แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม(ค32202)

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เล่มที่ 2

จำนวนเชิงซ้อน

เรื่องสมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

นายกัญญา พิลาวุธ

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนโกรกพระ

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

คำแนะนำการใช้แบบฝึกสำหรับครู

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในการใช้ แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ ครูผู้สอนควรปฏิบัติตามขั้นตอน ต่อไปนี้

1. ศึกษาแบบฝึกทักษะและทำความเข้าใจกับเนื้อหาสาระก่อนนำไปใช้จัดกิจกรรมการเรียนสอน

2. ชี้แจงขั้นตอนการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์นี้ให้นักเรียนเข้าใจและเน้นย้ำความซื่อสัตย์ไม่ดูเฉลยก่อน หรือไม่ลอกเพื่อน เพื่อให้นักเรียนเข้าใจบทบาทตัวเองในการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะ

3. ทดสอบความรู้ก่อนเรียนของนักเรียนโดยการทำแบบทดสอบก่อนเรียน เพื่อประเมินความรู้พื้นฐาน ของนักเรียน

4. แจ้งผลการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

5. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้

6.สังเกต ดูแล ช่วยให้คำแนะนำแก่นักเรียนเมื่อมีปัญหามีข้อสงสัยซักถาม

7. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้ว ให้เปลี่ยนกันตรวจคำตอบภายในกลุ่มจากเฉลยแบบฝึกทักษะ

8. ประเมินผลการเรียนของนักเรียนอย่างต่อเนื่องและให้แรงเสริมในการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียน

9. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะเสร็จสิ้น เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเชิงซ้อนใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้นักเรียนควรปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. อ่านคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียนให้เข้าใจก่อนศึกษา
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อประเมินความรู้พื้นฐานของนักเรียน
3. ศึกษาเนื้อหาในใบความรู้และทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะด้วยตนเองถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ให้กลับไปศึกษาเนื้อหาใหม่อีกครั้งหรือปรึกษาครูผู้สอน
4. ทำแบบทดสอบหลังเรียนเมื่อศึกษาเนื้อหาจากใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะเสร็จสิ้นเพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
5. การทำกิจกรรมในแบบฝึกทักษะแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนให้นักเรียนตั้งใจทำและมีความซื่อสัตย์โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบเรื่องนี้แล้ว นักเรียนสามารถ

1. หาจำนวนเชิงซ้อนที่เท่ากันได้
2. หาผลบวก ผลลบ ผลคูณ และผลหารของจำนวนเชิงซ้อนได้
3. นำสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน การดำเนินการไปใช้แก้ปัญหาได้

แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่องจำนวนเชิงซ้อน เล่มที่ 2 สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบก่อนเรียน เล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาสอบ 10 นาที

2. นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดในแต่ละข้อแล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x)

1) กำหนด $2x + 5i = 2 + (y - 1)i$ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 1

ข. 2

ค. 5

ง. 7

2) ข้อใดถูกต้อง

ก. $(1 - 3i) + (3 + i) = 4 - 2i$

ข. $(4 + 5i) + (-5 - 4i) = 0$

ค. $(2 - 7i) - (1 - 2i) = 1 - 9i$

ง. $(-5 - 6i) - (3 + 3i) = -2 - 3i$

3) $3(4-2i)+\frac{2}{3}(6+12i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i$

ข. $16+2i$

ค. $12-6i$

ง. $4+8i$

4) $(5+2i)(3-4i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $23-14i$

ข. $-20+6i$

ค. $15-8i$

ง. $10-12i$

5) $\frac{3+5i}{2-3i}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}i$

ข. $\frac{6}{13}+\frac{15}{13}i$

ค. $-\frac{9}{13}+\frac{9}{13}i$

ง. $\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i$

6) $(7-11i)-(2+3i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-5-14i$

ข. $5-14i$

ค. $5-9i$

ง. $-5-9i$

7) $i(4+i)(4-i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-8-3i$

ข. $8+3i$

ค. $-17i$

ง. $17i$

8) กำหนดให้ $z=(2+5i)$ แล้ว z^{-1} มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $z^{-1}=\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$

ข. $z^{-1}=\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i$

ค. $z^{-1}=-\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$

ง. $z^{-1}=\frac{2}{29}i-\frac{5}{29}i$

9) ข้อใด ไม่ถูกต้อง เกี่ยวกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ก. ถ้า $z=7-11i$ แล้ว $\bar{z}=7+11i$

ข. ถ้า $z=-5$ แล้ว $\bar{z}=-5$

ค. ถ้า $z=-i$ แล้ว $\bar{z}=i$

ง. ถ้า $z=(-1,\ 3)$ แล้ว $\bar{z}=(1,\ 3)$

10) ข้อใด ไม่ถูกต้อง เกี่ยวกับตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

ก. ถ้า $z=(-1,\ 3)$ แล้ว $-z=(1,\ -3)$

ข. ถ้า $z=7-11i$ แล้ว $-z=7+11i$

ค. ถ้า $z=-5$ แล้ว $-z=5$

ง. ถ้า $z=-i$ แล้ว $-z=i$

กระดาษคำตอบ แบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ..... เลขที่..... ระดับชั้น.....ห้อง.....

