมีความรู้เรื่องกราฟเพิ่มขึ้นจะสามารถทำให้ตอบปัญหาเหล่านี้ได้ง่ายและเร็วขึ้น

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นลักษณะของสถานการณ์ปัญหาที่นักเรียนสามารถพบเห็นในชีวิตประจำวัน ซึ่งสามารถนำความรู้เรื่องกราฟไปเชื่อมโยงใช้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี เช่น ปัญหาการจัดตารางการประชุม ปัญหาการจัดตารางสอน ปัญหาการจัดตารางสอบ ปัญหาการจัดสรรทรัพยากร เป็นต้น



ตัวอย่างที่ 19

ปัญหาการจัดการประชุม

คณะกรรมการนักเรียนโรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์แบ่งการทำงานออกเป็น 4 ฝ่าย ได้แก่ ฝ่ายกิจกรรม ฝ่ายบริหาร ฝ่ายวิชาการ ฝ่ายการเงิน แต่ละฝ่ายอาจจะมีกรรมการร่วมกัน โดยประธานนักเรียนได้กำหนดว่าแต่ละฝ่ายจะต้องมีการประชุมสัปดาห์ละ 1 ครั้ง ซึ่งในการจัดประชุมได้จัดเวลาในช่วงหลังเลิกเรียนของวันจันทร์ พุธ และศุกร์ ดังนั้นผู้ที่ทำหน้าที่ในการจัดประชุมจะมีวิธีการจัดอย่างไร โดยที่กรรมการทุกคนสามารถเข้าร่วมประชุมได้ ถ้ากำหนดคณะกรรมการแต่ละฝ่ายมีคณะกรรมการร่วมกันดังนี้

ฝ่ายบริหารและฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายการเงินและฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน

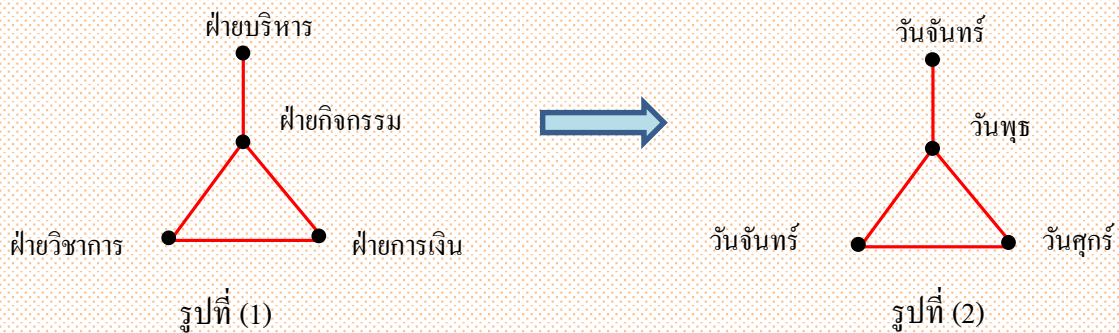
ฝ่ายการเงินและฝ่ายวิชาการ มีกรรมการร่วมกัน

ฝ่ายวิชาการและฝ่ายกิจกรรม มีกรรมการร่วมกัน



วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้ จุด แทน ฝ่ายต่างๆ ทั้ง 4 ฝ่าย คือ ฝ่ายบริหาร ฝ่ายการเงิน ฝ่ายวิชาการ และ ฝ่ายกิจกรรม
เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าสองฝ่ายนั้นมีกิจกรรมร่วมกัน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ดังรูปที่ (1)

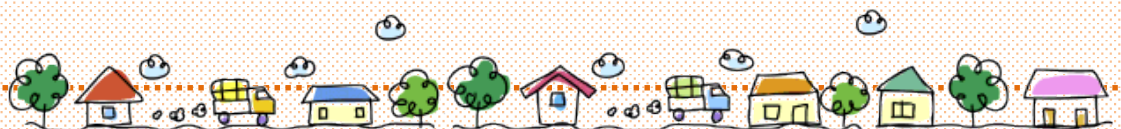


จากรูป (1) เป็นแบบจำลองที่แสดงถึงคณะกรรมการทั้ง 4 ฝ่ายที่มีกิจกรรมร่วมกัน ดังนั้นในการจัดการตารางการประชุมพิจารณาได้ดังนี้ ฝ่ายบริหาร จัดการประชุมวันเดียวกับฝ่ายกิจกรรมไม่ได้ เนื่องจากมีกิจกรรมร่วมกัน (นั่นคือ จุดยอดที่ประชิดกันจะต้องกำหนดวันที่ต่างกัน) แต่ฝ่ายบริหารสามารถจัดประชุมวันเดียวกับฝ่ายวิชาการหรือฝ่ายการเงินได้อย่างใดอย่างหนึ่ง

ดังนั้นการจัดการตารางการประชุม ถ้ากำหนดให้ฝ่ายบริหารประชุมวันเดียวกับฝ่ายวิชาการคือวันจันทร์ ฝ่ายกิจกรรมประชุมวันพุธ และฝ่ายการเงินประชุมวันศุกร์ ดังรูปที่ (2)

สรุปตัวอย่างหนึ่ง ในการจัดการตารางการประชุมสามารถจัดได้ดังนี้

กรรมการฝ่าย	วันประชุม
ฝ่ายบริหาร	วันจันทร์
ฝ่ายกิจกรรม	วันพุธ
ฝ่ายวิชาการ	วันจันทร์
ฝ่ายการเงิน	วันศุกร์



จากตัวอย่างที่ 19 นักเรียนคิดว่ายังมีคำตอบที่
นอกเหนือจากคำตอบในตัวอย่างอีกหรือไม่คะ



ยังมีคำตอบอื่นได้อีกหรือไม่
คิดไม่ออก เพื่อนๆช่วยคิดหน่อยสิคะ...

นักเรียนอาจตอบต่างจากนี้ได้ แต่ต้องยึดหลักเกณฑ์ที่ว่า
จุดยอดประชิดกันจะต้องกำหนดวันที่ต่างกัน ยังไงละคะ
นำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟไปเชื่อมโยงให้ถูกต้องนะค่ะ



ตัวอย่างที่ 20

ปัญหาการจัดสรรทรัพยากรบุคคล

ณเดช ญาญา ปกรณ์ มาร์กี้ และเจมส์ สมัครเข้าทำงานตามความสามารถของบุคคลในบริษัทแห่งหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่าแต่ละคนจะทำงานได้เพียงตำแหน่งเดียวเท่านั้น ซึ่งบริษัทแห่งนี้มีตำแหน่งงานว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง ซึ่งความสามารถของทั้ง 5 คน มีดังนี้

ณเดช มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

ญาญา มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3

ปกรณ์ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 1 และ 2

มาร์กี้ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 3 และ 4

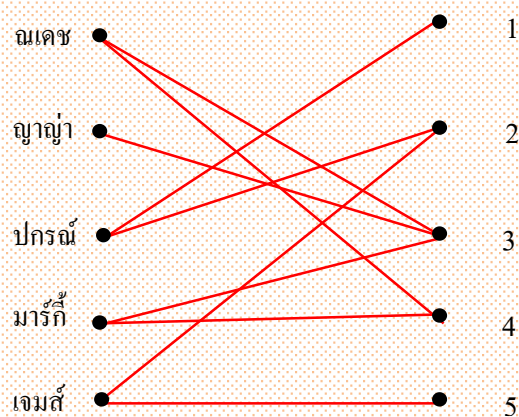
เจมส์ มีความสามารถทำงานตำแหน่งที่ 2 และ 5

จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในบริษัทแห่งนี้ทั้งหมด

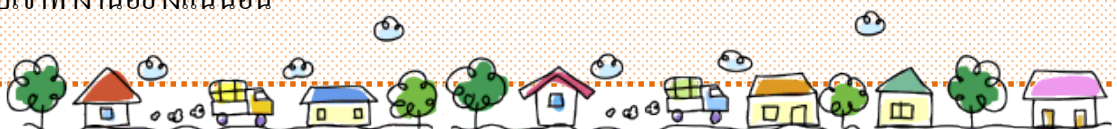
วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้ จุดยอด แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทน คน กลุ่มที่ 2 แทน ตำแหน่งงาน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสามารถของคนกับงาน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังรูป



สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่าเป็นไปไม่ได้ที่บุคคลทั้ง 5 คน ได้รับเข้าทำงานในบริษัทแห่งนี้ทั้งหมด เหตุผลคือ พิจารณา ณเดช ญาญา และมาร์กี้ บุคคลทั้งสามมีความสามารถในการทำงานได้เพียง 2 งานคือ ตำแหน่งงานที่ 3 และงานที่ 4 ดังนั้นจะต้องมีคนใดคนหนึ่งต้องไม่ได้รับเข้าทำงานอย่างแน่นอน



ซึ่งแนวทางในการตอบปัญหานี้สามารถนำไปเชื่อมโยงใช้แก้ปัญหาอื่นๆได้อีกขณะนักเรียน เช่น ปัญหาการจับคู่เดินร่ำ ปัญหาการจัดเครื่องดื่มในงานปาร์ตี้ เป็นต้น ต่อไปนี้เรามาศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับศาสตร์อื่นโดยนำความรู้เรื่องทฤษฎีกราฟมาเชื่อมโยงกันตอนนะละ



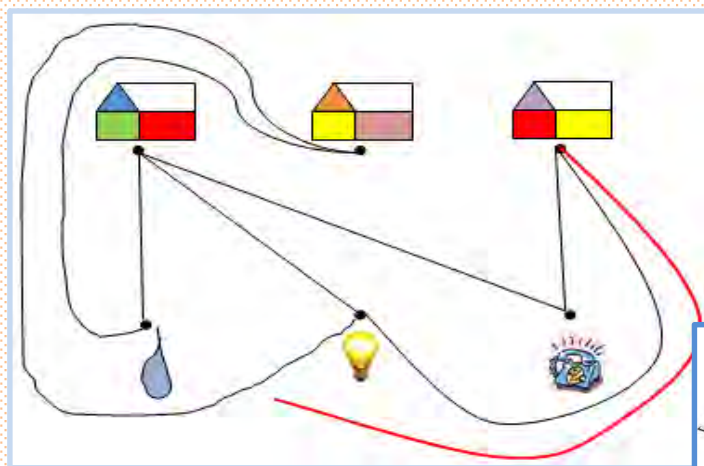
ตัวอย่างที่ 21

ปัญหาด้านวิศวกรรมการออกแบบ

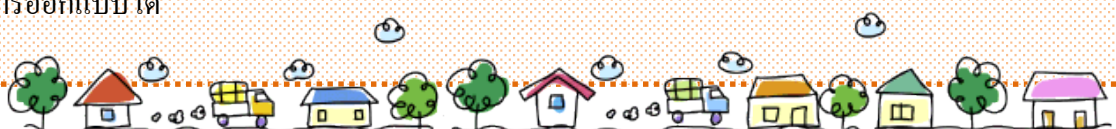
มีบ้าน 3 หลัง ซึ่งแต่ละหลังต้องการสาธารณูปโภค 3 อย่าง คือ ประปา ไฟฟ้า และโทรศัพท์ ถ้าต้องการติดตั้งสาธารณูปโภคเป็นแบบวางท่อใต้ดิน จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่การต่อสาธารณูปโภคทั้งสาม มายังบ้าน 3 หลัง โดยไม่ให้แนวท่อของเครื่องสาธารณูปโภคนั้นวางพาดทับกัน

