

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชุดที่ 2 จำนวนเชิงซ้อน

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32211)
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โดย นางภัคกร ไสแจ่ม
ครูชำนาญการ
โรงเรียนสิรินธร จังหวัดสุรินทร์
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 33

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ชุดที่ 2 จำนวนเชิงซ้อน

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32211)
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชื่อ ชั้น เลขที่

โดย นางภัคกร ไสแจ่ม
ครูชำนาญการ
โรงเรียนสิรินธร จังหวัดสุรินทร์
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 33



แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ หน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน ชุดที่ 2 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

1. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วย 3 ส่วน คือ
 - 1.1 ใ้ความรู้ที่ 2 จำนวน 1 ชุด เป็นส่วนที่เป็นเนื้อหาสาระ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน โดยให้นักเรียนศึกษาภายในกลุ่ม ครูผู้สอนเป็นที่ปรึกษา เมื่อนักเรียน มีปัญหา
 - 1.2 แบบฝึกทักษะที่ 2 จำนวน 1 ชุด เป็นส่วนกำหนดกิจกรรมให้นักเรียน ได้ปฏิบัติภายในกลุ่มเพื่อนำไปสู่จุดประสงค์ที่ตั้งไว้ (เป็นผลงานกลุ่ม)
 - 1.3 แบบทดสอบ ชุดที่ 2 จำนวน 1 ชุด เป็นส่วนที่นักเรียนได้ประเมิน ความรู้ความสามารถของตนเองหลังจากใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
2. นักเรียนควรมีวินัยในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้

มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

สามารถบอกความหมายของจำนวนเชิงซ้อน พร้อมทั้งบอกส่วนจริง ส่วนจินตภาพ และบอกได้ว่าจำนวนที่กำหนดให้เป็นจำนวนชนิดใด

ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

นักเรียนสามารถใช้ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ในการสื่อสาร สื่อความหมายและนำเสนอเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนได้อย่างถูกต้องชัดเจน

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

1. มีระเบียบวินัย
2. มีความรับผิดชอบ

การวัดและประเมินผลการเรียน

ด้านความรู้

ประเมินจากแบบทดสอบ ชุดที่ 2

ด้านทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

ประเมินจากแบบฝึกทักษะที่ 2

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

ประเมินจากการทำงาน

ใบความรู้ที่ 2

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) และ (c,d)

1. การเท่ากัน $(a,b)=(c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

2. การบวก $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$

3. การคูณ $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,ad+bc)$

อาจแทน $(a,b)\cdot(c,d)$ ด้วย $(a,b)(c,d)$ ก็ได้
เซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \mathbb{C}

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $(0,1)(0,1) = (0-1,0+0) = (-1,0)$

จะได้ $(0,1)^2 = (-1,0)$

จากนิยาม $(-1,0)$ คือ จำนวนจริง -1

เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0,1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า $i^2 = -1$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a,b) ใด ๆ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b) \\ &= (a,0)+(b,0)(0,1) \\ &= a+bi\end{aligned}$$

ฉะนั้น จำนวนเชิงซ้อน (a,b) สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a+bi$

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a+bi$

วิธีทำ

| จำนวนเชิงซ้อนในรูป (a,b) | จำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+bi$ |
|----------------------------|---------------------------------|
| $(1,2)$ | $1+2i$ |
| $(-2,4)$ | $-2+4i$ |
| $(3,-1)$ | $3+(-1)i$ หรือ $3-i$ |
| $(0,5)$ | $0+5i$ หรือ $5i$ |
| $(2,0)$ | $2+0i$ หรือ 2 |
| $(-\sqrt{6},0)$ | $-\sqrt{6}+0i$ หรือ $-\sqrt{6}$ |

บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
 เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z
 และเขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$
 เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part)
 และเขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จากบทนิยามนี้ อาจกล่าวได้ว่า สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z=(a,b)$

1. ถ้า $a \neq 0$ แต่ $b=0$ จึงอยู่ในรูป $(a,0)$ หรือ a เรียกว่า **จำนวนจริง**
2. ถ้า $a=0$ แต่ $b \neq 0$ จึงอยู่ในรูป $(0,b)$ หรือ bi เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้**

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนบอกส่วนจริง และส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