คำชี้แจง : ให้เลือกคำตอบจากข้อสอบก่อนเรียนแล้วทำเครื่องหมาย x ลงในช่องที่ถูกที่สุด

ข้อ	ก.	ข.	ค.	ง.	คะแนน
1)					
2)					
3)					
4)					
5)					
6)					
7)					
8)					
9)					
10)					
รวมคะแนนที่ได้					

ผู้ตรวจ.....

ใบความรู้ที่ 2.1

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

จะได้ $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$= a + bi + c + di$

$= a + c + bi + di$

$= (a + c) + (bi + di)$

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ $z_1 = a + bi$

และ $z_2 = c + di$

จะได้ $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

จากหลักการดังกล่าว สรุปได้ว่า การบวกจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ สามารถทำได้โดย

1. นำส่วนจริงบวกกับส่วนจริง
2. นำส่วนจินตภาพมาบวกกับส่วนจินตภาพ

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของ $(2 + 3i) + (6 + 4i)$

<u>วิธีทำ</u> $(2 + 3i) + (6 + 4i) = (2 + 6) + (3 + 4)i$

$= 8 + 7i$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่าของ $(4 + 2i) + (5 - 4i)$

<u>วิธีทำ</u> $(4 + 2i) + (5 - 4i) = [4 + 5] + [2 + (-4)]i$

$= 9 - 2i$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าของ $(1 + i) + (2i) + (3 + 8i)$

<u>วิธีทำ</u> $(1 + i) + (2i) + (3 + 8i) = (1 + i) + (0 + 2i) + (3 + 8i)$

$= (1 + 0 + 3) + (1 + 2 + 8)i$

$= 4 + 11i$

แบบฝึกทักษะที่ 2.1

เรื่อง การหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, 3) + (1, 2)

   ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, 3) + (1, 2) คือ (5, 5)

2. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (-5 + 4i) + (-2 – 3i) ในรูปของ a + bi

   ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (-5 + 4i) + (-2 – 3i) คือ -7 + i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	(3, 2) + (1, 1)	
2)	(4, -2) + (-3, 1)	
3)	(-2, -1) + (-7, 2)	
4)	(2, -5) + (3, 5)	
5)	$(2, \sqrt{3}) + (-1, \sqrt{3})$	
6)	$4 + (\pi + \pi i)$	
7)	$(\sqrt{2} + 3i) + (1 + 2i)$	
8)	$(-1 + 5i) + 2i$	
9)	$(2\sqrt{3} + i) + (4\sqrt{3} - 3i)$	
10)	$(\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i) + (-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i) + \sqrt{3}\,i$	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ใบความรู้ที่ 2.2

การลบจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน

<u>สมบัติ</u> กำหนดให้ z_1 , z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4. $z + 0 = 0 + z = z$
5. $z + (-z) = 0$ โดยที่ $z = a + bi$ จะได้ $-z = -a - bi$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จงแสดงว่า $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z_1 = a + bi$ เมื่อ a, b R

$z_2 = c + di$ เมื่อ c, d R

จะได้ $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

เนื่องจาก $a + c \in R$

$b + d \in R$

ให้ $m = a + c$ จะได้ว่า $m \in R$

$n = b + d$ จะได้ว่า $n \in R$

จะได้ $z_1 + z_2 = m + ni$

ดังนั้น $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $z = 3 + 4i$ จงแสดงว่า $z + (-z) = 0$

<u>วิธีทำ</u> จาก $z = 3 + 4i$

จะได้ $-z = -3 - 4i$

$z + (-z) = [3 + (-3)] + [4 + (-4)]i$

$= 0 + 0i$

ดังนั้น $z + (-z) = 0$

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

โดยที่ $z = a + bi$

แล้ว $-z = -a - bi$

จากหลักการข้างต้น

ถ้ากำหนดให้ $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

จะได้ $-z_2 = -c - di$

จาก $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

จะได้ $z_1 - z_2 = (a + bi) + (-c - di)$

$= \quad [a + (-c)] + [b + (-d)]i$

ดังนั้น $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาค่าของ $(5 + 4i) - (3 + i)$

<u>วิธีทำ</u> $(5 + 4i) - (3 + i) = (5 - 3) + (4 - 1)i$

$= 2 + 3i$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาค่าของ $(7 + 2i) - (4 - 2i)$

<u>วิธีทำ</u> $(7 + 2i) - (4 - 2i) = [7 - 4] + [2 - (-2)]i$

$= 3 + 4i$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> กำหนดให้ $z_1 = -5 + 3i$ และ $z_2 = -6 - 2i$ จงหา $z_1 - z_2$