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้ จุดยอด แทน บ้านและสาธารณูปโภค

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน แนวท่อใต้ดินของเครื่องสาธารณูปโภค
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังรูป



สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่าเป็นไปได้ เนื่องจากจะมีเส้นตัดกันในระนาบ
จากปัญหานี้จะพบว่าการใช้กราฟ สามารถเป็นแบบจำลองที่ช่วยให้เราแก้ปัญหาในด้านวิศวกรรม
การออกแบบได้



ตอนนี้นักเรียนได้ศึกษาความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟและการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟ มาเชื่อมโยงใช้ในการแก้ปัญหของสถานการณ์ปัญหาต่างๆ แล้วนะละ



ต่อไปเราจะนำความรู้ที่ได้ทั้งหมดมาเชื่อมโยงใช้กับสถานการณ์ปัญหาในกิจกรรมที่ 1.8 และกิจกรรมที่ 1.9 กันดีกว่าละเพื่อนๆ



กิจกรรมที่ 1.8 ปัญหาการจับคู่เต็มรูปแบบ และ ปัญหาการจัดขุมหมุม

1. ปัญหาการจับคู่เต็มรูปแบบ

ในงานลีลาศการกุศลแห่งหนึ่ง นายธงชัย นายวิรัช นายปรีชา นายอมร และนายนคร ต้องการออกไปเต้นรำ โดยที่แต่ละคนต้องการคู่ที่ออกไปเต้นรำดังต่อไปนี้

ธงชัย ต้องการเต้นรำกับ ทองจันทร์ หรือ ปิยะมาศ

วิรัช ต้องการเต้นรำกับ ปิยะมาศ หรือ เสาวนีย์

ปรีชา ต้องการเต้นรำกับ ศรีัญญา หรือ อนงค์นาฏ

อมร ต้องการเต้นรำกับ ทองจันทร์ หรือ ปิยะมาศ

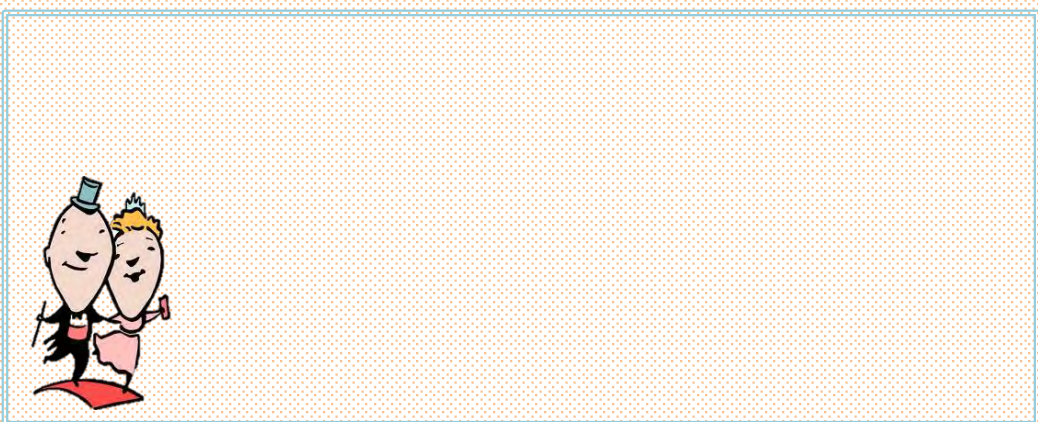
นคร ต้องการเต้นรำกับ ศรีัญญา หรือ เสาวนีย์

จงพิจารณาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่ผู้ชายทั้ง 5 คน ดังกล่าวจะมีคู่เต้นรำทุกคน

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังรูป

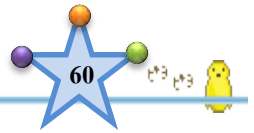


สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

.....

.....

.....



2. ปัญหาการจัดชุมนุม

โรงเรียนมัธยมประสาธน์มีชุมนุมของนักเรียนชั้น ม.4 อยู่ 4 ชุมนุม ได้แก่ ชุมนุมดนตรี ชุมนุมกีฬา ชุมนุมลูกเสือวิสามัญ และชุมนุมอนุรักษ์สิ่งแวดล้อม นักเรียนแต่ละคนอาจจะเป็นสมาชิกได้หลายชุมนุม ในข้อบังคับเกี่ยวกับชุมนุมกำหนดไว้ว่า แต่ละชุมนุมต้องการประชุมสัปดาห์ละ 1 ครั้ง และเวลาที่ใช้ประชุม คือ หลังเลิกเรียนวันอังคาร วันพฤหัสบดี และวันศุกร์ ถ้ากำหนดว่า

มีนักเรียนบางคนอยู่ทั้งชุมนุมดนตรีและลูกเสือวิสามัญ

มีนักเรียนบางคนอยู่ทั้งชุมนุมอนุรักษ์สิ่งแวดล้อมและดนตรี

มีนักเรียนบางคนอยู่ทั้งชุมนุมอนุรักษ์สิ่งแวดล้อมและกีฬา

มีนักเรียนบางคนอยู่ทั้งชุมนุมกีฬาและดนตรี

ดังนั้นจะมีการจัดประชุมอย่างไร จึงจะทำให้สมาชิกทุกคนเข้าร่วมประชุมในชุมนุมของตนเองได้ทุกครั้ง

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังรูป

สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบฝึกเสริมทักษะที่ 1.3

จุดประสงค์ : นักเรียนสามารถ

1. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้กราฟแทนสถานการณ์ต่างๆได้
2. แก้ปัญหาบางปัญหาโดยใช้กราฟเป็นแบบจำลองได้

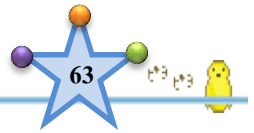
ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กราฟและแก้ปัญหา

1. จงสร้างแบบจำลองแสดงจังหวัดที่มีพรมแดนติดกันโดยให้ จุดแทน จังหวัด เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าจังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน เมื่อกำหนดแผนที่ ดังรูป



ที่มาแผนที่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ <http://www.panteethai.com>

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้



2. ในวันแห่งความรัก พิทยาเตรียมแผนการว่า เขาจะมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบซึ่งมีทั้งหมด 4 คน คือ โบว์ นา นัท และเอม ดังนั้นเขาจึงสั่งซื้อดอกกุหลาบ 4 ช่อ สำหรับคนทั้งสี่ ซึ่งดอกกุหลาบมีชื่อละหนึ่งสี คือ สีแดง สีชมพู สีขาว และสีส้ม โบว์ชอบดอกกุหลาบสีชมพู และสีส้ม นาชอบดอกกุหลาบสีแดงและสีขาว นัทชอบดอกกุหลาบสีแดงและสีส้ม เอมชอบดอกกุหลาบสีขาวและชมพู พิทยาสามารถมอบดอกกุหลาบให้กับคนที่เขาชอบได้ตรงตามความชอบหรือไม่

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ได้ดังนี้ ให้จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ

สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. มีนักเรียนอยู่ 4 คน คือ ปวริศ ญัฐพงษ์ มนัสพล และพรมาชะ โดยที่นักเรียนแต่ละคนชอบเล่นกีฬา ดังนี้

ปวริศชอบเล่นฟุตบอลและว่ายน้ำ

ญัฐพงษ์ชอบเล่นปิงปองและฟุตบอล

มนัสพลชอบเล่นเทนนิสและฟุตบอล

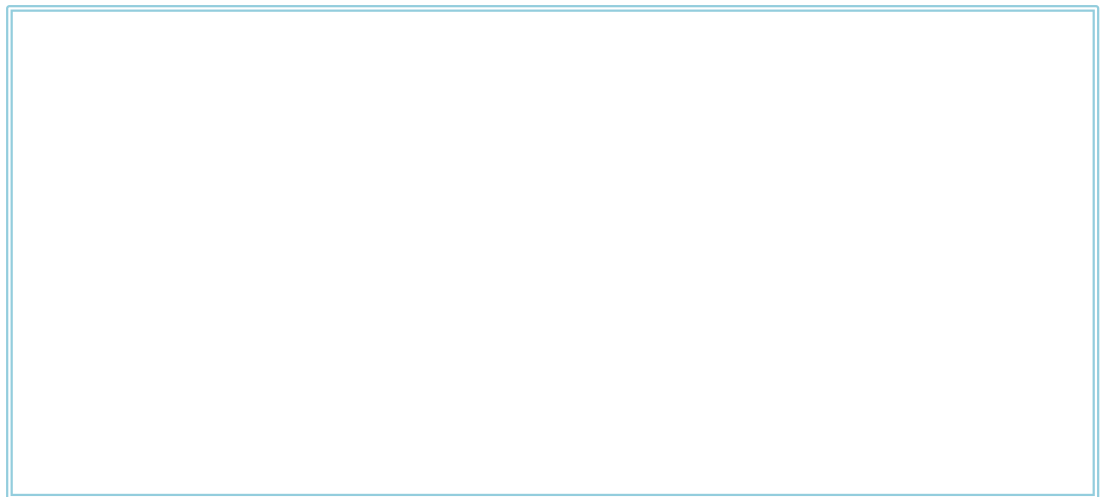
พรมาชะชอบเล่นปิงปอง เทนนิส และว่ายน้ำ

ถ้าจัดให้นักเรียน 1 คน เล่นกีฬาเพียง 1 ชนิด จะจัดอย่างไร จึงจะจัดให้นักเรียนแต่ละคนได้เล่นกีฬาชนิดที่ตนเองชอบ

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ



สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

.....

.....

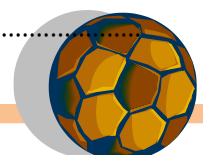
.....

.....

.....

.....

.....