วิธีทำ

| จำนวนเชิงซ้อน | ส่วนจริง | ส่วนจินตภาพ |
|-----------------|-------------|-------------|
| (1,2) | 1 | 2 |
| (3,-1) | 3 | -1 |
| (0,5) | 0 | 5 |
| (2,0) | 2 | 0 |
| $(-\sqrt{6},0)$ | $-\sqrt{6}$ | 0 |

ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนบอก $Re(z)$, $Im(z)$ และบอกชนิดของ z เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

วิธีทำ

| z | $Re(z)$ | $Im(z)$ | ชนิดของ z |
|---------------------|-------------|---------|-----------------|
| $z = 5 + 3i$ | 5 | 3 | จำนวนเชิงซ้อน |
| $z = -\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | 0 | จำนวนจริง |
| $z = i$ | 0 | 1 | จำนวนจินตภาพแท้ |
| $z = 3 + 0i$ | 3 | 0 | จำนวนจริง |
| $z = -4i$ | 0 | -4 | จำนวนจินตภาพแท้ |
| $z = \sqrt{3} - 2i$ | $\sqrt{3}$ | -2 | จำนวนเชิงซ้อน |

ตัวอย่างที่ 4

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

วิธีทำ

- 1) $\sqrt{4} - \sqrt{-16} = 2 - \sqrt{16}\sqrt{-1} = 2 - 4i$
- 2) $-\sqrt{27} + \sqrt{-25} = -3\sqrt{3} + \sqrt{25}\sqrt{-1} = -3\sqrt{3} + 5i$
- 3) $\sqrt{-2} + 5 = \sqrt{2}\sqrt{-1} + 5 = \sqrt{2}i + 5 = 5 + \sqrt{2}i$
- 4) $\sqrt{-9} - \sqrt{-4} = \sqrt{9}\sqrt{-1} - \sqrt{4}\sqrt{-1} = 3i - 2i = i$

แบบฝึกทักษะที่ 2

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a+bi$ พร้อมทั้งบอกส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ

| ข้อ | จำนวนเชิงซ้อน ในรูป (a, b) | จำนวนเชิงซ้อน ในรูป $a+bi$ | ส่วนจริง | ส่วนจินตภาพ |
|----------|---------------------------------|-------------------------------|----------|-------------|
| ตัวอย่าง | $(-2, 1)$ | $-2+i$ | -2 | 1 |
| 1.1) | $(4, 1)$ | | | |
| 1.2) | $(-3, 6)$ | | | |
| 1.3) | $(0, -1)$ | | | |
| 1.4) | $(8, 0)$ | | | |
| 1.5) | $(-\sqrt{5}, -1)$ | | | |
| 1.6) | $(-\sqrt{7}, 0)$ | | | |
| 1.7) | $(0, \sqrt{13})$ | | | |
| 1.8) | $(3, -3)$ | | | |

2. จงเขียนบอก $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$ และทำเครื่องหมาย \checkmark ลงในตารางที่ตรงกับชนิดของ z เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

| ชื่อ | z | $\text{Re}(z)$ | $\text{Im}(z)$ | จำนวนเชิงซ้อน | จำนวนจริง | จำนวนจินตภาพแท้ |
|----------|---------------------|----------------|----------------|---------------|-----------|-----------------|
| ตัวอย่าง | $z = 1 - \sqrt{3}i$ | 1 | $-\sqrt{3}$ | \checkmark | | |
| | $z = \sqrt{7}i$ | 0 | $\sqrt{7}$ | \checkmark | | \checkmark |
| 2.1) | $z = -\sqrt{2} + i$ | | | | | |
| 2.2) | $z = -i$ | | | | | |
| 2.3) | $z = 3i + 5$ | | | | | |
| 2.4) | $z = -7$ | | | | | |
| 2.5) | $z = 15i$ | | | | | |
| 2.6) | $z = -2 - 2i$ | | | | | |
| 2.7) | $z = 6 - 0i$ | | | | | |
| 2.8) | $z = 0 + \sqrt{5}i$ | | | | | |

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

3.1) $7 + \sqrt{-49} = \dots\dots\dots$

3.2) $-\sqrt{81} + \sqrt{-12} = \dots\dots\dots$

3.3) $\sqrt{-20} + 3 = \dots\dots\dots$

3.4) $\sqrt{-36} - \sqrt{-100} = \dots\dots\dots$

แบบทดสอบ ชุดที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32211)
ชุดที่ 2 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เวลา 10 นาที