<u>วิธีทำ</u> จาก $z_1 = -5 + 3i$

$z_2 = -6 - 2i$

จะได้ $z_1 - z_2 = [-5 - (-6)] + [3 - (-2)]i$

$= i + 5i$

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ $z = a + bi$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า $kz = ka + kbi$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> จงหาค่าของ $2(3 + 4i)$

<u>วิธีทำ</u> $2(3 + 4i) = 2(3) + (2)(4)i$

$= 6 + 8i$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> จงหาค่าของ $\sqrt{3}(3+\sqrt{3})$

<u>วิธีทำ</u> $\sqrt{3}(3+\sqrt{3}) = (\sqrt{3})(3) + (\sqrt{3})(\sqrt{3})\,i$

$= 3\sqrt{3} + 3i$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> จงหาค่าของ $\frac{1}{2}(4 + 6i)$

<u>วิธีทำ</u> $\frac{1}{2}(4 + 6i) = (\frac{1}{2})(4) + (\frac{1}{2})(6)i$

$= 2 + 3i$

แบบฝึกทักษะที่ 2.2

<u>ตอนที่ 1</u> เรื่อง การหาผลลบของจำนนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(2 - 5i) - (4 + 2i)$ ในรูปของ $a + bi$

   ผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(2 - 5i) - (4 + 2i)$ คือ $-2 - 3i$

2. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(-7 + 4i) - (5 - 8i)$ในรูปของ $a + bi$

   ผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(-7 + 4i) - (5 - 8i)$ คือ $-12 + 12i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$(7 - 11i) - (2 + 3i)$	
2)	$(5 - 6i) - (-3 + i)$	
3)	$(\sqrt{3} + i) - (2 + \sqrt{2}\, i)$	
4)	$(\sqrt{4} - i) - 2\sqrt{3}\, i$	
5)	$(1 - i) - 2i - (3 + 5i)$	
6)	$(6 + 4i) - (8 - 3i)$	
7)	$10i - (7, \ 6)$	
8)	$(2 + i) + (3 - 2i)$	
9)	$(1 - 3i) - (6 + 2i)$	
10)	$(5 - 2\sqrt{-9}) - (3 + 2\sqrt{-9})$	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

<u>ตอนที่ 2</u> จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริงใดๆ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาผลคูณของ $3(2-5i)$ ในรูปของ $a+bi$

   ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(3\cdot 2-3\cdot 5i)$ คือ $6-15i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$6(7-11i)$	
2)	$-2(6i)$	
3)	$(\sqrt{3}+i)\sqrt{4}$	
4)	$(\sqrt{4}-i)\,2\sqrt{3}\,i$	
5)	$2i(3+5i)$	
6)	$4i(8-3i)$	
7)	$10i(7+6)$	
8)	$i(3-2i)$	
9)	$3i(6+2i)$	
10)	$(5-2\sqrt{-9})\sqrt{-9}$	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ใบความรู้ที่ 2.3

การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน

กำหนดให้ $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

จะได้ $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$

$= a(c + di) + (bi)(c + di)$

$= ac + adi + bic + bidi$

$= ac + adi + bci + bdi^2$

$= ac + adi + bci + bd(-1)$

$= ac - bd + adi + bci$

$= (ac - bd) + (adi + bci)$

ดังนั้น $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ $z_1 = a + bi$

และ $z_2 = c + di$

จะได้ว่า $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของ $(3 + 2i)(3 - 2i)$

<u>วิธีทำวิธีที่ 1 ใช้สูตร</u>

$$
\begin{aligned}
(3 + 2i)(3 - 2i) &= [(3)(3) - (2)(-2)] + [(3)(-2) + (2)(3)]i \\
&= (9 + 4) + (-6 + 6)i \\
&= 13 + 0i \\
&= 13
\end{aligned}
$$

<u>วิธีที่ 2 ใช้วิธีคูณกระจาย</u>

$$
\begin{aligned}
(3 + 2i)(3 - 2i) &= (3)(3) + (3)(-2i) + (2i)(3) + (2i)(-2i) \\
&= 9 - 6i + 6i + (-4)\, i^2 \\
&= 9 + (-4)(-1) \\
&= 9 + 4 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> กำหนดให้ $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 6 + i$, $z_3 = -2i$ และ $z_4 = -1 - 4i$ จงหาค่าของ

1. $2(z_1 + z_2)$
2. $3z_1 + 4z_3$
3. $3z_1z_4 - 4z_2$
4. $-\frac{1}{2}z_3 + z_4$