4. ในอำเภอแห่งหนึ่งได้มีการสร้างถนนเชื่อมสถานที่สำคัญๆไว้ดังนี้

มีถนนระหว่างโรงเรียนกับวัด 1 สาย

มีถนนระหว่างวัดกับที่ว่าการอำเภอ 1 สาย

มีถนนระหว่างที่ว่าการอำเภอกับตลาด 1 สาย

มีถนนระหว่างที่ว่าการอำเภอกับสถานีขนส่ง 1 สาย

มีถนนระหว่างที่ว่าการอำเภอกับโรงพยาบาล 1 สาย

มีถนนระหว่างโรงพยาบาลกับสถานีขนส่ง 1 สาย

มีถนนระหว่างสถานีขนส่งกับตลาด 1 สาย

มีถนนระหว่างสถานีตำรวจกับสถานีขนส่ง 1 สาย

มีถนนระหว่างสถานีตำรวจกับตลาด 1 สาย

มีถนนระหว่างสถานีตำรวจกับโรงเรียน 1 สาย

มีถนนระหว่างโรงเรียนกับตลาด 1 สาย

นักเรียนคนหนึ่งสามารถปั่นจักรยานจากโรงเรียนไปสถานีตำรวจโดยผ่านถนนทุกสาย

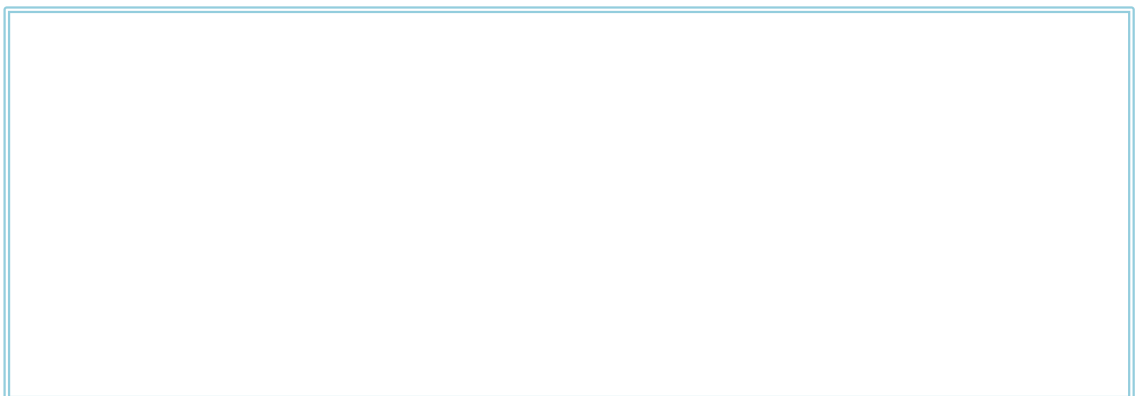
สายละ 1 ครั้งได้หรือไม่

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้

ให้จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

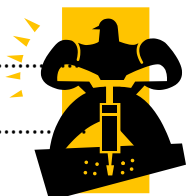
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ



สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

.....

.....



7. ในการจัดการสอนของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ซึ่งลงทะเบียนเรียนทั้งหมด 6 วิชา คือ วิชาภาษาไทย วิชาภาษาอังกฤษ วิชาคณิตศาสตร์ วิชาสังคม วิชาสุขศึกษา และวิชาวิทยาศาสตร์ โดยที่ทราบมาว่า

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาไทยและวิชาคณิตศาสตร์

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาไทยและวิชาสุขศึกษา

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิชาสุขศึกษา

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาไทยและวิชาภาษาอังกฤษ

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาอังกฤษและวิชาสังคมศึกษา

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาภาษาอังกฤษและวิชาวิทยาศาสตร์

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาวิทยาศาสตร์และวิชาสังคมศึกษา

มีนักเรียนบางคนเรียนวิชาสุขศึกษาและวิชาสังคมศึกษา

เป็นไปได้หรือไม่หากทางโรงเรียนต้องการจัดการสอนทั้ง 6 วิชา โดยใช้เวลา 3 ชั่วโมง แต่ละวิชาใช้เวลาสอน 1 ชั่วโมง จงยกตัวอย่างในการจัดการสอนทั้ง 6 วิชา ให้ได้ตามเงื่อนไขของโรงเรียน

วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้ให้

จุดยอด แทน

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ

สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า

จงหาว่า

- (1) มานพมีลูกกี่คน เป็นลูกสาวกี่คน ลูกชายกี่คน
- (2) ภรรยาของพิชัยคือใคร
- (3) วินัย พิชัย และจันทร์เพ็ญ เป็นอะไรกับอาคม

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary-ruled notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of white paper with horizontal dashed lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

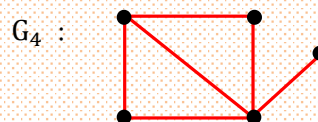
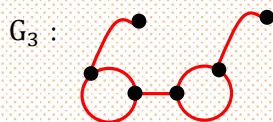
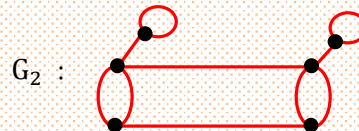
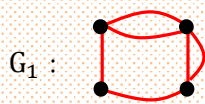
This image shows a full page of primary-ruled paper. It features ten sets of horizontal lines across the page. Each set consists of three lines: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The lines are evenly spaced and extend from the left margin to the right edge of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

แบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย เลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ เวลา 10 นาที
2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย × ลงบนคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

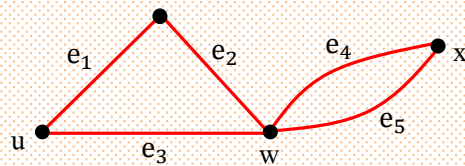
1. กำหนดกราฟ G_1, G_2, G_3 และ G_4 ดังรูป



ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. G_1 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวน
 - ข. G_2 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน
 - ค. G_3 ไม่ใช่กราฟอย่างง่าย เพราะ มีวงวน
 - ง. G_4 เป็นกราฟหลายเชิง เพราะ มีจุดยอดหลายจุด
2. คำว่า “กราฟ” ในทฤษฎีกราฟเบื้องต้นหมายถึงสิ่งใดต่อไปนี้
 - ก. เซตของจุดยอดที่ไม่เซตว่างและเซตของเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด
 - ข. เซตของจุดยอดและเซตของคู่อันดับในความสัมพันธ์ที่ไม่ใช่เซตว่าง
 - ค. เซตของมุมและเซตของด้านของรูปเหลี่ยม
 - ง. เซตของด้านต่างๆของรูปหลายเหลี่ยมและเซตของจำนวนต่างๆที่บอกความยาวของด้านต่างๆ

3. กำหนด G เป็นกราฟ ดังรูป



- ก. $V(G) = \{u, v, w, x\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- ข. $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$
- ค. $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- ง. $V(G) = \{u, v, w, x\}$ และ $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

4. การแข่งขันแบดมินตัน มีผู้สมัคร 6 คนโดยการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมดคณะกรรมการแข่งขันต้องการทราบว่าต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่ พิจารณาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสถานการณ์โดยใช้กราฟ ดังต่อไปนี้

1) ให้จุดกลุ่มที่ 1 แทน ผู้สมัครแข่งขัน

จุดกลุ่มที่ 2 แทน คู่แข่งขันของผู้สมัคร

2) ให้เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใดๆ แทน การแข่งขันของผู้สมัครแข่งขันและคู่แข่งขัน

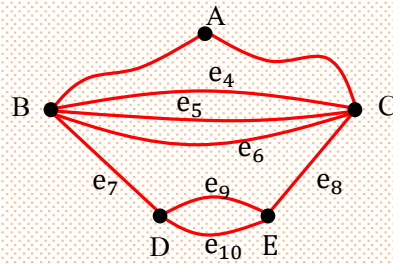
ข้อความข้างต้นข้อใดถูกต้อง

- ก. ข้อ 1) และ ข้อ 2) ถูก
- ข. ข้อ 1) ผิด และ ข้อ 2) ถูก
- ค. ข้อ 1) ถูก และ ข้อ 2) ผิด
- ง. ข้อ 1) และ ข้อ 2) ผิด

5. จากการแข่งขันแบดมินตันในข้อ 4. คณะกรรมการต้องการแข่งขันทั้งหมดจำนวนกี่คู่

- ก. 25 คู่
- ข. 20 คู่
- ค. 15 คู่
- ง. 10 คู่

ใช้กราฟต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 6 – 9



6. เส้นเชื่อมใดต่อไปนี้ ไม่ใช่ เส้นเชื่อมขนาน

- ก. e_2 และ e_3
- ข. e_4 และ e_5
- ค. e_5 และ e_6
- ง. e_9 และ e_{10}

7. วงวนตรงกับข้อใด

- ก. e_1
- ข. e_4
- ค. e_7
- ง. e_9

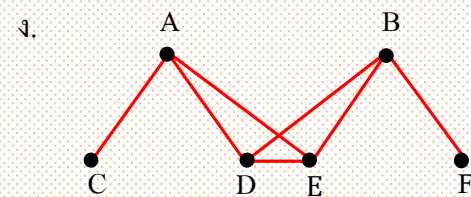
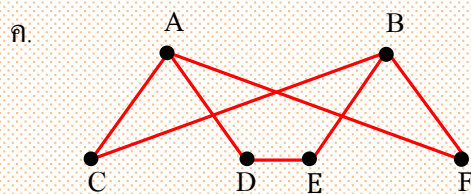
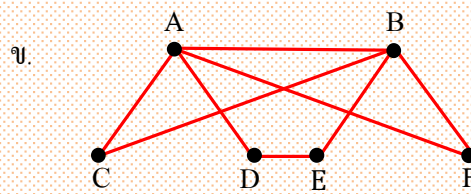
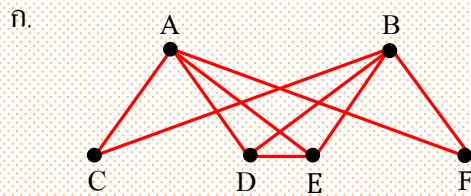
8. เส้นเชื่อมใดเกิดกับจุดยอด A

- ก. e_1
- ข. e_2
- ค. e_3
- ง. e_4

9. ข้อใดเป็นจุดยอดประชิด

- ก. จุดยอด A และจุดยอด E
- ข. จุดยอด C และจุดยอด D
- ค. จุดยอด D และจุดยอด E
- ง. จุดยอด B และจุดยอด E

10. กำหนด $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$ และ $E(G) = \{AC, AD, AF, BC, BE, BF, DE\}$
 ข้อใดเป็นกราฟ G ที่เกิดจาก $V(G)$ และ $E(G)$





เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

ข้อ	เฉลย
1.	ค
2.	ค
3.	ก
4.	ง
5.	ก
6.	ข
7.	ก
8.	ง
9.	ค
10.	ข





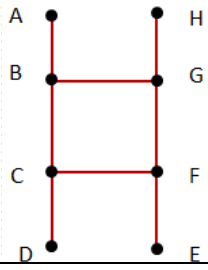
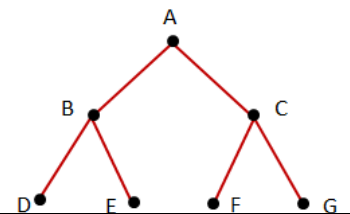
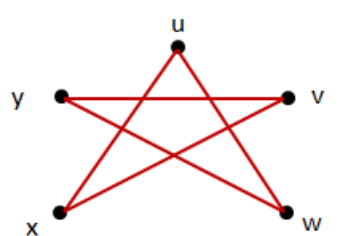

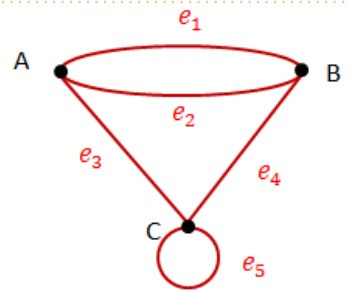
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น
ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

ข้อ	เฉลย
1.	ง
2.	ก
3.	ง
4.	ข
5.	ค
6.	ก
7.	ก
8.	ก
9.	ค
10.	ค



เฉลยกิจกรรมที่ 1.2

จากกราฟ G ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหา เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$