คำชี้แจง

- แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 8 ข้อ คะแนนเต็ม 4 คะแนน ใช้เวลาในการทำข้อสอบ 10 นาที
- ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคลเพื่อประเมินความรู้ของตนเอง
- เกณฑ์การให้คะแนน คือ ตอบถูกได้ 0.5 คะแนน, ตอบผิดได้ 0 คะแนน

คำสั่ง

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x) ทับช่องที่ตรงกับตัวอักษร ก, ข, ค หรือ ง

| | |
|---|--|
| <p>1. กำหนดให้ $z = a + bi$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง</p> <p>ก. z เป็นจำนวนจริง เมื่อ $b \neq 0$</p> <p>ข. a เป็นส่วนจริง</p> <p>ค. b เป็นส่วนจินตภาพ</p> <p>ง. $z = (a, b)$</p> <p>2. กำหนดให้ $z = 5 - 7i$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง</p> <p>ก. z เป็นจำนวนเชิงซ้อน</p> <p>ข. $z = (5, -7)$</p> <p>ค. $\text{Re}(z) = 5$</p> <p>ง. $\text{Im}(z) = -7i$</p> | <p>3. ค่าของ $i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{20}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้</p> <p>ก. $1+i$</p> <p>ข. $1-i$</p> <p>ค. $-1+i$</p> <p>ง. $-1-i$</p> <p>4. ข้อใดผิด</p> <p>ก. $(-2, 0) = -2i$</p> <p>ข. $(21, 9) = 21+9i$</p> <p>ค. $(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$</p> <p>ง. $(-\sqrt{9}, 3) = -3+3i$</p> |
|---|--|

5. กำหนด $z = -3 + i$ ข้อใดต่อไปนี้
ไม่ถูกต้อง

- ก. ส่วนจริง คือ -3
- ข. ส่วนจินตภาพ คือ 1
- ค. $z = (1, -3)$
- ง. z เป็นจำนวนเชิงซ้อน

6. $\sqrt{64} + \sqrt{-200}$ มีค่าตรงกับข้อใด

- ก. $10\sqrt{2} + 8i$
- ข. $10\sqrt{2} - 8i$
- ค. $8 + 10\sqrt{2}i$
- ง. $8 - 10\sqrt{2}i$

7. $1 - \sqrt{-18}$ ในรูปของ $a + bi$ มีค่าตรงกับ

ข้อใด

- ก. $1 - 3\sqrt{-2}i$
- ข. $1 - 3\sqrt{2}i$
- ค. $1 - 2\sqrt{3}i$
- ง. $-1 + 2\sqrt{3}i$

8. $-2 + 4i$ มีค่าตรงกับข้อใด

- ก. $\sqrt{4} + 4i$
- ข. $-\sqrt{4} - 4i$
- ค. $\sqrt{-4} + \sqrt{16}i$
- ง. $-\sqrt{4} - (-\sqrt{16})i$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบ ชุดที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32211)
ชุดที่ 2 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เวลา 10 นาที

ชื่อ ชั้น เลขที่

คำสั่ง

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x) ทับช่องที่ตรงกับตัวอักษร ก, ข, ค หรือ ง

| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
|-----|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |

| คะแนนเต็ม | คะแนนที่ได้ |
|-----------|-------------|
| 4 | |

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง จำนวนจินตภาพ

คำชี้แจง

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันแสดงวิธีการหาคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

- จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a+bi$ พร้อมทั้งบอกส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ

| ข้อ | จำนวนเชิงซ้อน ในรูป (a, b) | จำนวนเชิงซ้อน ในรูป $a+bi$ | ส่วนจริง | ส่วนจินตภาพ |
|----------|---------------------------------|-------------------------------|-------------|-------------|
| ตัวอย่าง | $(-2, 1)$ | $-2+i$ | -2 | 1 |
| 1.1) | $(4, 1)$ | $4+i$ | 4 | 1 |
| 1.2) | $(-3, 6)$ | $-3+6i$ | -3 | 6 |
| 1.3) | $(0, -1)$ | $-i$ | 0 | -1 |
| 1.4) | $(8, 0)$ | 8 | 8 | 0 |
| 1.5) | $(-\sqrt{5}, -1)$ | $-\sqrt{5}-i$ | $-\sqrt{5}$ | -1 |
| 1.6) | $(-\sqrt{7}, 0)$ | $-\sqrt{7}$ | $-\sqrt{7}$ | 0 |
| 1.7) | $(0, \sqrt{13})$ | $\sqrt{13}i$ | 0 | $\sqrt{13}$ |
| 1.8) | $(3, -3)$ | $3-3i$ | 3 | -3 |