<u>วิธีทำ</u>

1. $2(z_1 + z_2) = 2[(2 + 3i) + (6 + i)]$

$= 2[(2 + 6) + (3 + 1)i]$

$= 2(8 + 4i)$

$= 16 + 8i$

2. $3z_1 + 4z_3 = 3(2 + 3i) + 4(-2i)$

$= 6 + 9i - 8i$

$= 6 + i$

3. $3z_1z_4 - 4z_2 = 3[(2 + 3i)(-1 - 4i)] - 4(6 + i)$

$= 3[(2)(-1) + 2(-4i) + (3i)(-1) + (3i)(-4i)] - 24 - 4$

$= 3[-2 - 8i - 3i - 12i^2] - 24 - 4i$

$= 3[-2 - 11i - 12(-1)] - 24 - 4i$

$= 3[-2 - 11i + 12] - 24 - 4i$

$= 3(10 - 11i) - 24 - 4i$

$= 30 - 33i - 24 - 4i$

$= 6 - 37i$

4. $-\frac{1}{2}z_3 + z_4 = (-\frac{1}{2})(-2i) + (-1 - 4i)$

$= i - 1 - 4i$

$= -1 - 3i$

แบบฝึกทักษะที่ 2.3

เรื่อง การผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง 1. จงหาค่า

ของ (3 + 2i)(3 - 2i)

<u>วิธีทำวิธีที่ 1 ใช้สูตร</u> (3 + 2i)(3 - 2i) = [(3)(3) - (2)(-2)] + [(3)(-2) + (2)(3)]i

= (9 + 4) + (-6 + 6)i = 13 + 0i = 13

<u>วิธีที่ 2 ใช้วิธีคูณกระจาย</u> (3 + 2i)(3 - 2i) = (3)(3) + (3)(-2i) + (2i)(3) + (2i)(-2i)

= 9 - 6i + 6i + (-4) i^2 = 9 + (-4)(-1) = 9 + 4 = 13

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	(3 , - 4)(6 , 2)	
2)	(-2 – i) (5 - 3i)	
3)	(2, 5)(3, 6)	
4)	(2 - 5i)(6, -3)	
5)	(1 + 2i)(2 + 3i)(3 + 4i)	
6)	2i (2 - 3i) – 3i (-3 + 4i)	
7)	(3 + 4i)(2 + 5i) – (2 + 3i)(3 - 7i)	
8)	(2i - 1)(1 + 3i)	
9)	i(4 + i)(4 – i)	
10)	(2+i)(3-2i)(2-i)(3+2i)	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ใบความรู้ที่ 2.4

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อนและตัวผกผันของการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ $z = a + bi$

สังยุค (conjugate) ของ z เขียนแทนด้วย โดยที่ $\bar{z} = a - bi$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> สังยุคของ $2 + 3i$ คือ $2 - 3i$

สังยุคของ $-6 + 4i$ คือ $-6 - 4i$

สังยุคของ $3 - 2i$ คือ $3 + 2i$

สังยุคของ $-5 - i$ คือ $-5 + i$

สังยุคของ $-2i$ คือ $2i$

สังยุคของ 3 คือ 3

<u>หลักการ</u> กำหนดให้ $z = a + bi$

ตัวผักผันการบวก ของ z เขียนแทนด้วย โดยที่ $-z = -a - bi$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ตัวผักผันการบวก $2 + 3i$ คือ $-2 - 3i$

ตัวผักผันการบวก $-6 + 4i$ คือ $6 - 4i$

ตัวผักผันการบวก $6i$ คือ $-6i$

ตัวผักผันการบวก $-2i$ คือ $2i$

ตัวผักผันการบวก 7 คือ -7

แบบฝึกทักษะที่ 2.4

เรื่อง สังยุคของ z

<u>ตอนที่ 1</u>

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4)

   สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4) คือ (3, 4)

2. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i

   สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i คือ 8 - 7i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	z = (-2, 1)	
2)	z = (-1, 3)	
3)	z = 7 - 11i	
4)	z = -5	
5)	z = -i	
6)	z = 3 + 2i	
7)	z = (3 - 2i)(-2 + 3i)	
8)	z = 1+3i	
9)	z = 2(-3 + 2i)	
10)	z = -5 – 7i	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ตอนที่ 2

เรื่อง ตัวผกผันของการบวก

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

3. จงหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4)

   ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4) คือ (-3, 4)

4. จงหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i

   ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i คือ 8 - 7i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$z = (-2, 1)$	
2)	$z = (-1, 3)$	
3)	$z = 7 - 11i$	
4)	$z = -5$	
5)	$z = -i$	
6)	$z = 3 + 2i$	
7)	$z = (3 - 2i)(-2 + 3i)$	
8)	$z = -2(1+3i)^2$	
9)	$z = 2(-2+3i)^2 - 2(-3 + 2i)$	
10)	$z = (1+i)^2 + (2 - 3i)$	

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ใบความรู้ที่ 2.5

ตัวผกผันของการคูณ

<u>สมบัติ</u> กำหนดให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$

2. $\bar{\bar{z}} = z$

3. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$

4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

5. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

6. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

<u>**หลักการ**</u> **ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน z**

เมื่อ $z \neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้วตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน z

เขียนแทนด้วย z^{-1} คือ ซึ่ง $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1+0i = (1, 0)$

เมื่อ $z = (a, b)$ แล้ว $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

เมื่อ $z = a+bi$ แล้ว $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ หรือ $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน z ที่กำหนดให้

1. $z = 2 - 3i$

วิธีทำ จาก เมื่อ $z = a + bi$ แล้ว $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$