กราฟ G	เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$
<p>1.</p> 	$V(G) = \{A, B, C, D, E, \textcolor{red}{F}, \textcolor{red}{G}, \textcolor{red}{H}\}$ $E(G) = \{AB, BC, CD, EF, \textcolor{red}{FG}, \textcolor{red}{GH}, \textcolor{red}{BG}, \textcolor{red}{CF}\}$
<p>2.</p> 	$V(G) = \{A, B, C, D, E, \textcolor{red}{F}, \textcolor{red}{G}\}$ $E(G) = \{AB, AC, BD, BE, \textcolor{red}{CF}, \textcolor{red}{CG}\}$
<p>3.</p> 	$V(G) = \{u, v, \textcolor{red}{w}, \textcolor{red}{x}, \textcolor{red}{y}\}$ $E(G) = \{uw, wy, yv, \textcolor{red}{vx}, \textcolor{red}{xu}\}$
<p>4.</p> 	$V(G) = \{\textcolor{red}{A}\}$ $E(G) = \textcolor{red}{\emptyset}$
<p>5.</p> 	$V(G) = \{\textcolor{red}{A}, \textcolor{red}{B}, \textcolor{red}{C}\}$ $E(G) = \{\textcolor{red}{e_1}, \textcolor{red}{e_2}, \textcolor{red}{e_3}, \textcolor{red}{e_4}, \textcolor{red}{e_5}\}$

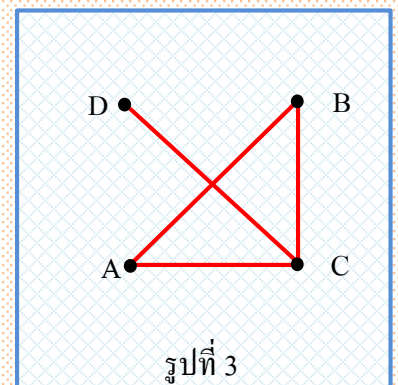
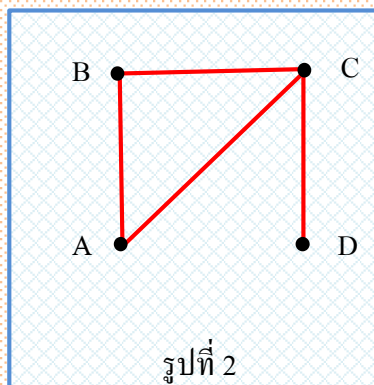
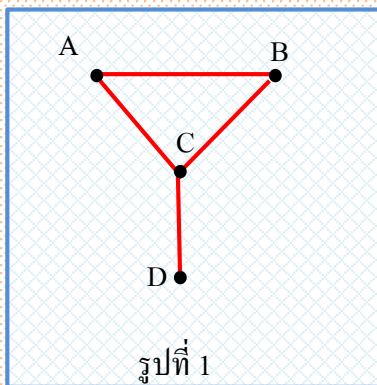
เฉลยกิจกรรมที่ 1.3

1. ให้ G เป็นกราฟซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงเขียนกราฟ G ให้สมบูรณ์เมื่อกำหนดจุดยอดมาให้

1.1 $V(G) = \{A, B, C, D\}$

$E(G) = \{AB, AC, BC, CD\}$

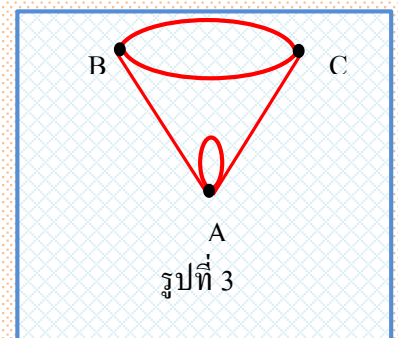
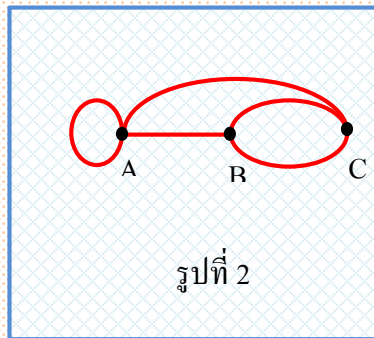
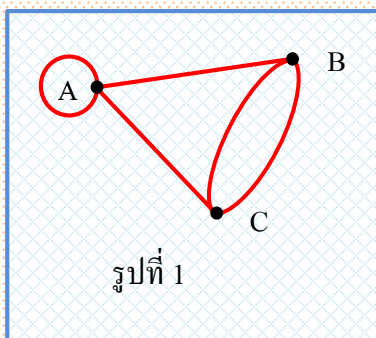
วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 4 จุด และเส้นเชื่อม 4 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น



1.2 $V(G) = \{A, B, C\}$

$E(G) = \{AA, AB, AC, BC, CB\}$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 3 จุด และเส้นเชื่อม 5 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น

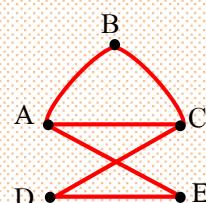
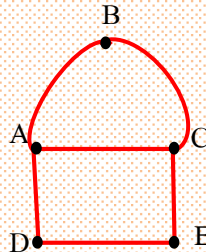
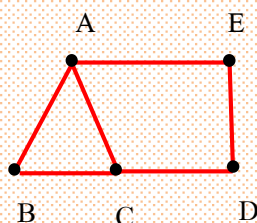


2. ให้กราฟ G ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ที่กำหนดต่อไปนี้ จงเขียนกราฟที่ได้จาก $V(G)$ และ $E(G)$ มา 3 กราฟ

2.1 $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$

$E(G) = \{AB, AC, AE, BC, CD, ED\}$

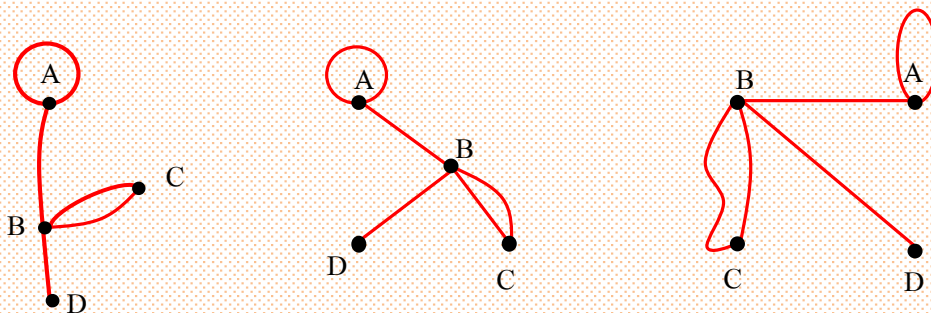
วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 5 จุด และเส้นเชื่อม 6 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น



$$2.2 \quad V(G) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G) = \{AA, AB, BD, BC, CB\}$$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 4 จุด และเส้นเชื่อม 5 เส้น สามารถเขียนกราฟได้หลายแบบ เช่น



3. จากกิจกรรมการเขียนกราฟในข้อ 1 ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้โดย เติมเครื่องหมาย ✓

หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือ ✕ หน้าข้อความที่ผิด

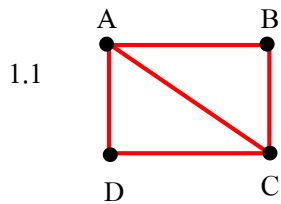
- ✓ 2.1 กราฟ G ที่กำหนด เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้สามารถเขียนกราฟ G ได้หลายรูปแบบ
- ✓ 2.2 การเขียนตำแหน่งของจุดยอดในกราฟ G สามารถเขียน ณ ตำแหน่งใดก็ได้โดยไม่มีรูปแบบการเขียนตำแหน่งของจุดยอดที่แน่นอน
- ✕ 2.3 เส้นเชื่อมของกราฟ G จะเป็นส่วนของเส้นตรงได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น
- ✓ 2.4 ความยาวของเส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะยาวเท่าใดก็ได้
- ✕ 2.5 เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟสามารถลากตัดกันได้โดยที่จุดตัดของเส้นทั้งสองถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ

ดังนั้นข้อสังเกตที่นักเรียนได้จากการเขียนกราฟ ในกิจกรรมที่ 1.3 ทั้งหมด คือ

1. กราฟ G ที่กำหนด เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้สามารถเขียนกราฟ G ได้หลายรูป
2. จะกำหนดตำแหน่งของจุดยอด ณ ตำแหน่งใดก็ได้
3. เส้นเชื่อมของกราฟ G จะเป็นส่วนของเส้นตรงหรือเส้นโค้ง และมีความยาวเท่าใดก็ได้
4. เส้นเชื่อมสองเส้นของกราฟสามารถลากตัดกันได้โดยที่จุดตัดของเส้นทั้งสองไม่ถือว่าเป็นจุดยอดของกราฟ

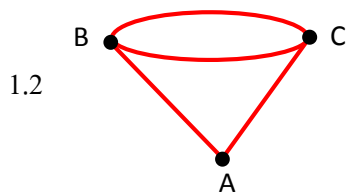
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

1. จงหาเซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ ของกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



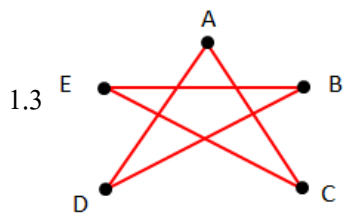
$$V(G) = \{A, B, C, D\}$$

$$E(G) = \{AB, BC, CD, DA, AC\}$$



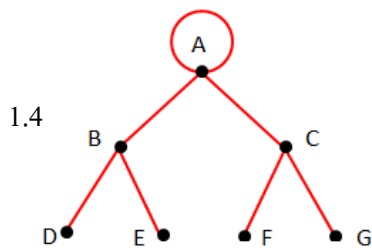
$$V(G) = \{A, B, C\}$$

$$E(G) = \{AB, BC, CB, CA\}$$



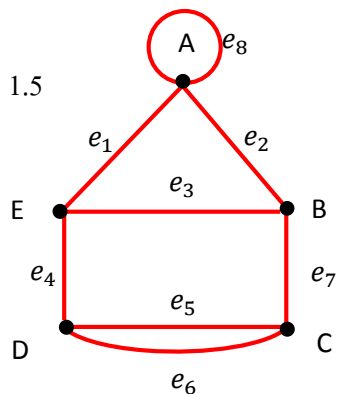
$$V(G) = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E(G) = \{AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA\}$$