2. จงเขียนบอก $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$ และทำเครื่องหมาย \checkmark ลงในตารางที่ตรงกับชนิดของ z เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

| ข้อ | z | $\text{Re}(z)$ | $\text{Im}(z)$ | จำนวน เชิงซ้อน | จำนวน จริง | จำนวน จินตภาพ |
|----------|---------------------|----------------|----------------|-------------------|---------------|------------------|
| ตัวอย่าง | $z = 1 - \sqrt{3}i$ | 1 | $-\sqrt{3}$ | \checkmark | | |
| | $z = \sqrt{7}i$ | 0 | $\sqrt{7}$ | \checkmark | | \checkmark |
| 2.1) | $z = -\sqrt{2} + i$ | $-\sqrt{2}$ | 1 | \checkmark | | |
| 2.2) | $z = -i$ | 0 | -1 | \checkmark | | \checkmark |
| 2.3) | $z = 3i + 5$ | 5 | 3 | \checkmark | | |
| 2.4) | $z = -7$ | -7 | 0 | \checkmark | \checkmark | |
| 2.5) | $z = 15i$ | 0 | 15 | \checkmark | | \checkmark |
| 2.6) | $z = -2 - 2i$ | -2 | -2 | \checkmark | | |
| 2.7) | $z = 6 - 0i$ | 6 | 0 | \checkmark | \checkmark | |
| 2.8) | $z = 0 + \sqrt{5}i$ | 0 | $\sqrt{5}$ | \checkmark | | \checkmark |

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปของ $a + bi$

$$3.1) \quad 7 + \sqrt{-49} = 7 + \sqrt{49}\sqrt{-1} = 7 + 7i$$

$$3.2) \quad -\sqrt{81} + \sqrt{-12} = -\sqrt{81} + \sqrt{12}\sqrt{-1} = -9 + 2\sqrt{3}i$$

$$3.3) \quad \sqrt{-20} + 3 = \sqrt{20}\sqrt{-1} + 3 = 2\sqrt{5}i + 3 = 3 + 2\sqrt{5}i$$

$$3.4) \quad \sqrt{-36} - \sqrt{-100} = \sqrt{36}\sqrt{-1} - \sqrt{100}\sqrt{-1} = 6i - 10i = -4i$$

เฉลยแบบทดสอบ ชุดที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32211)
ชุดที่ 2 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เวลา 10 นาที

ชื่อ ชั้น เลขที่

คำสั่ง

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x) ทับช่องที่ตรงกับตัวอักษร ก, ข, ค หรือ ง

| ข้อ | ก | ข | ค | ง |
|-----|---|---|---|---|
| 1 | x | | | |
| 2 | | | | x |
| 3 | | x | | |
| 4 | x | | | |
| 5 | | | x | |
| 6 | | | x | |
| 7 | | x | | |
| 8 | | | | x |

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล และคณะ. ม.ป.ป. **คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ชั้น ม.4 – 6.** กรุงเทพฯ : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.
- กมล เอกไทยเจริญ. ม.ป.ป. **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4 ค 014.** กรุงเทพฯ : อมรการพิมพ์.
- โกรบ มุทภาพร. 2556. **Compact คณิตศาสตร์ ม.5.** กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. 2554. **คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม. 4 – 6 เล่ม 4.** กรุงเทพฯ : ธนัชการพิมพ์.
- เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. ม.ป.ป. **คู่มือละเทคนิคิดัดใจทย์ คณิตศาสตร์ ค 014, ค 044.** กรุงเทพฯ : SCIENCE CENTER.
- ธนวัฒน์ (สันติ) สันทราพรพล. ม.ป.ป. **คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4 – 6) เล่ม 4 สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อมรการพิมพ์.
- รังสรรค์ มณีเล็ก และคณะ. 2549. **สื่อการเรียนรู้สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 2.** กรุงเทพฯ : วัฒนาพานิช.
- ศึกษาธิการ. กระทรวง. 2556. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เล่ม 4.** พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- สมัย เหล่าวานิชย์ และพัชพรรณ เหล่าวานิชย์. 2554. **HI – ED’s Mathematics คณิตศาสตร์ ม.4 – 6 เล่ม 4 (รายวิชาพื้นฐานและเพิ่มเติม).** นนทบุรี : ไทเนรมิตกิจอินเตอร์โพรเกรสซิฟ,