หรือ $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$$z^{-1} = \frac{2+3i}{2^2+3^2}$$

$$= \frac{2+3i}{13}$$

2. $z = (-9, 8)$

วิธีทำ จาก เมื่อ $z = (a, b)$ แล้ว $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$$z^{-1} = \left(\frac{-9}{81+64}, \frac{-8}{81+64}\right)$$

$$= \left(\frac{-9}{145}, \frac{-8}{145}\right)$$

แบบฝึกทักษะที่ 2.5

เรื่อง ตัวผกผันของการคูณ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวผกผันการคูณของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

เมื่อเขียน $z = a + bi$ จะได้ว่า $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ หรือ $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

ตัวอย่าง 1. จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (4, -3)

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, -3) คือ $(\frac{4}{25}, \frac{3}{25})$

2. จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน -3 + 2i

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -3 + 2i คือ $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$z = 8 + 3i$	
2)	$z = (2-i)^2$	
3)	$z = (7 - \sqrt{-50}) + (3 - \sqrt{-72})$	
4)	$z = (1, 1)^3$	
5)	$z = \cos\theta - i\sin\theta$	
6)	$z = (5-3i) + (2+5i)$	
7)	$z = (5 - \sqrt{-125}) + (-4 + \sqrt{-20})$	
8)	$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$	
9)	$z = \frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-8}}{2}$	
10)	$z = (2+5i)$	

ใบความรู้ที่ 2.6

การหารจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

จะได้ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$

$$= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2 - cdi + cdi - d^2i^2}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2 - d^2(-1)}$$

ดังนั้น $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

<u>หลักการ</u> ให้ $z_1 = a + bi$

$z_2 = c + di$

จะได้ว่า $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่าของ $\frac{3-5i}{2+3i}$

$$\frac{3-5i}{2+3i} = \frac{3-5i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i}$$

$$= \frac{(3-5i)(2-3i)}{2^2+3^2}$$

$$= \frac{6-9i-10i+15i^2}{4+9}$$

$$= \frac{6-19i-15}{13}$$

$$= \frac{-9-9i}{13}$$

ดังนั้น $\frac{3-5i}{2+3i} = -\frac{9}{13} - \frac{9}{13}i$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่าของ $\frac{2-i}{3+2i}$

$$\frac{2-i}{3+2i} = \frac{2-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i}$$

$$= \frac{(2-i)(3-2i)}{3^2+2^2}$$

$$= \frac{6-4i-3i+2i^2}{9+4}$$

$$= \frac{6-7i-3i+2i^2}{13}$$

$$= \frac{4-7i}{13}$$

ดังนั้น $\frac{2-i}{3+2i} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> กำหนดให้ $z(2 + i) = -1 - 2i$ จงหาค่าของ z

จาก $z(2 + i) = -1 - 2i$

$$z = \frac{-1-2i}{2+i}$$

$$= \frac{-1-2i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{(-1-2i)(2-i)}{2^2+1^2}$$

$$= \frac{-2+i-4i+2i^2}{4+1}$$

$$= \frac{-2-3i-2}{5}$$

$$= \frac{-4-3i}{5}$$

ดังนั้น $z = -\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

แบบฝึกทักษะที่ 2.6

เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

1. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้การคูณด้วยตัวผกผันของจำนวนเชิงซ้อน

1) $\frac{1+i}{2-5i}$

$$\frac{1+i}{2-5i} = (1+i)(2-5i)^{-1}$$

$$= (1+i)\left(\frac{2+5i}{29}\right)$$

$$= \frac{-3+7i}{29}$$

2) $\frac{13}{5-12i}$

$$= \left(\frac{13}{5-12i}\right)\left(\frac{5+12i}{5+12i}\right)$$

$$= \frac{13(5+12i)}{169}$$

$$= \frac{5+12i}{13}$$

3) $\frac{2+3i}{1-i}$

.....

.....

.....

.....

4) $\dfrac{4+6i}{2i}$

.....

.....

.....

.....

5) $\dfrac{-10i}{1+2i}$

.....

.....

.....

.....

2. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้การคูณด้วยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

1) $z = \frac{6-i}{1+i}$

$z^{-1} = \frac{1+i}{6-i}$

$z^{-1} = (\frac{1+i}{6-i})(\frac{6+i}{6+i})$

$= \frac{5+7i}{37}$

2) $z = \frac{3-4i}{10}$

.....

.....

.....

.....

3) $z = \frac{4+6i}{2i}$

.....

.....

.....

.....

4) $z = \dfrac{1+i}{2-5i}$

.....

.....

.....

.....

5) $z = \dfrac{13}{5-12i}$

.....

.....

.....

.....

3. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1) $z(1 - 2i)^2 = 1 + 2i$

.....

.....

.....

.....

2) $z(3 - i)(2 + i) = 1 - 2i$

.....

.....

.....

.....

3) $z(1 + 2i) = 2 + 3i$

.....

.....

.....

.....

4) $z(4 + 6i) = 2i$

.....

.....

.....

.....