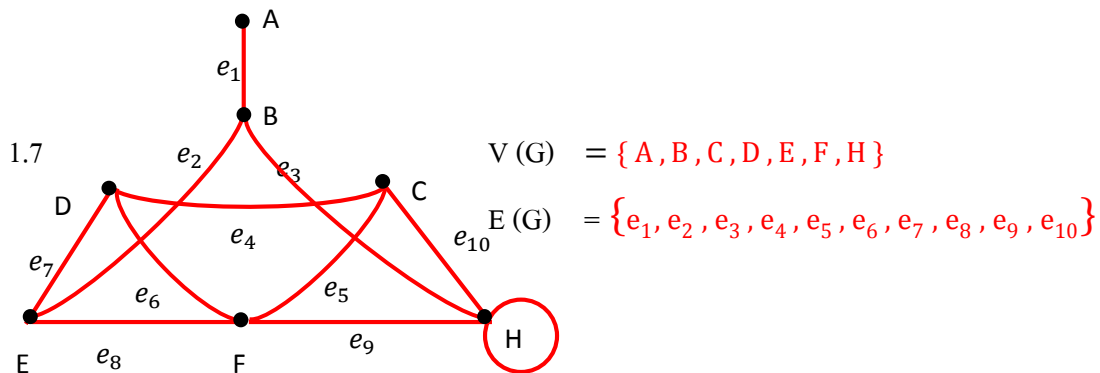
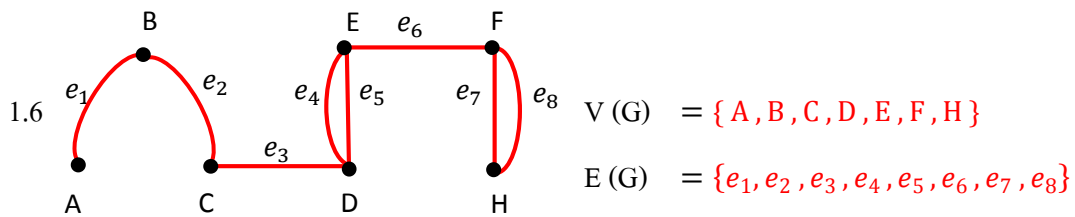
$$V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

$$E(G) = \{AA, AB, AC, BD, BE, CF, CG\}$$



$$V(G) = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

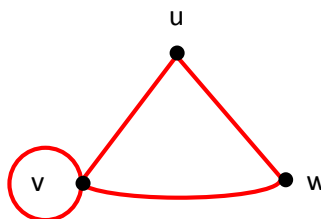


2. จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนด เซตของจุดยอด $V(G)$ และเซตของเส้นเชื่อม $E(G)$ มาให้

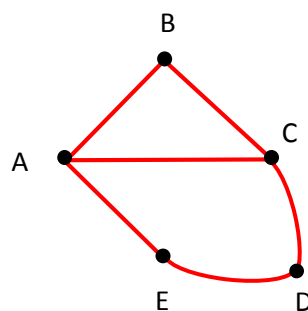
หมายเหตุ การเขียนกราฟ G สามารถเขียนได้หลายรูป ดังนั้น กราฟ G ที่เฉลยเป็นเพียง

คำตอบ คำตอบหนึ่งเท่านั้น

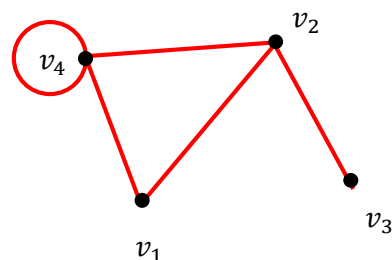
2.1 $V(G) = \{u, v, w\}$
 $E(G) = \{uv, uw, vw, vw\}$



2.2 $V(G) = \{A, B, C, D, E\}$
 $E(G) = \{AB, AC, AE, BC, CD, ED\}$



2.3 $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
 $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$

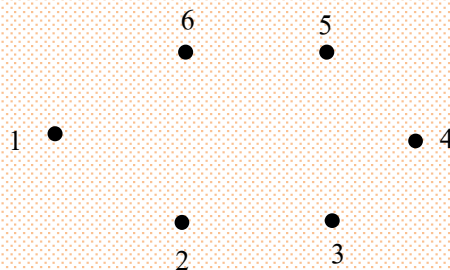


3. จงเขียนกราฟ G เมื่อกำหนดให้

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A > B \text{ และ } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$$

วิธีทำ กำหนดจุดยอดของ $V(G)$ ดังรูป



พิจารณา การเขียนเซต $E(G) = \{AB \mid A, B \in V(G) \text{ ซึ่ง } A > B \text{ และ } A + B \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$

แบบแจกแจงสมาชิกซึ่ง A และ B เป็นสมาชิกของ $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ต้องพิจารณา 2 เงื่อนไข คือ เงื่อนไขที่ 1 $A > B$ และ เงื่อนไขที่ 2 ถ้า $A + B$ แล้วผลบวกที่ได้ต้องเป็นจำนวนคู่ นั่นคือ

เมื่อ $A = 3$ และ $B = 1$ ซึ่ง $3 > 1$ และ $3 + 1 = 4 \in$ จำนวนคู่

เมื่อ $A = 4$ และ $B = 2$ ซึ่ง $4 > 2$ และ $4 + 2 = 6 \in$ จำนวนคู่

เมื่อ $A = 5$ และ $B = 1$ ซึ่ง $5 > 1$ และ $5 + 1 = 6 \in$ จำนวนคู่

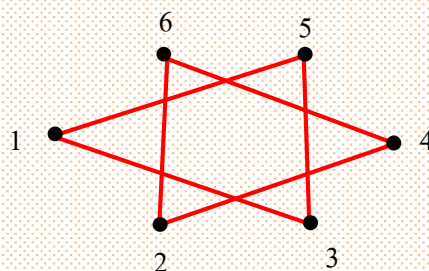
เมื่อ $A = 5$ และ $B = 3$ ซึ่ง $5 > 3$ และ $5 + 3 = 8 \in$ จำนวนคู่

เมื่อ $A = 6$ และ $B = 2$ ซึ่ง $6 > 2$ และ $6 + 2 = 8 \in$ จำนวนคู่

เมื่อ $A = 6$ และ $B = 4$ ซึ่ง $6 > 4$ และ $6 + 4 = 10 \in$ จำนวนคู่

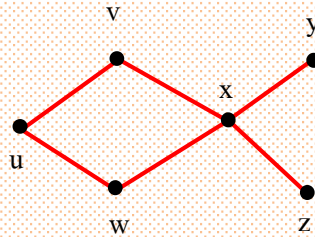
ดังนั้น $E(G) = \{31, 42, 51, 53, 62, 64\}$

นำมาเขียนกราฟ ได้กราฟ G ดังรูป



เฉลยกิจกรรมที่ 1.4

1. กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จะเห็นว่า

จุดยอด u และ จุดยอด v	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม uv
จุดยอด u และ จุดยอด w	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม uw
จุดยอด v และ จุดยอด x	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม vx
จุดยอด w และ จุดยอด x	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม wx
จุดยอด x และ จุดยอด y	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม xy
จุดยอด x และจุดยอด z	เป็นจุดยอดประชิด	เนื่องจาก มีเส้นเชื่อม xz

และ เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด u คือ เส้นเชื่อม uv และ uw

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด v คือ เส้นเชื่อม vu และ vx

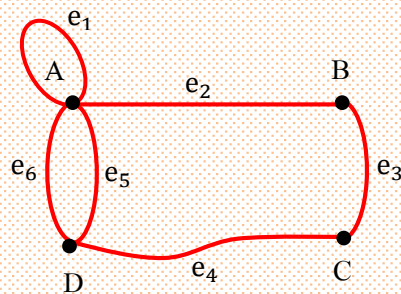
เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด w คือ เส้นเชื่อม wu และ wx

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด x คือ เส้นเชื่อม xv , xy , xw และ xz

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด y คือ เส้นเชื่อม yx

เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด z คือ เส้นเชื่อม zx

2. กำหนดกราฟ G ต่อไปนี้



จากกราฟ G จงเติมเครื่องหมาย \checkmark หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือเครื่องหมาย \times หน้าข้อความที่ผิด

- \checkmark 1. จุดยอด A และจุดยอด D เป็นจุดยอดประชิดเนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_1, e_2, e_5 และ e_6
- \times 2. จุดยอด B และ จุดยอด D เป็นจุดยอดประชิดเนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_4
- \checkmark 3. เส้นเชื่อม e_5 เกิดกับจุดยอด A
- \times 4. เส้นเชื่อม e_4 เกิดกับจุดยอด B
- \checkmark 5. เส้นเชื่อม e_3 เกิดกับจุดยอด C
- \times 6. จุดยอด C และ จุดยอด D เป็นจุดยอดประชิด เนื่องจากมีเส้นเชื่อม e_3

สรุปได้ว่า

จุดยอด u และจุดยอด v ของกราฟ เป็นจุดยอดประชิด (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อ มีเส้นเชื่อม

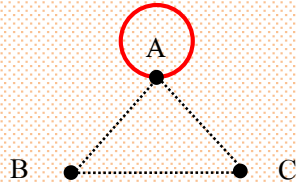
ระหว่างจุดยอดทั้งสอง

เส้นเชื่อม e ของกราฟเกิดกับ (incident) จุดยอด v ถ้าจุดยอด v เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม e

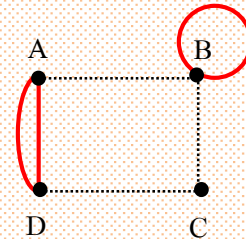
เฉลยกิจกรรมที่ 1.5

1. จากกราฟ G ที่กำหนดให้ จงเขียนเส้นเชื่อมที่เป็นเส้นเชื่อมขนาน(parallel edges) และ วงวน (loop) ที่ปรากฏในกราฟตามรอยเส้นประให้ถูกต้อง

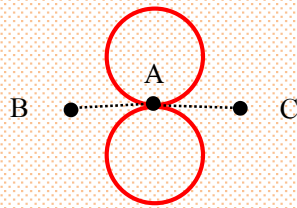
1.1



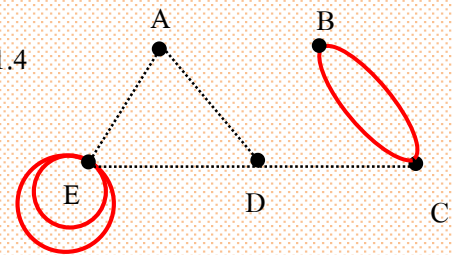
1.2



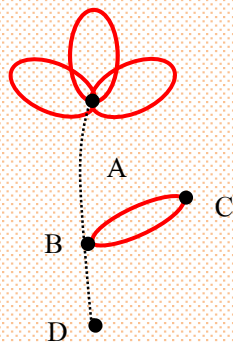
1.3



1.4

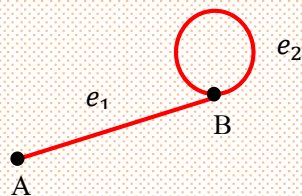


1.5



2. จงหาเส้นเชื่อมขนาน (parallel edges) และวงวน (loop) จากกราฟต่อไปนี้

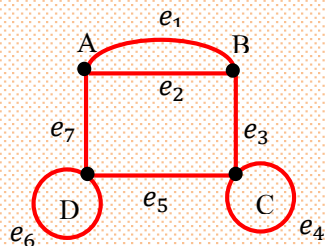
1.1



เส้นเชื่อมขนาน คือ ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน

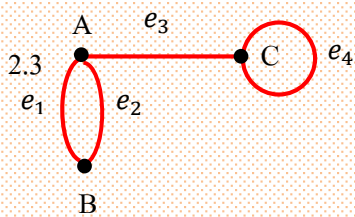
วงวน คือ e_2

2.2



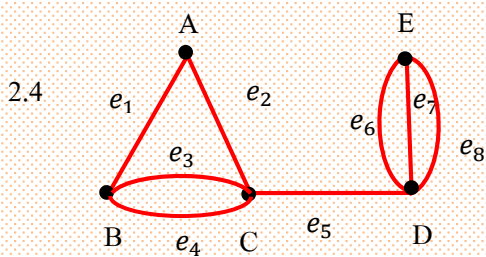
เส้นเชื่อมขนาน คือ e_1, e_2

วงวน คือ e_4, e_6



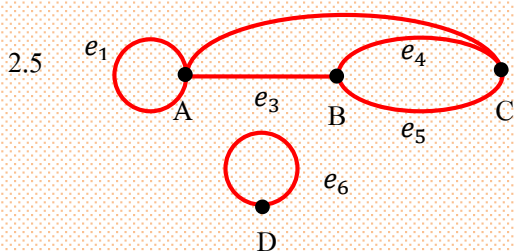
เส้นเชื่อมขนาน คือ e_1, e_2

วงวน คือ e_4



เส้นเชื่อมขนาน คือ e_3, e_4 และ e_6, e_7, e_8

วงวน คือ ไม่มีวงวน



เส้นเชื่อมขนาน คือ e_4, e_5

วงวน คือ e_1, e_6

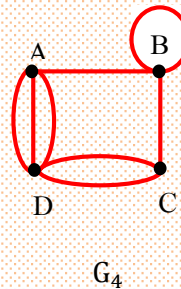
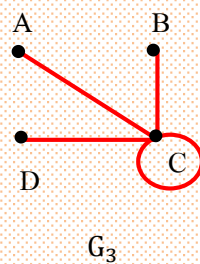
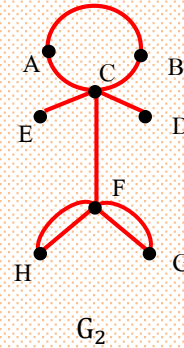
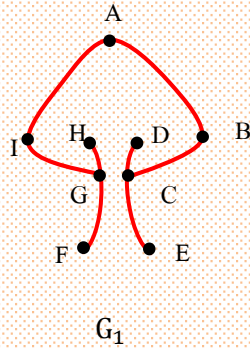
ข้อสรุปที่ได้

เส้นเชื่อมขนาน(parallel edges) คือ เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมจุดยอดคู่เดียวกัน

วงวน(loop)คือ เส้นเชื่อมที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดยอดเดียวกัน

เฉลยกิจกรรมที่ 1.6

1. กราฟ G ในข้อต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงเดียว (simple graph) หรือ กราฟหลายเชิง (multi graph) พร้อมทั้งบอกเหตุผลประกอบ



กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว เนื่องจาก ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและวงวน

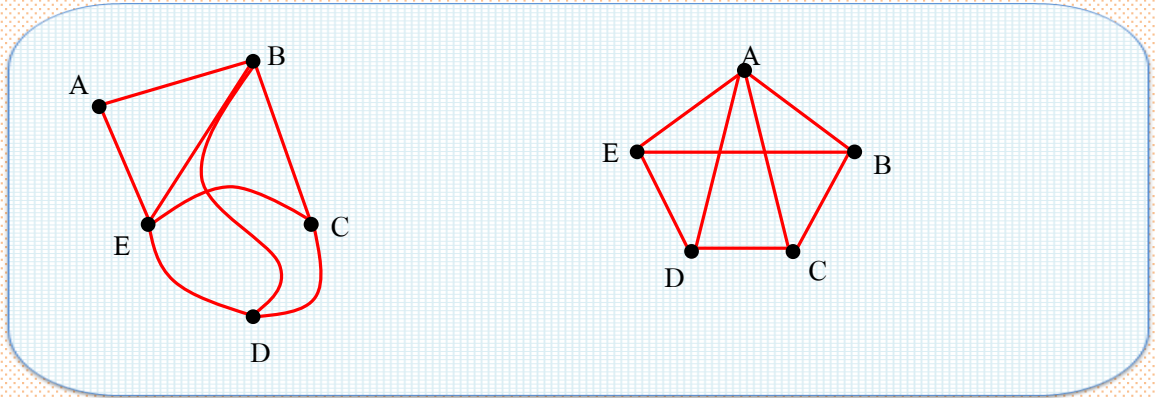
กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจาก มีเส้นเชื่อมขนาน

กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจาก มีวงวน

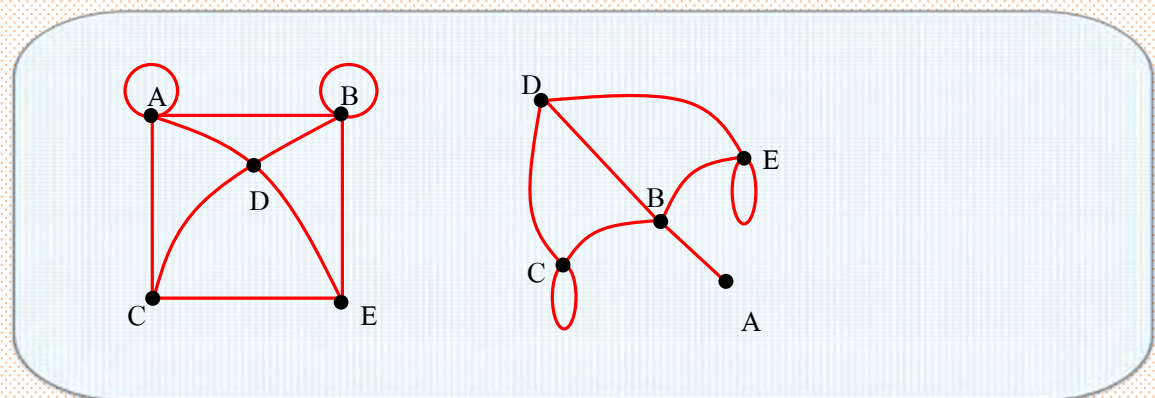
กราฟ G_4 เป็นกราฟหลายเชิง เนื่องจาก มีเส้นเชื่อมขนานและวงวน

2. จงยกตัวอย่างกราฟ G_1 , G_2 และ G_3 ซึ่งแต่ละกราฟต้องมีจุดยอด 5 และเส้นเชื่อม 8 เส้น ตามเงื่อนไข ดังนี้

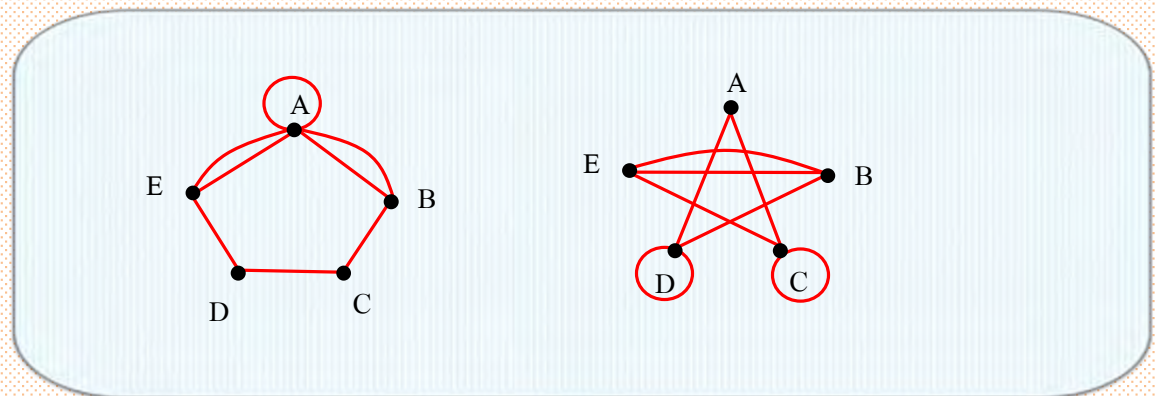
2.1 กราฟ G_1 เป็นกราฟเชิงเดียว ยกตัวอย่างเช่น



2.2 กราฟ G_2 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวน ยกตัวอย่างเช่น

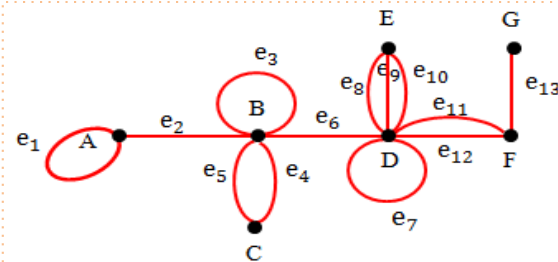


2.3 กราฟ G_3 เป็นกราฟหลายเชิงที่มีวงวน และเส้นเชื่อมขนาน ยกตัวอย่างเช่น



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

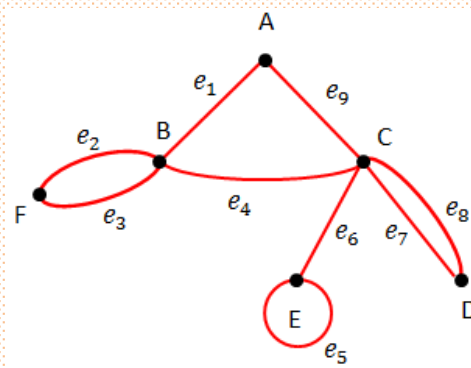
1. กำหนดกราฟ G ดังรูป



จงหา

- 1.1 ววงวน ของจุดยอด A คือ e_1
- 1.2 ววงวน ของจุดยอด B คือ e_3
- 1.3 ววงวน ของจุดยอด D คือ e_7
- 1.4 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด B และจุดยอด C คือ e_4 และ e_5
- 1.5 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด D และจุดยอด E คือ e_8, e_9 และ e_{10}
- 1.6 เส้นเชื่อมขนาน ของจุดยอด D และจุดยอด F คือ e_{11} และ e_{12}

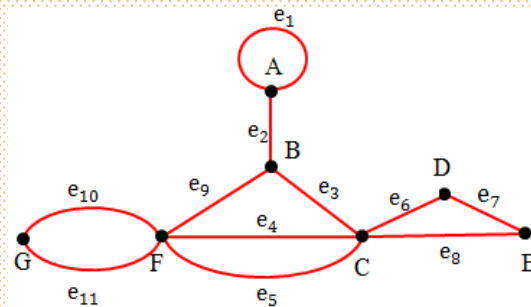
2. จงเติมข้อความจากกราฟ G ที่กำหนดให้



- 2.1 $V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$
- 2.2 $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$
- 2.3 เส้นเชื่อมขนานของจุดยอด B และจุดยอด F คือ e_2 และ e_3
- 2.4 ววงวนของจุดยอด E คือ e_5
- 2.5 จุดยอดประชิดของเส้นเชื่อม e_9 คือ จุดยอด A และจุดยอด C
- 2.6 จุดยอดประชิดของจุดยอด A คือ จุดยอด B และ จุดยอด C

- 2.7 เส้นเชื่อมขนานที่เกิดกับจุดยอด C คือ e_7 และ e_8
- 2.8 เส้นเชื่อม e_6 เกิดกับจุดยอด C และจุดยอด E
- 2.9 เส้นเชื่อมขนานของจุดยอด C และจุดยอด D คือ e_7 และ e_8
- 2.10 จุดยอดซึ่งไม่ใช่จุดยอดประชิดของจุดยอด A คือ จุดยอด D, จุดยอด E และ จุดยอด F