5) $10z = 3 - 4i$

……

……

……

……

6) $zi = 2 + i$

……

……

……

……

7) $-10z = 1 + 2i$

……

……

……

……

8) $z(2 - i) = 12$

……

……

……

……

4. จงทำให้เป็นผลสำเร็จและเขียนคำตอบให้อยู่ในรูป a+bi

1) $(3+i)-\frac{(2+i)^2}{1-i}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\left(\frac{6-i}{2+i}\right)\left(\frac{1-i}{4-i}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\left(\frac{1+2i}{3+4i}\right)\left(\frac{2-i}{2i}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4) $\frac{2}{3-i}-\frac{5}{2+2i}+\frac{1}{i}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่องจำนวนเชิงซ้อน เล่มที่ 2 สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบหลังเรียน เล่มที่ 2 สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน จำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาสอบ 10 นาที

2. นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดในแต่ละข้อแล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x)

1) $3(4-2i)+\frac{2}{3}(6+12i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i$ ข. $12-6i$

ค. $16+2i$ ง. $4+8i$

2) กำหนด $2x+5i=2+(y-1)i$ แล้ว $x+y$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 5 ข. 7

ค. 1 ง. 2

3) ข้อใด ไม่ถูกต้อง เกี่ยวกับตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน

ก. ถ้า $z=-5$ แล้ว $-z=5$ ข. ถ้า $z=-i$ แล้ว $-z=i$

ค. ถ้า $z=(-1,\ 3)$ แล้ว $-z=(1,\ -3)$ ง. ถ้า $z=7-11i$ แล้ว $-z=7+11i$

4) $(5+2i)(3-4i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $15-8i$ ข. $10-12i$

ค. $23-14i$ ง. $-20+6i$

5) ข้อใดถูกต้อง

ก. $(2 - 7i) - (1 - 2i) = 1 - 9i$

ข. $(-5 - 6i) - (3 + 3i) = -2 - 3i$

ค. $(1 - 3i) + (3 + i) = 4 - 2i$

ง. $(4 + 5i) + (-5 - 4i) = 0$

6) $(7 - 11i) - (2 + 3i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $5 - 9i$

ข. $-5 - 9i$

ค. $-5 - 14i$

ง. $5 - 14i$

7) $\frac{3+5i}{2-3i}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{9}{13}+\frac{9}{13}i$

ข. $\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i$

ค. $\frac{3}{2}-\frac{5}{3}i$

ง. $\frac{6}{13}+\frac{15}{13}i$

8) ข้อใด ไม่ถูกต้อง เกี่ยวกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ก. ถ้า $z = -i$ แล้ว $\bar{z} = i$

ข. ถ้า $z = (-1, 3)$ แล้ว $\bar{z} = (1, 3)$

ค. ถ้า $z = 7 - 11i$ แล้ว $\bar{z} = 7 + 11i$

ง. ถ้า $z = -5$ แล้ว $\bar{z} = -5$

9) $i(4 + i)(4 - i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-17i$

ข. $17i$

ค. $-8 - 3i$

ง. $8 + 3i$

10) กำหนดให้ $z = (2+5i)$ แล้ว z^{-1} มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $z^{-1} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

ข. $z^{-1} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$

ค. $z^{-1} = -\frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

ง. $z^{-1} = \frac{2}{29}i - \frac{5}{29}i$

กระดาษคำตอบ แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ..... เลขที่..... ระดับชั้น.....ห้อง.....

คำชี้แจง : ให้เลือกคำตอบจากข้อสอบหลังเรียนแล้วทำเครื่องหมาย x ลงในช่องที่ถูกที่สุด

ข้อ	ก.	ข.	ค.	ง.	คะแนน
1)					
2)					
3)					
4)					
5)					
6)					
7)					
8)					
9)					
10)					
รวมคะแนนที่ได้					

ผู้ตรวจ.....

เฉลยแบบฝึกทักษะ

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

เล่มที่ 2

สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

เรื่องจำนวนเชิงซ้อน เล่มที่ 2 สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

1)	ง	6)	ข
2)	ก	7)	ง
3)	ข	8)	ก
4)	ก	9)	ง
5)	ค	10)	ข

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.1

เรื่อง การหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, 3) + (1, 2)

   ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, 3) + (1, 2) คือ (5, 5)

2. จงหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (-5 + 4i) + (-2 – 3i) ในรูปของ a + bi

   ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน (-5 + 4i) + (-2 – 3i) คือ -7 + i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	(3, 2) + (1, 1)	(4, 3)
2)	(4, -2) + (-3, 1)	(1, -1)
3)	(-2, -1) + (-7, 2)	(-9, 1)
4)	(2, -5) + (3, 5)	(5, 0)
5)	$(2, \sqrt{3}) + (-1, \sqrt{3})$	$(1, 2\sqrt{3})$
6)	$4 + (\pi + \pi i)$	$(4+\pi, \pi)$
7)	$(\sqrt{2} + 3i) + (1 + 2i)$	$(\sqrt{2}+1, 5)$
8)	$(-1 + 5i) + 2i$	(-1, 7)
9)	$(2\sqrt{3} + i) + (4\sqrt{3} - 3i)$	$(6\sqrt{3}, -2)$
10)	$(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) + (-\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + \sqrt{3}i$	$(0, \sqrt{3})$