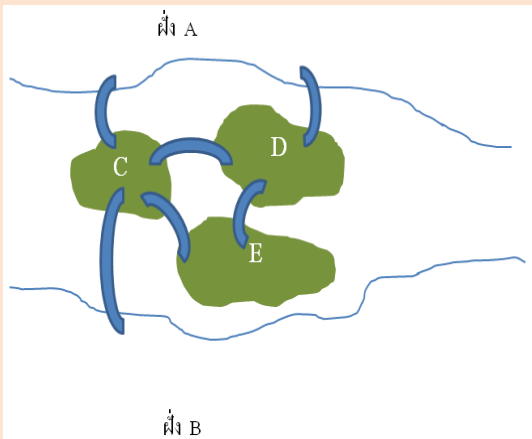
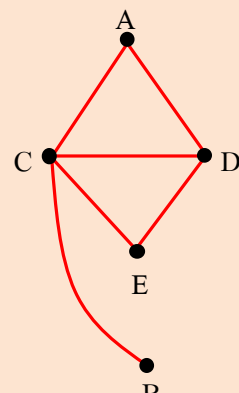
3. จงเติมเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูกต้อง หรือ × หน้าข้อความที่ผิด



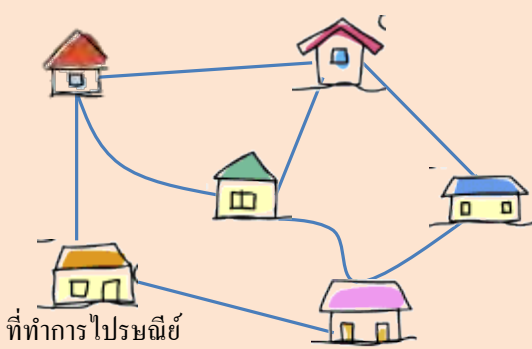
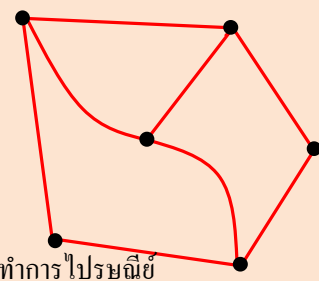
- ✓ 3.1 เส้นเชื่อม e_1 เป็นวงวน
- ✓ 3.2 เส้นเชื่อม e_4 และ e_5 เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- × 3.3 จุดยอด F มีวงวน
- ✓ 3.4 จุดยอด F และจุดยอด C มีเส้นเชื่อมขนาน
- × 3.5 จุดยอด A และจุดยอด F เป็นจุดยอดประชิด
- ✓ 3.6 จุดยอดประชิดของจุดยอด B คือ จุดยอด A, จุดยอด C และจุดยอด F
- ✓ 3.7 เส้นเชื่อม e_8 เกิดกับจุดยอด E และจุดยอด C
- ✓ 3.8 เส้นเชื่อม e_4 และ e_5 เกิดกับจุดยอด F และจุดยอด C
- × 3.9 เส้นเชื่อม e_3 และ e_9 เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- × 3.10 จุดยอด C และจุดยอด F มีจำนวนเส้นเชื่อมขนาน 4 เส้น

เฉลยกิจกรรมที่ 1.7

- สมมุติว่าสวนสาธารณะแห่งหนึ่งมีเกาะ 3 เกาะ คือ C , D ,E และมีสะพานเชื่อมระหว่างเกาะและฝั่ง A กับ ฝั่ง B ดังรูป ให้นักเรียนสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์นี้โดยให้จุดแทนเกาะและฝั่ง และเส้นเชื่อมแทนสะพาน


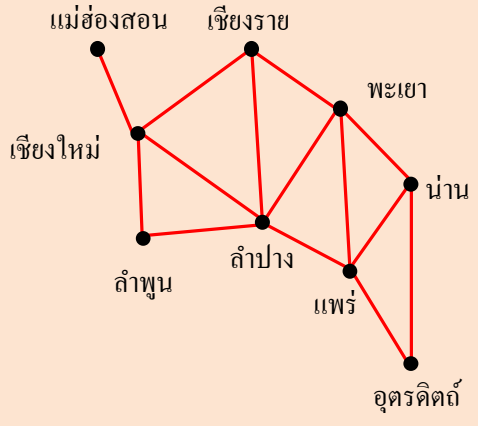
สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	<p>ให้ จุดยอด แทน ฝั่งและเกาะ เส้นเชื่อม แทน สะพานเชื่อมฝั่งกับเกาะ และเกาะกับเกาะ สามารถเขียนแบบจำลอง คณิตศาสตร์ ได้ดังนี้</p> 

- บุรุษไปรษณีย์คนหนึ่งต้องไปส่งจดหมายทั้งหมด 5บ้าน โดยที่แต่ละบ้านตั้งอยู่ริมถนน ดังภาพ
ต่อไปนี้ ให้ จุดยอด แทน บ้านแต่ละหลัง เส้นเชื่อมแทนถนน

สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	<p>ให้ จุดยอด แทน บ้านและไปรษณีย์ เส้นเชื่อม แทน ถนน</p> 

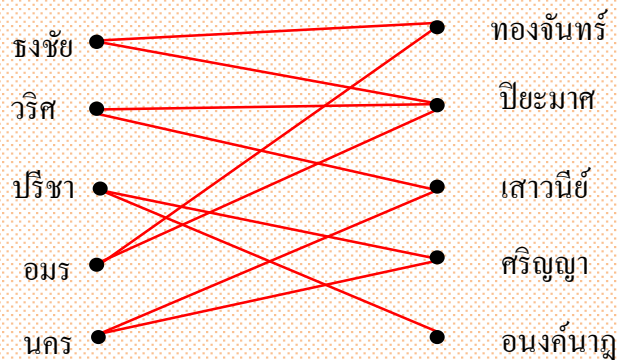
3. จงสร้างแบบจำลองแสดงจังหวัดที่มีพรมแดนติดกัน

โดยให้จุด แทน จังหวัด เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าจังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน เมื่อกำหนดแผนที่ดังรูป

สถานการณ์ปัญหา	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
	<p>ให้ จุดยอด แทน จังหวัด</p> <p>เส้นเชื่อม แทน ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าจังหวัดสองจังหวัดมีพรมแดนติดกัน</p> 

เฉลยกิจกรรมที่ 1.8 ปัญหาการจับคู่เด่นร้าย และ ปัญหาการจัดชุมนุม

1. วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์
 ได้ดังนี้ ให้จุดยอด แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทน ผู้ชาย และกลุ่มที่ 2 แทน ผู้หญิง
 เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ที่ 2 คนนั้นเป็นคู่ที่ต้องการแต่งงานกัน
 ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนตัวอย่างแบบจำลองได้ ดังรูป



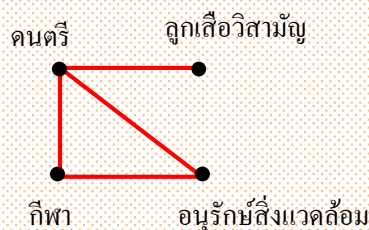
สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า ผู้ชายทั้ง 5 คน ดังกล่าวมีคู่เด่นร้ายทุกคน ดังนี้

ผู้ชาย	แบบที่ 1 จับคู่กับ	แบบที่ 2 จับคู่กับ
ธงชัย	ทองจันทร์	ปิยะมาศ
วริศ	เสาวนีย์	เสาวนีย์
ปรีชา	อนงค์นาฏ	อนงค์นาฏ
อมร	ปิยะมาศ	ทองจันทร์
นคร	ศริญญา	ศริญญา

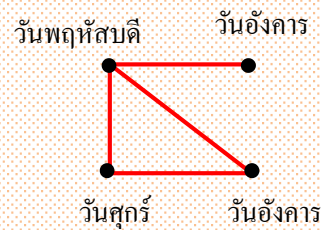
2. วิธีทำ จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์
ได้ดังนี้ ให้จุดยอด แทน **ชุมนุมทั้ง 4 ชุมนุม**

เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน **ความสัมพันธ์ที่แสดงว่ามีนักเรียนเป็นสมาชิกอยู่
ทั้ง 2 ชุมนุมที่เป็นจุดยอด**

ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนตัวอย่างแบบจำลองได้ ดังรูป



รูปที่ (1)



รูปที่ (2)

สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า มีวิธีการจัดประชุมที่สามารถทำให้สมาชิกทุกคนเข้าร่วมประชุมในชุมนุมของตนเองได้ทุกครั้ง ดังนี้

ชุมนุม	วันประชุม
คนตรี	วันพฤหัสบดี
ลูกเสือวิสามัญ	วันอังคาร
อนุรักษ์สิ่งแวดล้อม	วันอังคาร
กีฬา	วันศุกร์

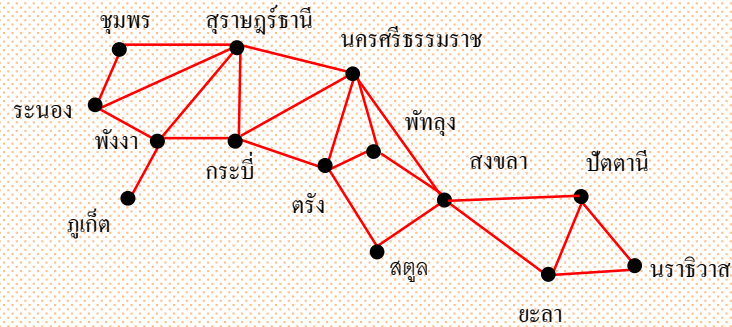
นี่เป็นเพียงคำตอบหนึ่งเท่านั้น
สามารถตอบได้หลายแบบ

เฉลยกิจกรรมที่ 1.9 ปัญหาการแบ่งงานทำตามความถนัดของสมาชิกในกลุ่ม

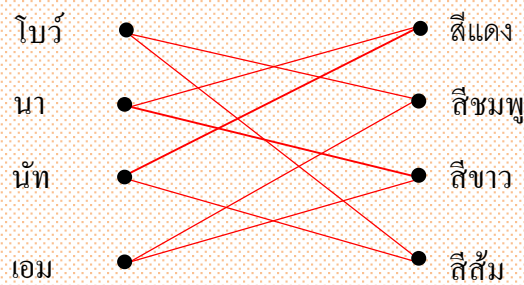
ครูเป็นผู้ตรวจความถูกต้องและให้คะแนน

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3

1. ตัวอย่างแบบจำลอง ดังรูป



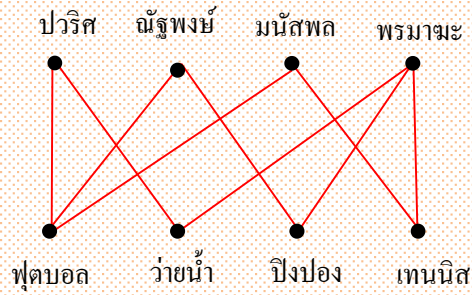
2. ตัวอย่างแบบจำลอง ดังกราฟ



พิทยาสมาสามารถมอบดอกกุหลาบกับคนที่เขาชอบได้ตรงตามความชอบ และ พิทยามีวิธีมอบดอกกุหลาบให้กับคนทั้ง 4 ดังนี้

ชื่อ	แบบที่ 1	แบบที่ 2
โบว์	สีชมพู	สีส้ม
นา	สีแดง	สีขาว
นัท	สีส้ม	สีแดง
เอ็ม	สีขาว	สีชมพู

3. จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
 ให้จุดยอด แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทน คน และกลุ่มที่ 2 แทน ประเภทกีฬา
 เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความชอบกีฬา
 ดังนั้นตัวอย่างแบบจำลอง ดังกราฟ