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.2

ตอนที่ 1 เรื่อง การหาผลลบของจำนนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

3. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(2 - 5i) - (4 + 2i)$ ในรูปของ a + bi

   ผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(2 - 5i) - (4 + 2i)$ คือ $-2 - 3i$

4. จงหาผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(-7 + 4i) - (5 - 8i)$ในรูปของ a + bi

   ผลลบของจำนวนเชิงซ้อน $(-7 + 4i) - (5 - 8i)$ คือ $-12 + 12i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$(7 - 11i) - (2 + 3i)$	$5 - 14i$
2)	$(5 - 6i) - (-3 + i)$	$8 - 7i$
3)	$(\sqrt{3} + i) - (2 + \sqrt{2}\, i)$	$(\sqrt{3} - 2) + (1 - \sqrt{2})i$
4)	$(\sqrt{4} - i) - 2\sqrt{3}\, i$	$2 - (1 + 2\sqrt{3})i$
5)	$(1 - i) - 2i - (3 + 5i)$	$-2 - 8i$
6)	$(6 + 4i) - (8 - 3i)$	$-2 + 7i$
7)	$10i - (7, 6)$	$(-7, 4)$
8)	$(2 + i) + (3 - 2i)$	$5 - i$
9)	$(1 - 3i) - (6 + 2i)$	$-5 - 5i$
10)	$(5 - 2\sqrt{-9}) - (3 + 2\sqrt{-9})$	$2 - 12i$

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ตอนที่ 2 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริงใดๆ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

2. จงหาผลคูณของ $3(2-5i)$ ในรูปของ $a+bi$

ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(3\cdot 2-3\cdot 5i)$ คือ $6-15i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$6(7-11i)$	$42-66i$
2)	$-2(6i)$	$-12i$
3)	$(\sqrt{3}+i)\sqrt{4}$	$2\sqrt{3}+2i$
4)	$(\sqrt{4}-i)\,2\sqrt{3}\,i$	$2\sqrt{3}+4\sqrt{3}\,i$
5)	$2i(3+5i)$	$-10+6i$
6)	$4i(8-3i)$	$12+28i$
7)	$10i(7+6)$	$130i$
8)	$i(3-2i)$	$2+3i$
9)	$3i(6+2i)$	$-6+18i$
10)	$(5-2\sqrt{-9})\sqrt{-9}$	$18-15i$

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.3

เรื่อง การผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของ a + bi

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง 1. จงหาค่าของ (3 + 2i)(3 - 2i)

<u>วิธีทำวิธีที่ 1 ใช้สูตร</u> $(3 + 2i)(3 - 2i) = [(3)(3) - (2)(-2)] + [(3)(-2) + (2)(3)]i$

$= (9 + 4) + (-6 + 6)i = 13 + 0i = 13$

<u>วิธีที่ 2 ใช้วิธีคูณกระจาย</u> $(3 + 2i)(3 - 2i) = (3)(3) + (3)(-2i) + (2i)(3) + (2i)(-2i)$

$= 9 - 6i + 6i + (-4)i^2 = 9 + (-4)(-1) = 9 + 4 = 13$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	(3 , - 4)(6 , 2)	(26 , -18)
2)	(-2 – i) (5 - 3i)	- 13 + i
3)	(2, 5)(3, 6)	–24 + 27i
4)	(2 - 5i)(6, -3)	–3 - 36i
5)	(1 + 2i)(2 + 3i)(3 + 4i)	–40 + 5i
6)	2i (2 - 3i) – 3i (-3 + 4i)	18+13i
7)	(3 + 4i)(2 + 5i) – (2 + 3i)(3 - 7i)	–41+28i
8)	(2i - 1)(1 + 3i)	-7 - i
9)	i(4 + i)(4 – i)	17i
10)	(2+i)(3-2i)(2-i)(3+2i)	65

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.4

ตอนที่ 1 เรื่อง สังยุคของ z

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

1. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4)

   สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4) คือ (3, 4)

2. จงหาสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i

   สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i คือ 8 - 7i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	z = (-2, 1)	(2, -1)
2)	z = (-1, 3)	(1, -3)
3)	z = 7 - 11i	7 + 11i
4)	z = -5	-5
5)	z = -i	i
6)	z = 3 + 2i	3 – 2i
7)	z = (3 - 2i)(-2 + 3i)	-13i
8)	z = 1+3i	1 - 3i
9)	z = 2(-3 + 2i)	-6 – 4i
10)	z = -5 – 7i	-5 + 7i

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

ตอนที่ 2 เรื่อง ตัวผกผันของการบวก

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวอย่าง

3. จงหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4)

   ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (3, -4) คือ (-3, 4)

4. จงหาตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i

   ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -8 + 7i คือ 8 - 7i

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	z = (-2, 1)	(2, -1)
2)	z = (-1, 3)	(1, -3)
3)	z = 7 - 11i	-7 + 11i
4)	z = -5	5
5)	z = -i	i
6)	z = 3 + 2i	-3 – 2i
7)	z = (3 - 2i)(-2 + 3i)	-13i
8)	$z = -2(1+3i)^2$	-16 + 12i
9)	$z = 2(-2+3i)^2 - 2(-3 + 2i)$	4 – 20i
10)	$z = (1+i)^2 + (2 - 3i)$	2 + 3i

(คะแนนเต็ม 10 คะแนน)

คะแนนที่ได้รับ .....คะแนน

เวลาที่ใช้ .....นาที วันที่ ..... เดือน .....พ.ศ. .....

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.5

เรื่อง ตัวผกผันของการคูณ

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

ตัวผกผันการคูณของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

เมื่อเขียน $z = a + bi$ จะได้ว่า $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ หรือ $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

ตัวอย่าง 1. จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (4, -3)

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (4, -3) คือ $(\frac{4}{25}, \frac{3}{25})$

2. จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน -3 + 2i

ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน -3 + 2i คือ $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

ข้อที่	โจทย์	คำตอบ
1)	$z = 8 + 3i$	$z^{-1} = \frac{8}{73} - \frac{3}{3}i$
2)	$z = (2-i)^2$	$z^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$
3)	$z = (7 - \sqrt{-50}) + (3 - \sqrt{-72})$	$z^{-1} = \frac{10}{342} + \frac{11\sqrt{2}}{342}i$
4)	$z = (1, 1)^3$	$z^{-1} = \frac{-1-i}{4}$
5)	$z = \cos\theta - i\sin\theta$	$z^{-1} = \cos\theta + i\sin\theta$
6)	$z = (5-3i) + (2+5i)$	$z^{-1} = \frac{7-2i}{53}$
7)	$z = (5 - \sqrt{-125}) + (-4 + \sqrt{-20})$	$z^{-1} = \frac{1+3\sqrt{5}i}{46}$
8)	$z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$	$z^{-1} = -i$
9)	$z = \frac{\sqrt[3]{-8} + \sqrt{-8}}{2}$	$z^{-1} = \frac{-1-\sqrt{2}i}{3}$
10)	$z = (2+5i)$	$z^{-1} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2.6

เรื่อง การหารจำนวนเชิงซ้อน

1) จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้การคูณด้วยตัวผกผันของจำนวนเชิงซ้อน

1) $\frac{-3+7i}{29}$ 2) $\frac{5+12i}{13}$ 3) $\frac{-1+5i}{2}$ 4) 3-2i 5) -4-2i

2. จงหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้การคูณด้วยสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

1) $\frac{5+7i}{37}$ 2) $\frac{6+8i}{5}$ 3) $\frac{3+2i}{13}$ 4) $\frac{-3+7i}{29}$ 5) $\frac{5+12i}{13}$

3. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1) $\frac{-11-2i}{25}$ 2) $\frac{1-3i}{10}$ 3) $\frac{8-i}{5}$ 4) $\frac{3+2i}{13}$

5) $\frac{3-4i}{10}$ 6) 1-2i 7) $\frac{-2+i}{10}$ 8) $\frac{24+12i}{5}$

4. จงทำให้เป็นผลสำเร็จและเขียนคำตอบให้อยู่ในรูป a+bi

1) $\frac{7-5i}{2}$ 2) $\frac{31-73i}{85}$ 3) $\frac{-7}{50}$ - $\frac{12i}{25}$ 4) $\frac{13+9i}{20}$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

เรื่องจำนวนเชิงซ้อน เล่มที่ 2 สมบัติพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

1)	ค	6)	ง
2)	ข	7)	ก
3)	ง	8)	ข
4)	ค	9)	ข
5)	ค	10)	ก

บรรณานุกรม

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง.(2548). **คัมภีร์คณิตศาสตร์ ม.5 ภาคเรียนที่ 2 ฉบับปราบมาร.** กรุงเทพฯ. พ.ศ.พัฒนา

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง.(ม.ป.ป.). **สุดยอด เทคนิคคณิตศาสตร์ Pure Pure ม.5** . กรุงเทพฯ. พ.ศ.พัฒนา

สมัย เหล่าวาณิชย์, รศ.(ม.ป.ป.). **คณิตพื้นฐาน + เพิ่มเติม4** กรุงเทพฯ. ไฮเอ็ดพับลิซซิ่ง

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปี่ที่ 5.** กรุงเทพฯ. คุรุสภาลาดพร้าว

http://www.pm.ac.th/external_links.php?links=5882 [วันสืบค้นข้อมูล วันที่ 19 พฤศจิกายน 2558]

http://www.thaigoodview.com/library/contest2553/type2/math04/04/content/content1b.html [วันสืบค้นข้อมูล วันที่ 19 พฤศจิกายน 2558]