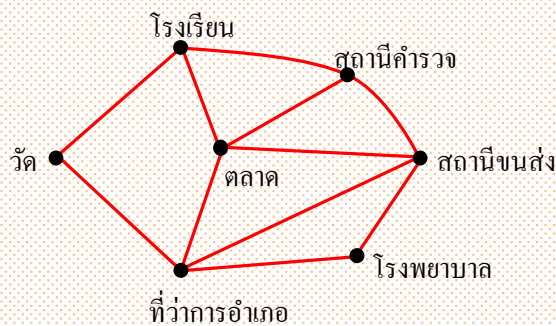


สามารถจัดให้นักเรียนแต่ละคนได้เล่นกีฬาชนิดที่ตนเองชอบคนละ 1 อย่างได้ดังนี้

ชื่อ	กีฬา
ปวริศ	ฟุตบอล
ณัฐพงษ์	บิงปอง
มนัสพล	เทนนิส
พรมามะ	ว่ายน้ำ

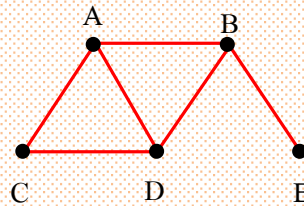
นี้เป็นเพียงคำตอบหนึ่งเท่านั้น
สามารถตอบได้หลายแบบ

4. จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้
ให้จุดยอด แทน สถานที่ต่างๆ เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ถนนเชื่อมสถานที่สองสถานที่
ดังนั้นตัวอย่างแบบจำลอง ดังกราฟ

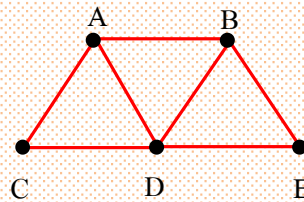


สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่านักเรียนคนหนึ่งสามารถปั่นจักรยานจากโรงเรียนไป
สถานีตำรวจโดยผ่านถนนทุกสาย สายละ 1 ครั้งได้หลายแบบ ตัวอย่างเส้นทางแบบหนึ่ง คือ
โรงเรียน → วัด → ที่ว่าการอำเภอ → โรงพยาบาล → สถานีขนส่ง → ตลาด → ที่ว่าการอำเภอ →
สถานีขนส่ง → สถานีตำรวจ → ตลาด → โรงเรียน → สถานีตำรวจ

5. ให้จุด A, B, C, D และ E แทน ห้อง A, B, C, D และ E ตามลำดับ เส้นเชื่อม แทน ประตูที่เชื่อมระหว่างห้อง ดังนั้นแบบบ้านดังกล่าวสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้

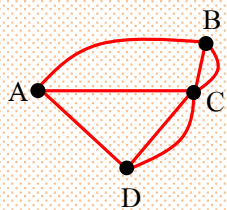


การเดินผ่านทุกประตูโดยแต่ละประตูเดินผ่านเพียงครั้งเดียว ไม่สามารถทำได้ แต่ถ้าทำประตูเพิ่มระหว่างห้อง D กับห้อง E ก็ทำได้ โดยได้ทางเดิน ดังนี้



$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$

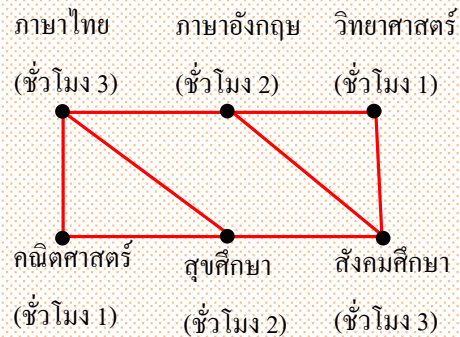
6. ให้จุดยอด แทน ทางแยก เส้นเชื่อม แทน ถนน ดังนั้น แผนที่ถนนดังกล่าวสามารถเขียนในรูปกราฟ ได้ดังนี้



ปิดถนนที่เชื่อมระหว่าง A กับ C ก็จะสามารถจัดรถให้เดินทางเดียวได้ ดังนี้ (สามารถทำได้หลายแบบ ที่แสดงให้ดูนี้เป็นเพียงแบบหนึ่งเท่านั้น)

$D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B$ มีจุด D เป็นจุดเริ่มต้น จุด B เป็นจุดสิ้นสุด

7. จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้ให้
จุดยอด แทน วิชา เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน การมีนักเรียนบางคนเรียนทั้งสองวิชา
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ



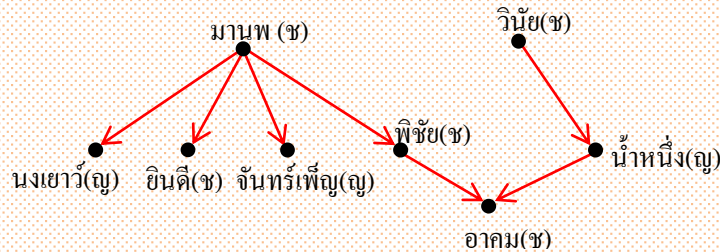
สรุปจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ จะพบว่า วิชาภาษาไทย และวิชาสุศึกษา ในชั่วโมงเดียวกัน
ไม่ได้ แต่วิชาคณิตศาสตร์ละวิชาภาษาอังกฤษ หรือ วิชาคณิตศาสตร์กับวิชาสังคมศึกษา สามารถใน
ชั่วโมงเดียวกันได้ ดังนั้น ถ้าจุดยอด 2 จุดมีเส้นเชื่อมจะจัดสอนในชั่วโมงที่เวลาต่างกัน

ตัวอย่างหนึ่งในการจัดสอนวิชาทั้ง 6 วิชา ดังนี้

ชั่วโมงที่	สอนวิชา
1	คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์
2	ภาษาไทย สุศึกษา
3	ภาษาไทย สังคมศึกษา

นี้เป็นเพียงคำตอบหนึ่งเท่านั้น
สามารถตอบได้หลายแบบ

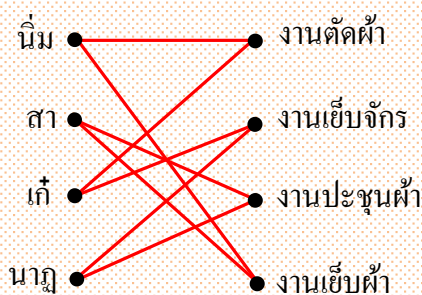
8. จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้ให้
จุดยอด แทน คน เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์โดยจุดปลายลูกศรเป็นลูก
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ



ญ แทน ผู้หญิง

ช แทน ผู้ชาย

- (1) มานพมีลูก 4 คน เป็นลูกสาว 2 คน ลูกชาย 2 คน
 - (2) ภรรยาของพิชัย คือ น้ำหนึ่ง
 - (3) วินัยเป็นตาของอาคม พิชัยเป็นพ่ออาคม และจันทรเพ็ญเป็นอาของอาคม
9. จากข้อมูลที่กำหนดให้ นำมาสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ แทนสถานการณ์ ได้ดังนี้ให้
จุดยอดกลุ่มที่ 1 แทน คน จุดยอดกลุ่มที่ 2 แทน ความสามารถเฉพาะทาง เส้นเชื่อมระหว่างจุดสอง
จุดใด แทน ความสามารถของแต่ละคนกับงาน
ดังนั้นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนสถานการณ์นี้ สามารถเขียนได้ ดังกราฟ



เจ้าของร้านตัดเย็บเสื้อผ้าสามารถมอบงานให้กับพนักงานทุกคนได้ตรงกับความสามารถของ
พนักงานแต่ละคนได้ดังนี้

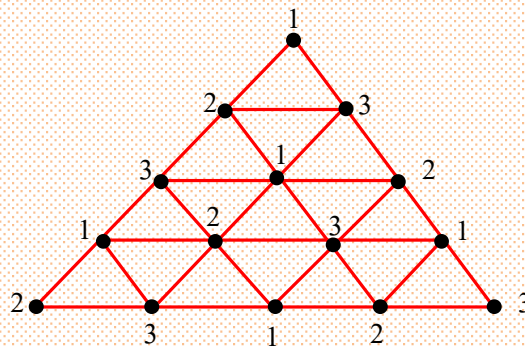
ชื่อ	แบบที่ 1	แบบที่ 2
นั้ม	งานตัดผ้า	งานเย็บผ้า
สา	งานเย็บผ้า	งานปะชุนผ้า
เก้	งานเย็บจักร	งานตัดผ้า
นาฏ	งานปะชุนผ้า	งานเย็บจักร

10. สามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์ โดยให้ จุดยอด แทน ลูกบอล เส้นเชื่อม แทน

ความสัมพันธ์ที่แสดงว่าลูกบอลสองลูกแตะกัน

ดังนั้นได้ตัวอย่างแบบจำลองดังกราฟ แล้วกำหนดให้สี แทน จำนวนเต็มบวกลงบนจุดแต่ละจุด

โดยจุดสองจุดใดที่มีเส้นเชื่อมต้องกำหนดคนสีต่างกัน



ดังนั้น จำนวนสีของลูกบอลที่น้อยที่สุดตามเงื่อนไข คือ 3 สี

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และคณะ. (ม.ป.ป.). *คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6*.
 กรุงเทพฯ: ภูมิบัณฑิต.
- กนกวลี อุษณกรกุล และรณชัย มาเจริญทรัพย์. (2554). *แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้
 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 4*. กรุงเทพฯ: เดอะบुकส์.
- ธนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล. (ม.ป.ป.). *คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5*. กรุงเทพฯ:
 SCIENCE CENTER.
- พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิตร. (2555). *คู่มือคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 4*. กรุงเทพฯ: เดอะบुकส์.
- เลิศ สิทธิโกศล. (2555). *Math Review คณิตศาสตร์ มัธยมศึกษา 4-6 เล่ม 4 (เพิ่มเติม)*. กรุงเทพฯ:
 ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- ศักดิ์สิน แก้วประจบ. (2555). *คู่มือ คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4-5-6 เล่ม 4*. กรุงเทพฯ: พีบีซี
- ศุภกิจ เจริญวิสุตมกุล. (2550). *เทคนิคคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5 เล่ม 2*. กรุงเทพฯ: แม็ค
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). *เอกสารเสริมเรื่องความรู้เบื้องต้น
 เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: รากขวัญ.
- (2551). *ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สถาบันส่งเสริม
 การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). *คู่มือครู
 รายวิชาเพิ่มเติมเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร คณิตศาสตร์สำหรับคอมพิวเตอร์
 กลุ่มสาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6*.
 พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.
- (2554). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6*. พิมพ์ครั้งที่ 1.
 กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.
- (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6*.
 พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์. (2554). *Hi-ED's Mathematics คณิตศาสตร์ เล่ม 4
 มัธยมศึกษาปีที่ 4-6 รายวิชา (พื้นฐานและเพิ่มเติม)*. กรุงเทพฯ: ไฮเอ็ดพับลิชชิง.
- สุชีพ งามเจริญ และ ไอศูรย์ สุดประเสริฐ. (ม.ป.ป.). *คณิตคิดเร็วทีละเรื่อง: ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น*.
 นนทบุรี: ธรรมบัณฑิต.

